Revista INTEGRACION
Departamento de Matemáticas UIS
Vol. 6, No. 2, julio-diciembre 1988

La función topológica de exterior

ROSA ELSSY CAMACHO V.*
MANUEL SUAREZ M.*

CONTENIDO

§ 0. PRESENTACION

En estas notas se hace el estudio de algunas nociones asociadas a la función de exterior sobre un conjunto. Esta función produce una relación cuyo corte horizontal induce una noción que denominamos de exteriorizante. Y también se realiza una extensión de los

* Profesores Titulares. Escuela de Matemáticas y Estadística, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia (UPTC), Tunja, Colombia.

conceptos de exterior y de exteriorizante. Se demuestra que existe una correspondencia biunívoca entre cada una de estas tres nociones y la colección de topologías sobre el conjunto en el que están definidas.

El presente trabajo fue realizado dentro de la investigación "Topología General. Primera Parte" que está adscrita al Centro de Investigaciones y Extensión de la Facultad de Matemáticas y Ciencias Naturales de la UPTC. Y fue expuesto en el Encuentro de Topología No. 1 realizado en Bogotá en noviembre de 1987.

En la sección 1 se transcriben algunas propiedades conocidas de la función de exterior. Inicialmente se toma como concepto primitivo la noción de función de exterior sobre un conjunto y se obtienen algunas consecuencias. En particular se determina la topología asociada. Posteriormente se construye la función de exterior asociada a una topología sobre un conjunto y se demuestran algunas de sus relaciones con otras nociones topológicas. En particular, se demuestra el conocido teorema sobre la correspondencia biunívoca entre la colección de funciones de exterior sobre un conjunto y su correspondiente colección de topologías.

En la sección 2 se introduce la noción de (pre)exteriorizante. Y se la considera como concepto primitivo para construír la estructura topológica. Se demuestra que existe una correspondencia biunívoca entre la colección de funciones de exteriorizantes sobre un conjunto y su correspondiente colección de topologías. También se logra caracterizar, de dos maneras, la continuidad de una función en términos de la noción de exteriorizante.

En la sección 3 se introduce una función $E : P(X) \longrightarrow P(P(X))$ y se la considera como concepto primitivo para construir la estructura topológica. Se demuestra que existe una correspondencia biunívoca entre la colección de funciones E sobre un conjunto X y su correspondiente colección de topologías. Se logra definir una función de exterior e asociada a E y demostrar que existe una correspondencia biunívoca entre la colección de funciones de exterior e y la colección de funciones E sobre un conjunto X. Se hace una extensión de la estructura topológica definiendo las funciones CE, EC y CEC, dualmente a como se hace con una función e de exterior.

En la sección 4 se introduce la noción de Exteriorizante como el corte horizontal de la relación asociada a la función E presentada en la sección 3. Procediendo dualmente a como se hizo con la noción de exteriorizante de la sección 2, se demuestra que existe una correspondencia biunívoca entre la colección de funciones de Exteriorizantes y la correspondiente colección de topologías.

En cada una de las secciones 2, 3, 4, se define un par de funciones que cumplen con las condiciones de la "adjunción a izquierda", que es una noción presentada por el Profesor Carlos Ruiz S. en el Fascículo 1 de "Topología o Convergencia".

La idea de la extensión de la estructura topológica que se trabaja en la sección 3 surgió de un comentario hecho por el Profesor Carlos Ruiz S, y su desarrollo fue iniciado en el artículo "Extensión de las nociones de vecindad y convergencia de filtros", de Hernán Manrique E. y Manuel Suárez M., de fecha marzo de 1986 y correspondiente a la investigación "Convergencia Secuencial, Tercera Parte".

§1. LA FUNCION TOPOLOGICA DE EXTERIOR

En esta sección se transcriben algunas conocidas propiedades de la función de exterior que van a ser utilizadas en las otras secciones del trabajo.

En la primera parte se presenta como concepto primitivo la noción de función de exterior sobre un conjunto X y se obtienen algunas consecuencias. En particular se determina la topología asociada.

En la segunda parte, se construye la función de exterior asociada a una topología sobre un conjunto X y se demuestran algunas de sus relaciones con otras nociones topológicas. Se finaliza la sección demostrando el conocido teorema que afirma que existe una correspondencia biunívoca entre la colección de funciones de exterior sobre un conjunto y su colección de topologías.

DEFINICION

Sea X un conjunto no vacío. Una función $e : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ se llama *de exterior* si cumple las siguientes propiedades, donde D y G son subconjuntos de X.

e1. $e(\phi) = X$.

e2. $e(D) \subseteq CD$ [la expresión CD representa complemento de D].

e3. $e(D \cup G) = e(D) \cap e(G)$.

e4. $e(D) \subseteq e(Ce(D))$.

1.1 PROPOSICION

Una función de exterior sobre un conjunto X verifica las siguientes condiciones, donde D, G, H son subconjuntos de X.

1. $e(X) = \phi$.
2. $e(D) = e(Ce(D))$.
3. $e(D) \cap e(CD) = \phi$.

4. $e(D) \subseteq Ce(e(D))$.

5. $e(Ce(D)) \subseteq Ce(e(D))$.

6. Si $D \subseteq G$, entonces $e(G) \subseteq e(D)$.

7. $e(D) \cup e(G) \subseteq e(D \cap G)$.

8. $e(D) \cap e(G) \subseteq e(D \cap G)$.

9. $e(D \cup G) \subseteq e(D) \cup e(G)$.

Sea $\}D_i : i \in I\{$ una colección no vacía de subconjuntos de X.

10. $e(\cup \}D_i : i \in I\{) \subseteq \cup \}e(D_i) : i \in I\{$.

11. $e(\cup \}D_i : i \in I\{) \subseteq \cap \}e(D_i) : i \in I\{$.

12. $\cup \}e(D_i) : i \in I\{ \subseteq e(\cap \}D_i : i \in I\{)$.

13. $\cap \}e(D_i) : i \in I\{ \subseteq e(\cap \}D_i : i \in I\{)$.

14. $e(\cup \}D_i : i \in I\{) \subseteq e(\cap \}D_i : i \in I\{)$.

15. $e(D) - e(G) \subseteq e(D - G)$.

Sea R_e el recorrido de la función exterior e.

16. $D \in R_e \iff D = e(CD)$.

17. Si $D \in R_e$ y $G \in R_e$, entonces $D \cap G \in R_e$.

18. Si para todo i de I, $D_i \in R_e$, entonces

$$\cup \}D_i : i \in I\{ \in R_e.$$

DEMOSTRACION

Las propiedades 1, 3, 4 se deducen de *e2*.

La propiedad 2 se deduce de *e4* y *e2*.

La propiedad 5 se deduce de 2 y 4.

La propiedad 6 se deduce de *e3*.

Las propiedades 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 se deducen de 6.

La propiedad 16 se deduce de *e2*, *e4*.

La propiedad 17 se deduce de 16 y *e3*.

La propiedad 18 se deduce de *e2*, 12, 16. ▲

1.2 PROPOSICION

Sea e una función de exterior en X. El recorrido de e es una topología sobre X.

$\tau = R_e = \}D \mid D = e(CD)\{ \in Top(X)$.

DEMOSTRACION

La proposición se sigue de *e1* y las propiedades 1.1.1, 1.1.16, 1.1.17 y 1.1.18. ▲

DENOMINACION

Al recorrido de una función exterior e se le llama la *topología asociada* a e, o también, la topología generada por e.

DEFINICION

Sea $f: \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ una función y A un subconjunto de X. Se dice que A es un *punto fijo* de f, si $f(A) = A$ y, que A es un *punto cofijo* de f, $f(A) = CA$.

Se observa que en las Proposiciones 1.1.16 y 1.2 se demuestra que la colección de puntos cofijos de e, es el recorrido de la función e y que también es una topología sobre X.

DEFINICION

Sea (X, τ) un espacio topológico. La función $e_\tau : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ definida por $e_\tau(D) = \}x : (\exists V \in \tau)(x \in V \text{ y } V \subseteq CD)\{$ es una función de exterior (V. 1.3.2. a continuación), llamada la *función de exterior asociada a la topología* τ.

1.3 PROPOSICION

Sea (X,τ) un espacio topológico. Se cumplen las condiciones que se enuncian a continuación.

1. $e_\tau(D) \in \tau$.
2. La función e_τ es una función de exterior (que a continuación se denota por e).
3. $D \in \tau \Longleftrightarrow e(CD) = D$.
4. $D \in \mathcal{C}_\tau \Longleftrightarrow CD = e(D)$ [$\mathcal{C}_\tau$ es la colección de cerrados].
5. $i(D) = e(CD)$ [i(D) representa el interior de D].
6. $ad(D) = Ce(D)$ [ad(D) representa la adherencia de D].
7. $Fr(D) = C(e(CD) \cup e(D))$.
8. $D \in V(x) \Longleftrightarrow x \in e(CD)$ [V(x) es la colección de vecindades del punto x].
9. $e(D) = i(CD)$.
10. $e(D) = Cad(D)$.
11. $e(D) = CD - Fr(D)$.
12. $e(D) \cap Fr(D) = \phi$.

DEMOSTRACION

En lo que sigue, e_τ se denota por e.

1. De la definición de e se tiene que e(D) es una reunión de conjuntos abiertos, la cual es un abierto.

2. *e1.* Puesto que X es un abierto y $X = C\phi$, se tiene que $e(\phi) = X$.

e2. Si x está en e (D), usando la definición de e se concluye que x está en CD. Entonces $e(D) \subseteq CD$.

e3. Usando la definición de e_τ, se concluye que $e(D \cup G) \subseteq e(D) \cap e(G)$.
Si x está en e(D) y e(G), de la definición de e y del hecho de que toda topología es cerrada para intersecciones finitas, se tiene que x está en $e(D \cup G)$. Así $e(D) \cap e(G) \subseteq e(D \cup G)$.

e4. De 1, con $V = e(D)$ se tiene que $e(D) \subseteq e(C e(D))$.

3. De *e2*, $e(CD) \subseteq D$.
Si x está en D, con V = D se tiene que V es un abierto, contiene a x y está contenido en C(CD). Entonces x está en e(CD).
La otra implicación es consecuencia de 1).
4. Se concluye de 3).
5. Se concluye, de manera inmediata, de las definiciones de e y de la función interior.
6. De 1 y *e2* se deduce que Ce(D) es un cerrado que contiene a D. Entonces, $ad(D) \subseteq C e(D)$.
Si x no es de ad D, existe 0 en τ tal que x está en 0 y $0 \cap D = \phi$. Entonces, x está en e(D).
7. Se obtiene expresando la frontera de un conjunto en términos de la adherencia y aplicando 6).
8. Se concluye de 5).
9. Se deduce de 5).
10. Se tiene de 6).
11. Se concluye de 5), porque $ad\ A = A \cup Fr\ A$.
12. Se concluye de 7).
Por las proposiciones 1.2 y 1.3.3, se observa que τ es la topología asociada a la función de exterior e_τ ▲

1.4 TEOREMA ([2])

Toda función de exterior es generada por una topología y toda topología es generada por una función de exterior. En cada caso hay unicidad. Es decir, existe una correspondencia biunívoca entre las funciones de exterior sobre un conjunto y su colección de topologías.

DEMOSTRACION

De las proposiciones 1.2 y 1.3.3 se concluye que toda función de exterior e es generada por una topología, precisamente la topología generada por e. Entonces hay sólo una topología que genera a e.

Toda topología τ genera una función de exterior e_τ (1.3.2), y por las proposiciones 1.2 y 1.3.3, τ es la topología asociada a e_τ.
La unicidad de e_τ se tiene de la primera parte de esta demostración. ▲

1.5 PROPOSICION

Sean (X,τ) y (Y,τ') espacios topológicos. Y sea $f : (X,\tau) \longrightarrow (Y,\tau')$ una función.

Las siguientes condiciones son equivalentes.

1. f es continua.
2. Para cada subconjunto G de Y, $f^{-1}(e(G)) \subseteq e(f^{-1}(G))$.

DEMOSTRACION

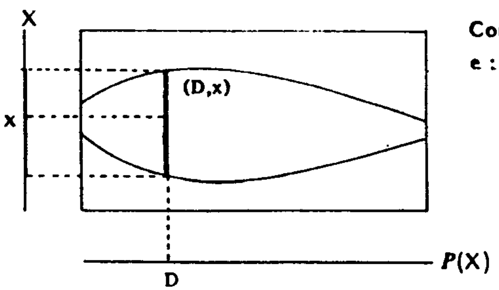
(1) ⇒ (2). Por la proposición 1.3.9 y por ser f continua, $f^{-1}(e(G)) \subseteq e(f^{-1}(G))$.
(2) ⇒ (1). Se obtiene de la proposición 1.3.5. ▲

§2. LA NOCION DE EXTERIORIZANTE

En [5] se muestra que una función que tiene como codominio un conjunto de partes, permite definir una relación la cual determina dos funciones: el corte horizontal y el corte vertical de la relación. En esta sección se hace el estudio del corte horizontal correspondiente a una función de exterior arbitraria.

Una función $e : P(X) \longrightarrow P(X)$ que cumple las condiciones *e1, e2,* y *e3*, determina una relación R en el conjunto $P(X) \times X$ de la siguiente manera: que $(D,x) \in R$ significa que $x \in e(D)$.

Esta relación determina la función "corte vertical", que a cada conjunto D hace corresponder la colección $\{x \in X \mid (D,x) \in R\}$, la cual es e(D). Es decir, la función "corte vertical" de R coincide con la función inicial e.

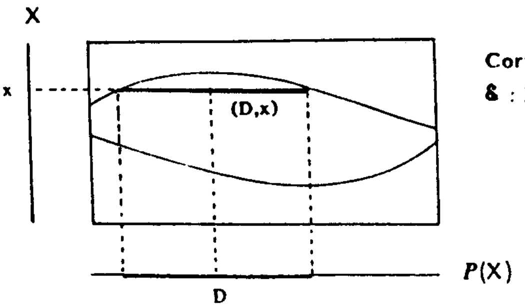


Corte vertical

$e : P(X) \longrightarrow P(X)$

$\quad D \longrightarrow \{x \in X : (D,x) \in R\}$

La relación R también determina la función &("corte horizontal"), que a cada x (de X) asocia la colección $\{D \in P(X) : (D,x) \in R\}$.



Corte horizontal

$\& : X \longrightarrow P(P(X))$

$\quad x \longrightarrow \{D \in P(X) : (D;x) \in R\}$

Con el proceso anterior se está realizando un trabajo dual al que se hace con las conocidas nociones de pre-interior y de pre-vecindad.

En esta sección se encuentran las propiedades de la función & de pre-exteriorizantes, se define una relación de orden en la colección Pr&(X) de todas las funciones de pre-exteriorizantes sobre X, se estudian las funciones $T: Pr\&(X) \longrightarrow Top(X)$ y $P: Top(X) \longrightarrow Pr\&(X)$ y se demuestra que P cumple con la propiedad de "adjunción a izquierda" definida por C. Ruiz en [4].

La noción de exteriorizante surge al analizar cuándo una función de pre-exteriorizantes es generada por una topología. La respuesta se obtiene anexando la condición &5. Lo cual permite demostrar el principal resultado de esta sección, que afirma que existe una correspondencia biunívoca entre las colecciones &(X) y Top(X). También se construye la estructura topológica tomando como concepto primitivo la noción de exteriorizante.

DEFINICION

Sea X un conjunto con más de un elemento y $\&: X \longrightarrow P(P(X))$ una función. La aplicación & se llama *función de pre-exteriorizantes* si cumple las siguientes condiciones:

E1. El conjunto ϕ es pre-exteriorizante de todo punto de X.
Esto es, para cada elemento x, $\phi \in \&(x)$.

E2. El conjunto D es pre-exteriorizante de ninguno de sus puntos. Es decir, si x está en D, entonces D no está en &(x).

E3. Para todo x en X la colección &(x) es cerrada para sub-conjuntos. Esto es, si D está contenido en G y G es pre-exteriorizante de x, entonces D también es pre-exteriorizante de x.

E4. Para cada x de X, la colección &(x) es cerrado para uniones finitas. Esto es, si D y G son pre-exteriorizantes de x, entonces $D \cup G$ también es pre-exteriorizante de x.

Se observa que como consecuencia de la definición de pre-exteriorizante se cumple que

- X es pre-exteriorizante de ningún punto.
  O sea que para todo x de X, $X \notin \&(x)$.
- Si D es pre-exteriorizante de x, CD no lo es.
- Si $\cup \{D_i : i \in I\}$ es pre-exteriorizante de x, cada D_i es pre-exteriorizante de x.

Se denota Pr&(X) a la colección de funciones de pre-exteriorizantes sobre un conjunto X.

DEFINICION

Sean & y &' funciones de pre-exteriorizantes sobre X. Se dice que & es *menos fina* que &' y se denota $\& \leqslant \&'$, si $\&(x) \subseteq \&'(x)$ para todo x de X.
La relación $\leqslant$ define un orden en Pr&(X).

La función $\mathcal{E}^0 : X \longrightarrow P(P(X))$ definida por $\mathcal{E}^0(x) = P(C\{x\})$ es el máximo de $(\mathrm{Pr}\,\mathcal{E}(X), \leq)$. Además la función $\mathcal{E}_0 : X \longrightarrow P(P(X))$ dada por $\mathcal{E}_0(x) = \{\phi\}$ para todo x en X, es el mínimo de $(\mathrm{Pr}\mathcal{E}(X), \leq)$.

2.1 PROPOSICION

Sea C una subcolección no vacía de $\mathrm{Pr}\mathcal{E}(X)$. La función $C_0 : X \longrightarrow P(P(X))$ donde a cada x se le asigna el conjunto $\cap\{\mathcal{E}(x) : \mathcal{E} \in C\}$, es una función de pre-exteriorizantes de X y $C_0 = \mathrm{Inf}\, C$.

DEMOSTRACION

Se concluye de la definición de C_0. ▲

Puesto que el conjunto $(\mathrm{Pr}\mathcal{E}(X), \leq)$ tiene máximo y toda subcolección no vacía tiene ínfimo, entonces toda subcolección no vacía C tiene supremo ([4]).

Puede pensarse que el extremo superior de C está dado por $C^0(x) = \cup\{\mathcal{E}(x) : \mathcal{E} \in C\}$; sin embargo, el siguiente ejemplo muestra que ésto no siempre se cumple.

EJEMPLO

Sean A y B subconjuntos de X tales que $\{p\} \neq A \neq X$, $\{p\} \neq B \neq X$ y $A \neq A \cap B \neq B$. Se considera $C = \{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2\}$, donde $\mathcal{E}_1 : X \longrightarrow P(P(X))$ está definida por $\mathcal{E}_1(x) = P(C\{x\})$ si $x \neq p$, y $\mathcal{E}_1(p) = P(A)$; y $\mathcal{E}_2 : X \longrightarrow P(P(X))$ está definida por $\mathcal{E}_2(x) = P(C\{x\})$ si $x \neq p$, y, $\mathcal{E}_2(p) = P(B)$.

Se cumple que $\mathcal{E}_1$ y $\mathcal{E}_2$ son funciones de pre-exteriorizantes.

La función $C^0 : X \longrightarrow P(P(X))$ definida por $C^0(x) = \mathcal{E}_1(x) \cup \mathcal{E}_2(x)$ no es una función de pre-exteriorizantes, porque $A \in C^0(p)$ y $B \in C^0(p)$ y $A \cup B \notin C^0(p)$.

2.2 PROPOSICION

Sea $\mathcal{E}$ una función de pre-exteriorizantes. La colección T de conjuntos tales que su complementario es pre-exteriorizante de todos sus puntos, es una topología sobre X.

Esto es,

$$T = \{V : (\forall x)(x \in V \Rightarrow CV \in \mathcal{E}(x))\} \in \mathrm{Top}(X).$$

DEMOSTRACION

De la propiedad *E1* se concluye que $X \in T$.

De la definición de T se deduce que $\phi \in T$.

Si V y W están en T y x está en $V \cap W$, entonces CV y CW están en $\mathcal{E}(x)$ y, por *E4*, $V \cap W$ está en T.

Si $\}V_i : i \in I\{$ es una colección de elementos de T y x está en $\cup\}V_i : i \in I\{$, entonces x está en algún V_i, y CV_i está en $\mathcal{E}(x)$. Por *E3*, se concluye que $\cap\}CV_i : i \in I\{$ está en $\mathcal{E}(x)$, de donde $C\cup\}V_i : i \in I\{$ está en $\mathcal{E}(x)$. En consecuencia, $\cup\}V_i : i \in I\{$ está en T. ▲

DEFINICION

Se define la función $T : Pr\mathcal{E}(X) \longrightarrow Top(X)$ afirmando que a cada función de pre-exteriorizantes $\mathcal{E}$ le hace corresponder la colección de subconjuntos V de X, denotada por $T(\mathcal{E})$, tales que para cada punto x de V, $CV \in \mathcal{E}(x)$.

Se observa que $T(\mathcal{E}^0) = P(X)$ y $T(\mathcal{E}_0) = \}X, \phi\{$.

2.3 PROPOSICION

El mecanismo $T : Pr\mathcal{E}(X) \longrightarrow Top(X)$ es un morfismo de conjuntos ordenados. Es decir, si $\mathcal{E} \leqslant \mathcal{E}'$, entonces $T(\mathcal{E}) \leqslant T(\mathcal{E}')$. [Se recuerda que $\tau \leqslant \tau'$ significa que $\tau \subseteq \tau'$].

DEMOSTRACION

Sea $V \subseteq X$. Si V está en $T(\mathcal{E})$ y x está en V, CV está en $\mathcal{E}(x)$. Como $\mathcal{E} \leqslant \mathcal{E}'$, CV está en $\mathcal{E}'(x)$. Entonces V está en $T(\mathcal{E}')$. ▲

2.4 PROPOSICION

Sea (X, τ) un espacio topológico. La aplicación $\mathcal{E}$ que a cada punto x de X asigna la colección $\}W : (\exists\, V \in \tau)(x \in V \text{ y } V \cap W = \phi)\{$, es una función de pre-exteriorizantes en X. Se denota $\mathcal{E}_\tau$.

DEMOSTRACION

E1. Es consecuencia de que X es de τ.

E2. Si W está en $\mathcal{E}(x)$, existe un abierto que contiene a x y está contenido en CW. Luego x no está en W.

E3. Si D está contenido en G y G está en $\mathcal{E}(x)$, existe un abierto V que contiene a x y está contenido en CD. Entonces D está en $\mathcal{E}(x)$.

E4. Sean D y G en $\mathcal{E}(x)$. Como τ es cerrada para intersecciones finitas, se concluye que $D \cup G$ está en $\mathcal{E}(x)$. ▲

DEFINICION

Se define la función $P : Top(X) \longrightarrow Pr\mathcal{E}(X)$, afirmando que a cada topología τ le hace corresponder una función $P(\tau)$ de pre-exteriorizantes, donde W está en $P(\tau)(x)$ si existe V en τ tal que x está en V y V está contenido en CW.

Se observa que $P(\mathcal{P}(X)) = \mathcal{E}^0$ y $P(\{X, \phi\}) = \mathcal{E}_0$.

2.5 PROPOSICION

El mecanismo $P : Top(X) \longrightarrow Pr\mathcal{E}(X)$ es un morfismo de conjuntos ordenados. Es decir, si $\tau < \tau'$, $P(\tau) < P(\tau')$.

DEMOSTRACION

Se deduce de la definición de P. ▲

2.6 PROPOSICION

Si $\mathcal{E}$ es una función de pre-exteriorizantes y τ es una topología en X, se tiene que

1. $\mathcal{E} > P(T(\mathcal{E}))$.
2. $\tau < T(P(\tau))$.

DEMOSTRACION

1. Si W está en $P(T(\mathcal{E}))(x)$, por *E3* y las definiciones de P y T, se deduce que W está en $\mathcal{E}(x)$.
2. Si V está en τ, dado x en V hay un abierto que contiene a x y está contenido en V: el mismo V. Por las definiciones de P y T, se concluye que V está en $T(P(\tau))$. ▲

Se observa que la segunda parte de la proposición 2.6, puede mejorarse. (V. Proposición 2.9).

DEFINICION

Puesto que $(Pr\mathcal{E}(X),\leq)$ y $(Top(X),\leq)$ son conjuntos ordenados y los mecanismos P y T son morfismos,y además se verifican las condiciones de la proposición 2.6, se dice que el mecanismo P es *adjunto a izquierda* del mecanismo T ([4]).

2.7 PROPOSICION

Como consecuencia de que P es adjunto a izquierda de T, se cumplen las siguientes propiedades (v. [4] y [5]):

1. Si $P(\tau)\leq\mathcal{E}$, entonces $\tau\leq T(\mathcal{E})$.
2. Si $\tau\leq T(\mathcal{E})$, entonces $P(\tau)\leq\mathcal{E}$.
3. El conjunto $\{\mathcal{E}\in Pr\mathcal{E}(X) : T(\mathcal{E})\geq\tau\}$ tiene mínimo.
4. El conjunto $\{\tau\in Top(X) : P(\tau)\leq\mathcal{E}\}$ tiene máximo.
5. Sea una subcolección no vacía de $Pr\mathcal{E}(X)$. Entonces $T(\mathrm{Inf}\,C) = \mathrm{Inf}(T(C))$.
6. Sea A una subcolección no vacía de $Top(X)$. Entonces $P(\mathrm{Sup}\,A) = \mathrm{Sup}(P(A))$.
7. Sea C una subcolección no vacía de $Pr\mathcal{E}(X)$. Entonces, $\mathrm{Sup}(T(C))\leq T(\mathrm{Sup}(C))$.
8. Sea A una subcolección no vacía de $Top(X)$. Entonces $P(\mathrm{Inf}\,A)\leq \mathrm{Inf}\,P(A)$.
9. Si τ es generada por alguna función de pre-exteriorizantes, entonces $P(\tau)$ es la mínima función de pre-exteriorizantes que genera a τ.
10. Si $\mathcal{E}$ es una función de pre-exteriorizantes generada por alguna topología, entonces $T(\mathcal{E})$ es la máxima topología que genera a $\mathcal{E}$.
11. $TPT=T$ y $PTP=P$.
12. $PTPT=PT$ y $TPTP=TP$.
13. Para que $\mathcal{E}$ sea generada por alguna topología es necesario y suficiente que $P(T(\mathcal{E}))=\mathcal{E}$.
14. Para que τ sea generada por una función de pre-exteriorizantes es condición necesaria y suficiente que $T(P(\tau))=\tau$.
15. La función T es inyectiva si y solamente si P es sobreyectiva.
16. La función T es sobreyectiva si y solamente si P es inyectiva.

2.8 PROPOSICION

1. El mecanismo T no es inyectivo.
2. Existen funciones de pre-exteriorizantes generadas por ninguna topología.

DEMOSTRACION

1. Sea X un conjunto con más de dos elementos. Si a, b, c están en X, definimos una

función $\mathcal{E} : X \longrightarrow P(P(x))$ de pre-exteriorizantes así: $\mathcal{E}(x) = \}\phi\{$ si $x \neq b$ y $\mathcal{E}(b) = \}\phi,\}a\{\{$. Se cumple que $T(\mathcal{E}) = T(\mathcal{E}_0)$.

2. Se concluye de 1 y la proposición 2.7.15. ▲

2.9 PROPOSICION

Toda topología es generada por una función de pre-exteriorizantes. Esto es, el mecanismo T es sobreyectivo.

DEMOSTRACION

De la proposición 2.6.2 se tiene que $\tau \leqslant T(P(\tau))$.

De las definiciónes de P y T se deduce que $T(P(\tau)) \leqslant \tau$. ▲

2.10 PROPOSICION

El mecanismo P es inyectivo. Es decir, que topologías distintas generan distintas funciones de pre-exteriorizantes o que no hay topologías distintas que generen la misma función de pre-exteriorizantes.

DEMOSTRACION

Se concluye de las proposiciones 2.7.16 y 2.9. ▲

CONDICION [*E5*]

Si D es pre-exteriorizante de un punto x, entonces existe un subconjunto 0 de X que contiene a x y tal que C0 es pre-exteriorizante de cada uno de los puntos de 0 y C0 contiene a D. En símbolos,

$D \in \mathcal{E}(x) \Rightarrow (\exists 0 \subseteq X)\ [\,(\forall y \in 0)\ (C0 \in \mathcal{E}(y))$ y $x \in 0$ y $D \subseteq C0\,]$.

2.11 PROPOSICION

La función $P(\tau)$ satisface [*E5*].

DEMOSTRACION

Se concluye de las definiciones de P, T y de las proposiciones 2.2 y 2.9. ▲

2.12 PROPOSICION

Si $\mathcal{E}$ es una función de pre-exteriorizantes que satisface *E5*, entonces existe una topología τ sobre X, tal que $P(\tau) = \mathcal{E}$.

DEMOSTRACION

Por 2.6.1, $PT(\mathcal{E}) \leqslant \mathcal{E}$.

De la condición [*E5*] y de la proposición 2.2 y de las definiciones de P y T, se obtiene que $\mathcal{E} \leqslant PT(\mathcal{E})$. ▲

2.13 PROPOSICION

Para que una función de pre-exteriorizantes sea generada por alguna topología, es necesario y suficiente que satisfaga [*E5*]. En tal caso la topología es única.

DEMOSTRACION

Se deduce de las proposiciones 2.10, 2.11, 2.12. ▲

DEFINICION

Sea $\mathcal{E}$ una función de pre-exteriorizantes de X.

Se dice que $\mathcal{E}$ es una *función de exteriorizantes* si $\mathcal{E}$ satisface la condicion [*E5*].

Cuando $\mathcal{E}$ es una función de exteriorizantes y D está en $\mathcal{E}(x)$, se dice que D es *exteriorizante* de x.

2.14 TEOREMA

1. Toda topología es generada por sólo una función de exteriorizantes.
2. Toda función de exteriorizantes es generada por una única topología.

DEMOSTRACION

1. De las proposiciones 2.9 y 2.11 se concluye que toda topología τ es generada por la función de exteriorizantes $P(\tau)$.

   De 2.12, el recorrido de P es el conjunto de funciones de exteriorizantes. Entonces por la proposición 2.7.15, $P(\tau)$ es la única que genera a τ.
2. Se concluye de la proposición 2.13. ▲

Este teorema establece que existe una correspondencia biunívoca entre la colección de funciones de exteriorizantes de un conjunto y su colección de topologías.

2.15 PROPOSICION

Sea $\mathcal{E}$ una función de exteriorizantes sobre un conjunto X, D un subconjunto de X y x un punto de X.

1. De la noción de exteriorizante a la noción de abierto:

El conjunto D es abierto si C D es exteriorizante de todos los puntos de D.

2. De la noción de exteriorizante a la noción de cerrado:

   El conjunto D es cerrado si D es exteriorizante de todos los puntos de C D.

3. De la noción de exteriorizante a la noción de interior:

   El punto x es del interior de D si existe un subconjunto 0 de X, $0 \subseteq D$, tal que x está en 0 y C0 es exteriorizante de todos los puntos de 0.

4. De la noción de exteriorizante a la noción de adherencia:

   Que el punto x sea de la adherencia de D, significa que D no es exteriorizante de x.

5. De la noción de exteriorizante a la noción de exterior:

   El punto x es del exterior de D si D es exteriorizante de x.

6. De la noción de exteriorizante a la noción de vecindad:

   El conjunto D es vecindad de x, si existe un subconjunto 0 $0 \subseteq D$, tal que x está en 0 y C0 es exteriorizante de todos los puntos de 0.

7. De la noción de exteriorizante a la noción de función continua:

   Sea $f : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \tau')$ una función y sea x un punto de X.

   1. La función f es continua en x si y sólo si la imagen recíproca de cada conjunto exteriorizante de f(x), es exteriorizante de x.
   2. La función f es continua en X si y sólo si es continua en cada punto x de X.
   3. La función f es continua en x si y sólo si un conjunto D es exteriorizante de x, siempre que f(D) lo sea de f(x).

DEMOSTRACION

Las propiedades anteriores se obtienen considerando a X con la topología T(&). ▲

2.16 PROPOSICION

La condición [*E5*] es equivalente a la condición [*E5'*] siguiente:

[*E5'*] Si D es exteriorizante de x, entonces ad(D) [en (X, T(&)] es exteriorizante de x.

DEMOSTRACION

[*E5*] ⇒ [*E5'*]. Sea D en &(x). Por la proposición 2.13, existe una topología τ que genera a &. Como se cumple [*E5*], existe un conjunto cerrado (en τ) que contiene a D y que es exteriorizante de x. Por [*E3*], ad(D) también es exteriorizante de x.

[*E5'*] ⇒ [*E5*]. Sea D en &(x). Entonces ad(D) es de &(x). Por [*E2*], x no está en ad(D). Luego se cumplen las condiciones del consecuente de la condición [*E5*]. ▲

§3. EXTENSION DE LA FUNCION DE EXTERIOR

En [1], Bourbaki introduce la noción de vecindad de un conjunto (subconjunto de un conjunto X), como una función $V : P(X) \longrightarrow PP(X)$. Sin embargo, para construír la estructura topológica no utiliza la función V sino la función $v : X \longrightarrow PP(X)$, definida por $v(x) = V(\{x\})$.

Un tema de trabajo que surge de manera natural es el de realizar una construcción análoga a la hecha por Bourbaki, para lograr una extensión de las nociones topológicas, utilizando como concepto primitivo la noción de vecindad V, logrando extensiones de las nociones de interior, adherencia, exterior, frontera, continuidad ...

En esta sección se va a realizar tal construcción tomando como concepto primitivo la función de exterior extendida.

DEFINICION

Sea X un conjunto no vacío. Una función $E : P(X) \longrightarrow P(P(X))$ se llama *de pre-Exterior* si cumple las siguientes propiedades, donde D, G y H son subconjuntos de X.

E1A. $E(\phi) = P(X)$.

E1B. $\phi \in E(X)$.

E2. Si $D \in E(G)$ y $H \subseteq D$, entonces $H \in E(G)$.

E3. $E(D) \cap E(H) = E(D \cup H)$.

E4. Sea $\{D_i : i \in I\}$ una colección no vacía de subconjuntos de X. Si $D_i \in E(G)$ para todo i en I, entonces $\cup\{D_i : i \in I\} \in E(G)$.

Dado G subconjunto de X, la propiedad *E2* dice que la colección E(G) es cerrada para subconjuntos y la propiedad *E4* significa que la colección E(G) es cerrada para uniones cualesquiera.

3.1 PROPOSICION

Una función de Pre-Exterior E sobre un conjunto X verifica las siguientes condiciones, donde D, G y H son subconjuntos de X.

1. Si $D \subseteq G$, entonces $E(G) \subseteq E(D)$.
2. $E(X) \subseteq E(D)$.
3. $\phi \in E(D)$.
4. $E(D) \cup \{X\} \in Top(X)$.
5. Si para todo x de D, $\{x\} \in E(CD)$, entonces $D \in E(CD)$.

6. $\cup E(D) \in E(D)$.
7. $\}D : D \in E(CD)\{ \in Top(X)$.

DEMOSTRACION

1. Se concluye por [*E3*].
2. Se obtiene de 1).
3. Se deduce de [*E1B*] y 2).
4. Se deriva de 3), [*E2*] y [*E4*].
5. Se obtiene de [*E4*].
6. Se concluye de [*E4*].
7. Sea $T_E = \}D : D \in E(CD)\{$.
   De [*E1A*], $X \in T_E$. De [*E1B*], $\phi \in T_E$.
   Si D y G está en T_E, por [*E3*] y [*E2*], $D \cap G$ está en T_E.
   Si $\}D_i : i \in I\{$ es una familia de elementos de T_E, por 1) y [*E4*], $\cup\}D_i : i \in I\{$.

DEFINICION

A la topología T_E de la proposición 3.1.7 se le llama *la topología generada por la función de Pre-Exterior* E, o *la topología asociada a la función de Pre-Exterior* E.

Se denota PrE(X) a la colección de funciones de Pre-Exterior sobre X.

DEFINICION

Sean E y E' funciones de Pre-Exterior. Se dice que *E es menos fina que E'* y se denota $E \leqslant E'$, si $E(D) \subseteq E'(D)$, para todo D contenido en X.

La relación $\leqslant$ define un orden en PrE(X).

La función $E^0 : P(X) \longrightarrow P(P(X))$ definida por $E^0(D) = P(X)$, es el máximo de $(PrE(X), \leqslant)$. Además, la función E_0 dada por $E_0(D) = \}\phi\{$, si $D \neq \phi$ y $E_0(\phi) = P(X)$, es el mínimo de $(PrE(X), \leqslant)$.

3.2 PROPOSICION

Sea C una sub-colección no vacía de PrE(X). La función $C_0 : P(X) \longrightarrow P(P(X))$ que cada subconjunto D de X le asigna el conjunto $\cap\}E(D) : E \in C\{$, es una función de Pre-Exterior en X, y $C_0 = \mathrm{Inf}\, C$.

DEMOSTRACION

Las propiedades [*E1A*], [*E1B*], [*E2*] y [*E4*] se concluyen de la definición de C_0.
Por 3.1.1 y la definición de C_0, si D y G son subconjuntos de X, entonces
$C_0(D \cup G) \subseteq C_0(D) \cap C_0(G)$.
De la definición de C_0, se obtiene que $C_0(D) \cap C_0(G) \subseteq C_0(D \cup G)$.
Por la definición de C_0 se concluye que $C_0 = \operatorname{Inf} C$.

Puesto que el conjunto $(PrE(X), \leqslant)$ tiene máximo y toda subcolección no vacía tiene ínfimo, entonces toda subcolección no vacía C tiene supremo ([4]).
Puede pensarse que el extremo superior de C está dado por $C^0(D) = \cup \rbrace E(D) : E \in C \lbrace$. Sin embargo, el siguiente ejemplo muestra que ésto no siempre se cumple.

EJEMPLO

Sea $X = \rbrace a, b, c \lbrace$. Se considera $\mathcal{E} = \rbrace E_1, E_2 \lbrace$ donde $E_1 : P(X) \longrightarrow P(P(X))$ está definida por $E_1(D) = P(CD)$ si $a \notin D$ y $E_1(D) = \rbrace \phi \lbrace$ si $a \in D$. Y $E_2 : P(X) \longrightarrow P(P(X))$ está definida por $E_2(D) = P(CD)$ si $b \notin D$ y $E_2(D) = \rbrace \phi \lbrace$ si $b \in D$.
Se cumple que E_1 y E_2 son funciones de Pre-Exterior.
La función $C^0 : P(X) \longrightarrow P(P(X))$ definida por $C^0(D) = E_1(D) \cup E_2(D)$, no es una función de Pre-Exterior porque no se cumple [*E3*], ya que $C^0(\rbrace a \lbrace) \cap C^0(\rbrace b \lbrace) = \rbrace \phi, c \lbrace$ y $C^0(\rbrace a \lbrace \cup \rbrace b \lbrace) = C^0(\rbrace a, b \lbrace) = \rbrace \phi \lbrace$.

DEFINICION

Se define la función $T : PrE(X) \longrightarrow Top(X)$ afirmando que a cada función E de Pre-Exterior le hace corresponder T_E. ($T_E = \rbrace D : D \in E(CD) \lbrace$).

Se observa que $T(E^0) = P(X)$ y $T(E_0) = \rbrace \phi, X \lbrace$.

3.3 PROPOSICION

El mecanismo $T : PrE(X) \longrightarrow Top(X)$ es un morfismo de conjuntos ordenados. Es decir, si $E \leqslant E'$, entonces $T(E) \leqslant T(E')$.

DEMOSTRACION

Se concluye de la definición de T. ▲

3.4 PROPOSICION

Sea (X, τ) un espacio topológico. La aplicación E que a cada D subconjunto de X le asigna $P(\text{int}(C\,D))$, es una función de Pre-Exterior que se denota E_τ.

DEMOSTRACION

Se concluye de la definición de E_τ. ▲

DEFINICION

A la función de Pre-Exterior E_τ (V.3.4) se la llama la *función de Pre-Exterior generada por* τ o la *función de Pre-Exterior asociada a la topología* τ.

DEFINICION

Se define la función $P : Top(X) \longrightarrow PrE(X)$ afirmando que a cada topología τ le hace corresponder la función de Pre-Exterior E_τ.

Se observa que $P(\{\phi, X\}) = E_0$ y $P(P(X)) = E_d$ donde $E_d(D) = P(CD)$. En general, $P(P(X)) \neq E^0$.

3.5 PROPOSICION

El mecanismo $P : Top(X) \longrightarrow PrE(X)$ es un morfismo de conjuntos ordenados. O sea, si $\tau \leqslant \tau'$, entonces $P(\tau) \leqslant P(\tau')$.

DEMOSTRACION

Se concluye de la definición de P. ▲

3.6 PROPOSICION

Si E es una función de Pre-Exterior y τ es una topología sobre X, se tiene que

1. $P(T(E)) \leqslant E$.
2. $\tau \leqslant T(P(\tau))$.

DEMOSTRACION

1. Se deduce de las definiciones de P y T y de las Propiedades [*E2*] y 3.1.1.
2. Se concluye de las definiciones de P y T, teniendo en cuenta que el interior de un conjunto es un abierto. ▲

DEFINICION

Puesto que $(PrE(X), \leqslant)$ y $(Top(X), \leqslant)$ son conjuntos ordenados y los mecanismos P y T son morfismos, y además se verifican las condiciones de las propiedades 3.6, entonces se dice que el mecanismo P es *adjunto a izquierda* del mecanismo T ([4]).

3.7 PROPOSICION

Como consecuencia de que P es adjunto a izquierda de T se cumplen las siguientes propiedades ([4], [5]):

1. Si $P(\tau) \leq E$, entonces $\tau \leq T(E)$.
2. Si $\tau \leq T(E)$, entonces $P(\tau) \leq E$.
3. El conjunto $\{E \in PrE(X) : T(E) \geq \tau\}$ tiene mínimo.
4. El conjunto $\{\tau \in Top(X) : P(\tau) \leq E\}$ tiene máximo.
5. Sea C una subcolección no vacía de PrE(X). Entonces $T(\operatorname{Inf} C) = \operatorname{Inf}(T(C))$.
6. Sea A una subcolección no vacía de Top(X). Entonces $P(\operatorname{Sup} A) = \operatorname{Sup}(P(A))$.
7. Sea C una subcolección no vacía de PrE(X). Entonces $\operatorname{Sup} T(C) \leq T(\operatorname{Sup}(C))$.
8. Sea A una subcolección no vacía de Top(X). Entonces $P(\operatorname{Inf} A) \leq \operatorname{Inf}(P(A))$.
9. Si τ es generada por alguna función de Pre-Exterior, entonces $P(\tau)$ es la mínima función de Pre-Exterior que genera a τ
10. Si E es una función de Pre-Exterior generada por alguna topología, entonces T(E) es la máxima topología que genera a E.
11. $TPT = T$ y $PTP = P$.
12. $PTPT = PT$ y $TPTP = TP$.
13. Para que E sea generada por alguna topología es necesario y suficiente que $PT(E) = E$.
14. Para que τ sea generada por una función de Pre-Exterior, es condición necesaria y suficiente que $TP(\tau) = \tau$.
15. La función T es inyectiva si y solamente si P es sobreyectiva.
16. La función T es sobreyectiva si y solamente si P es inyectiva.

3.8 PROPOSICION

1. El mecanismo T no es inyectivo.
2. Existen funciones de Pre-Exterior que son generadas por ninguna topología.

DEMOSTRACION

1. Si X tiene más de un elemento, $E_d \neq E^0$ y $T(E_d) = T(E^0) = \mathcal{P}(X)$.
2. Es consecuencia de 1) y 3.7.15. ▲

3.9 PROPOSICION

Toda topología es generada por una función de Pre-Exterior, ya que $\tau = T(P(\tau))$.

DEMOSTRACION

Se concluye de 3.6.2 y de las definiciones de P y T. ▲

3.10 PROPOSICION

El mecanismo P es inyectivo. Esto es, no hay dos topologías distintas que generen la misma función de Pre-Exterior.

DEMOSTRACION

Se concluye de las proposiciones 3.9 y 3.7.16. ▲

CONDICION *E5*.

Si D está en E(G), entonces D está contenido en CG.

CONDICION *E6*.

Si D está en E(G), entonces existe H tal que H está contenido en CG, H está en E(CH) y D está en E(CH).

3.11 PROPOSICION

Una función P(τ) satisface las condiciones [*E5*] y [*E6*].

DEMOSTRACION

La condición [*E5*] se concluye de la definición de P.
De la definición de P, usando propiedades de interior y [*E2*] se obtiene [*E6*]. ▲

3.12 PROPOSICION

Si E es una función de Pre-Exterior que satisface [*E5*] y [*E6*], entonces E es generada por alguna topología.

DEMOSTRACION

Sea τ = T(E). Basta ver que si E verifica las condiciones [*E5*] y [*E6*], entonces E $\leqslant$ PT(E), puesto que la otra desigualdad se tiene por 3.6.1.
Si H está en E(G), por [*E5*] y [*E6*] y las definiciones de P y T se tiene que H está en PTE(G). ▲

3.13 PROPOSICION

Para que una función de Pre-Exterior sea generada por alguna topología, es necesario y suficiente que cumpla [*E5*] y [*E6*]. En tal caso la topología es única.

DEMOSTRACION

Es consecuencia de las proposiciones 3.10, 3.11 y 3.12. ▲

DEFINICION

Sea E una función de Pre-Exterior en X. Se dice que E es una *función de Exterior* si E satisface [*E5*] y [*E6*].

3.14 TEOREMA

1. Toda topología es generada por sólo una función de Exterior.
2. Toda función de Exterior es generada por una única topología.

De lo anterior se deduce que existe una correspondencia biunívoca entre la colección de funciones de Exterior sobre un conjunto y su colección de topologías.

DEMOSTRACION

Se deduce de 3.9, 3.11 y 3.7.9. ▲

EXTENSION DE LA ESTRUCTURA TOPOLOGICA

Una función $E : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ de Exterior determina, entre otras, las funciones CE, EC, CEC que tienen por dominio al conjunto $\mathcal{P}(X)$ y por codominio a $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$. Las propiedades básicas de estas funciones se obtienen fácilmente de las correspondientes propiedades básicas de E.

LA FUNCION DE ADHERENCIA EXTENDIDA

Se define la función de Adherencia $A : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ con la relación $A(D) = CE(D)$. Esta función cumple las siguientes propiedades, donde H, D, D_i, G son subconjuntos de X:

A1 A. $A(\phi) = \phi$.

A1 B. $\phi \notin A(X)$.

A2. La colección A(G) es cerrada para super conjuntos.
Esto es,
Si $H \in A(G)$ y $H \subseteq D$, entonces $D \in A(G)$.

A3. $A(D \cup H) = A(D) \cup A(H)$.

A4. Si $\cup \}D_i : i \in I\{ \in A(G)$, entonces $\exists_i \in I$, $D_i \in A(G)$.

A5. Si $D \cap G \neq \phi$., entonces $D \in A(G)$.

A6. Si $\forall H$, $(G \subseteq H$ y $CH \notin A(H) \Rightarrow D \in A(H))$, entonces $D \in A(G)$.

■ $D \in T_E \Longleftrightarrow D \notin A(CD)$.

LA FUNCION INTERIOR EXTENDIDA

Se define la función de Interior $I : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ con la relación $I(D) = E(CD)$.

Esta función cumple las siguientes propiedades, donde H, D, D_i, G son subconjuntos de X.

I1.A. $I(X) = P(X)$.

I1.B. $\phi \in I(\phi)$.

I2. La colección $I(G)$ es cerrada para subconjuntos. Esto es,
Si $D \in I(G)$ y $H \subseteq D$, entonces $H \in I(G)$.

I3. $I(D \cap H) = I(D) \cap I(H)$.

I4. La colección $I(G)$ es cerrada para uniones arbitrarias. Esto es,
Si $(\forall_i \in I)(D_i \in I(G))$, entonces $\cup \{D_i : i \in I\} \in I(G)$.

I5. Si $D \in I(G)$, entonces $D \subseteq G$.

I6. Si $D \in I(G)$, entonces $(\exists H \subseteq G)(H \in I(H)$ y $D \in I(H))$.

■ $D \in T_E \iff D \in I(D)$.

LA FUNCION J

Se define la función $J : P(X) \longrightarrow P(P(X))$ con la relación $J(D) = C\,E(C\,D)$. Esta función cumple las siguientes propiedades, donde H, D, D_i, G son subconjuntos de X.

J1A. $J(X) = \phi$.

J1B. $\phi \notin J(\phi)$.

J2. La colección $J(G)$ es cerrada para superconjuntos. Esto es,
Si $H \in J(G)$ y $H \subseteq D$, entonces $D \in J(G)$.

J3. $J(D \cap G) = J(D) \cup J(G)$.

J4. Si $\cup \{D_i : i \in I\} \in J(G)$, entonces $(\exists\, i \in I)(D_i \in J(G))$.

J5. Si $D \nsubseteq G$, entonces $D \in J(G)$.

J6. Si $(\forall H)(H \subseteq G$ y $H \notin J(H) \Rightarrow D \in J(H))$, entonces $D \in J(G)$.

■ $D \in T_E \iff D \notin J(D)$.

★

RELACION ENTRE UNA FUNCION DE EXTERIOR Y SU EXTENSION

3.15 PROPOSICION

Toda función de exterior e genera una función de Exterior E.

DEMOSTRACION

Sea $E : P(X) \longrightarrow P(P(X))$ la función que a cada conjunto D, contenido en X, hace corresponder $P(e(D))$.

La función E es una función de Exterior :

E1A. Se concluye de [e1].

E1B, E2, E4. Se obtienen de la definición de E.

E3. Se concluye de [e3] y la definición de E.

E5. Se concluye por [e2].

E6. Se concluye que [e2] y [e4]. ▲

3.16 PROPOSICION

La función de exterior e y su correspondiente función de Exterior E generanla misma topología.

DEMOSTRACION

Sean T_e la topología generada por e y T_E la topología generada por E.

Si D está en T_E, por 3.1.7, 3.15 y e2, D está en T_e.

Si D está en T_e, por 3.1.7 y 3.15, D está en T_E.

3.17 PROPOSICION

La topología generada por una función de Exterior E, que ha sido generada por una función de exterior e, genera a e.

DEMOSTRACION

Sean τ la topología generada por E y e_τ la función de exterior generada por τ.

Si x está en $e_\tau(D)$, existe V en τ que contiene a x y está contenido en CD. Por 3.15 y 1.1.6, x está en e(D).

Si x está en e(D), por [e2], 1.3.1 y 3.16, x está en $e_\tau(D)$.

3.18 PROPOSICION

Toda función de Exterior E sobre un conjunto X genera una función de exterior e.

DEMOSTRACION

La función $e : P(X) \longrightarrow P(X)$ que a cada subconjunto D, de X, hace corresponder el conjunto $\cup \} H \mid H \in E(D) \{$ cumple las siguientes propiedades:

e1. Se deduce de [E1A].

e2. Se deduce de [E5].

e3. Por 3.1.1., $e(D \cup G) \subseteq e(D) \cap e(G)$.

Si x está en e(D) y en e(G), por [E2], [E3] y la definición de e, x está en $e(D \cup G)$.

e4. Sea x en e(G). Debe verse que x está en el conjunto $E(\cap\{CK : K \in E(G)\})$. Lo cual se logra utilizando [E6] y 3.1.1. ▲

3.19 PROPOSICION

Existe una correspondencia biunívoca entre la colección de funciones e de exterior sobre un conjunto X y la correspondiente colección de funciones E de Exterior.

DEMOSTRACION

La proposición es una consecuencia de 3.15, 3.18 y de las siguientes dos propiedades de verificación inmediata.

- Si e es la función de exterior asociada a la función de Exterior E y si E' es la función de Exterior relativa a e, entonces las funciones E y E' coinciden.
- Si E es la función de Exterior asociada a la función de exterior e y si e' es la función de exterior relativa a E, entonces las funciones e y e' coinciden. ▲

3.20 PROPOSICION

Si e es una función de exterior generada por una función de Exterior E y τ es la topología generada por e, la función de Exterior generada por τ es E.

DEMOSTRACION

Es una consecuencia de 3.17 y 3.19. ▲

3.21 PROPOSICION

La función de Exterior E y la función de exterior e generada por E, generan la misma topología.

DEMOSTRACION

Es una consecuencia de 3.16 y 3.19. ▲

3.22 PROPOSICION

Las funciones de Exterior E y de exterior e, asociadas a una topología τ, se generan mutuamente.

DEMOSTRACION

Es consecuencia de las Proposiciones 1.4, 3.14, 3.17 y 3.20. ▲

§4. EXTENSION DE LA NOCION DE EXTERIORIZANTE

Una función de Exterior E : $P(X) \longrightarrow P(P(X))$ define una relación R en el conjunto $P(X) \times P(X)$ de la siguiente manera: que $(D, G) \in R$ significa que $G \in E(D)$.
Esta relación determina la función "corte vertical" que a cada subconjunto D de X, le hace corresponder la colección $\}G : G \in E(D)\{$, la cual es igual a E(D). Es decir, la función "corte vertical" coincide con la función E inicial.
La relación R también determina la función E, "corte horizontal de R", que a cada subconjunto G de X, le asocia la colección $\}D : G \in E(D)\{$.

En esta sección se estudia la noción de Exteriorizante correspondiente al corte horizontal de la relación asociada a una función de Exterior E. Y se demuestra que existe una correspondencia biunívoca entre las topologías sobre un conjunto X y su correspondiente colección de funciones de Exteriorizantes. También se comprueba que la noción de Exteriorizante aquí obtenida, es una extensión de la noción de exteriorizante estudiada en la sección §2.

DEFINICION

Sea X un conjunto con más de un elemento y $E : P(X) \longrightarrow P(P(X))$ una función. La aplicación E se llama *función de Exteriorizantes* si cumple las siguientes condiciones.

E1A. El conjunto ϕ es Exteriorizante de cada subconjunto de X.

E1B. X está en $E(\phi)$.

E2. Si $D \subseteq G$, entonces $E(G) \subseteq E(D)$.

E3. Si $D \in E(H)$ y $G \subseteq D$, entonces $G \in E(H)$.

E4. Si $D \in E(H)$ y $G \in E(H)$, entonces $D \cup G \in E(H)$.

E5. Sea $\}G_i : i \in I\{$ una colección de subconjuntos de X.
Si $D \in E(G_i)$, para todo i en I, entonces $D \in E(\cup \}G_i : i \in I\{)$.

E6. Si $G \in E(D)$, entonces $D \cap G = \phi$.

E7. Si $G \in E(D)$, entonces existe un subconjunto H, superconjunto de G, tal que $H \in E(CH)$ y $H \in E(D)$.

4.1 CONSECUENCIAS

Se observa que una función E de Exteriorizantes también cumple las siguientes propiedades, que son consecuencias inmediatas de las condiciones anteriores:

1. Para todo subconjunto D de X, $E(X) \subseteq E(D)$ y $E(D) \subseteq E(\phi)$.
2. $E(\phi) = P(X)$.

3. Si $CG \in E(G)$, entonces la colección $\{D \mid CG \in E(D)\}$ es una topología sobre G.

4. Si para todo x de D, $CD \in E(\{x\})$, entonces $CD \in E(D)$.

5. Dado D un subconjunto de X, D está en $E(\cup \{H : D \in E(H)\})$.

6. Si $D \cup H \in E(G)$, entonces $D \in E(G)$ y $H \in E(G)$.

Se denota $Ext(X)$ a la colección de funciones de Exteriorizantes sobre un conjunto X.

4.2 PROPOSICION

Sea E una función de Exteriorizantes en X. La colección τ de los subconjuntos D de X, tales que $CD \in E(D)$ es una topología sobre X. Esto es,

$T(E) = \{D : CD \in E(D)\} \in Top(X)$.

DEMOSTRACION

Por [E1B], $\phi \in T(E)$.

Por [E1A], $X \in T(E)$.

Si $D \in T(E)$ y $G \in T(E)$, por la definición de $T(E)$ y las propiedades [E2] y [E4], se deduce que $D \cap G \in T(E)$.

Si $D_i \in T(E)$ para todo i en I, por la definición de $T(E)$ y las propiedades [E3] y [E5], se obtiene que $\cup\{D_i : i \in I\} \in T(E)$. ▲

DEFINICION

Se define la función $T : Ext(X) \longrightarrow Top(X)$ afirmando que a cada función de Exteriorizantes E le hace corresponder la colección de subconjuntos D de X, denotada por $T(E)$, tales que $CD \in E(D)$.

4.3 PROPOSICION

Sea (X, τ) un espacio topológico. La aplicación $E_\tau : P(X) \longrightarrow P(P(X))$ a cada subconjunto D de X hace corresponder la colección de subconjuntos H de X tales que D está contenido en e(H), es una función de Exteriorizantes de X.

DEMOSTRACION

Las propiedades [E1.A], [E1 B], [E2], [E3] se derivan de la definición de E_τ y de propiedades de la función e.

La propiedad [E4] se obtiene de la definición de E_τ y de la propiedad [e3].

Las propiedades [E5], [E6], [E7] se deducen de la definición de E_τ y de propiedades de la función de exterior e.

DEFINICION

Se define la función $P : Top(X) \longrightarrow \mathcal{E}xt(X)$, afirmando que a cada topología τ le hace corresponder la función de Exteriorizantes E_τ, donde H es de $E_\tau(D)$ si D está contenido en e(H).

Se observa que pueden presentarse las definiciones correspondientes para poder demostrar que la función P es adjunta a izquierda de la función T, para proceder de manera análoga a lo realizado en las secciones §2 y §3.

4.4 PROPOSICION

Toda topología es generada por una función de Exteriorizantes.

DEMOSTRACION

Si τ es una topología, entonces E_τ es una función de Exteriorizantes y $T(E_\tau)$ es una topología. Que el subconjunto V está en $T(E_\tau)$, es equivalente a que V está en τ. Esto se tiene por las definiciones de T y P, y el hecho de que un conjunto H es abierto si y sólo si $H = e(CH)$. Luego $\tau = T(E_\tau)$. ▲

4.5 PROPOSICION

Toda función de Exteriorizantes es generada por una topología.

DEMOSTRACION

Si E es una función de Exteriorizantes, entonces $\tau = T(E)$ es una topología y E_τ es una función de Exteriorizantes.

Si H está en $E_\tau(D)$, de la definición de E_τ, teniendo en cuenta que el exterior de un conjunto es abierto,y por las propiedades $[E2]$ y $[E3]$, entonces H está en $E(D)$.

Si H está en E(D), por las propiedades $[E6]$, $[E7]$, $[e2]$ se tiene que H está en E_τ (D). ▲

4.6 TEOREMA

Existe una correspondencia biunívoca entre las topologías sobre un conjunto X y su correspondiente colección de funciones de Exteriorizantes $\mathcal{E}xt(X)$.

DEMOSTRACION

Se obtiene de las proposiciones 4.4 y 4.5 . ▲

4.7 PROPOSICION

Sean : e una función de exterior sobre un conjunto X;

E la función de Exterior asociada a e;

E la función de Exteriorizantes relativa a E;

$\mathscr{E}$ la función de exteriorizantes relativa a e;

D, H subconjuntos de X;

x un punto de X.

Se verifican las siguientes condiciones:

1. $\mathrm{H} \in E(\mathrm{D}) \iff \mathrm{D} \subseteq \mathrm{e}(\mathrm{H})$.
2. $E(\}x\{) = \mathscr{E}(x)$.
3. $E(\mathrm{D}) = \cap \}\mathscr{E}(x) : x \in \mathrm{D}\{$.

DEMOSTRACION

1. Es consecuencia de las definiciones de E y E.

2, 3. Se obtienen de 1) y de las definiciones de E y $\mathscr{E}$. ▲

La proposición anterior señala que la noción de Exteriorizante $E : \mathcal{P}(\mathrm{X}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathrm{X}))$ es una extensión de la noción de exteriorizante $\mathscr{E} : \mathrm{X} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathrm{X}))$.

RESUMEN DE CONDICIONES

Sean D, G, H, D_i subconjuntos de un conjunto X.

1. Una función $e : P(X) \longrightarrow P(X)$ se llama de exterior si cumple las siguientes condiciones:

   e1. $e(\phi) = X$.

   e2. $e(D) \subseteq CD$.

   e3. $e(D \cup G) = e(D) \cap e(G)$.

   e4. $e(D) \subseteq e(Ce(D))$.

2. Una función $\& : X \longrightarrow P(P(X))$ se llama de exteriorizantes si cumple las siguientes condiciones:

   &1. $\forall x,\ \phi \in \&(x)$.

   &2. $\forall x,\ x \in D \Rightarrow D \notin \&(x)$.

   &3. Si $D \subseteq G$ y $G \in \&(x)$, entonces $D \in \&(x)$.

   &4. Si $D \in \&(x)$ y $G \in \&(x)$, entonces $(D \cup G) \in \&(x)$.

   &5. $D \in \&(x) \Rightarrow (\exists 0 \subseteq X)\ [(\forall y \in 0)(C0 \in \&(y))$ y $x \in D$ y $D \subseteq C0]$.

3. Una función $E : P(X) \longrightarrow P(P(X))$ se llama de Exterior si cumple las siguientes condiciones:

   E1A. $E(\phi) = P(X)$.

   E1B. $\phi \in E(X)$.

   E2. Si $D \in E(G)$ y $H \subseteq D$, entonces $H \in E(G)$.

   E3. $E(D) \cap E(H) = E(D \cup H)$.

   E4. Si $(\forall_i \in I)\ (D_i \in E(G))$, entonces $\cup \{D_i : i \in I\} \in E(G)$.

   E5. Si $D \in E(G)$, entonces $D \subseteq CG$.

   E6. $D \in E(G) \Rightarrow (\exists H)(G \subseteq H$ y $CH \in E(H)$ y $D \in E(H))$.

4. Una función $\mathcal{E} : P(X) \longrightarrow P(P(X))$ se llama de Exteriorizantes si cumple las siguientes condiciones:

   $\mathcal{E}$1A. $\forall D \subseteq X,\ \phi \in \mathcal{E}(D)$.

   $\mathcal{E}$1B. $X \in \mathcal{E}(\phi)$.

   $\mathcal{E}$2. Si $D \subseteq G$, entonces $\mathcal{E}(G) \subseteq \mathcal{E}(D)$.

   $\mathcal{E}$3. Si $D \in \mathcal{E}(H)$ y $G \subseteq D$, entonces $G \in \mathcal{E}(H)$.

   $\mathcal{E}$4. Si $D \in \mathcal{E}(H)$ y $G \in \mathcal{E}(H)$, entonces $(D \cup G) \in \mathcal{E}(H)$.

E5. Si $\forall_i \in I$, $D \in E(G_i)$, entonces $D \in E(\cup\}G_i : i \in I\{)$.

E6. Si $G \in E(D)$, entonces $D \cap G = \phi$.

E7. Si $G \in E(D)$, entonces $(\exists H)(G \subseteq H$ y $H \in E(CH)$ y $H \in E(D))$.

1A. Topología asociada a una función e :

$\zeta_e = \}D : D = e(CD)\{$.

2A. Topología asociada a una función $\mathcal{E}$:

$T(\mathcal{E}) = \}V : (\forall x)(x \in V \Rightarrow CV \in \mathcal{E}(x))\{$.

Función $\mathcal{E}$ asociada a una topología :

$W \in \mathcal{E}_\zeta(x) \Longleftrightarrow (\exists V \in \zeta)(x \in V$ y $V \cap W = \phi)$.

3A. Topología asociada a una función E :

$T_E = \}D : D \in E(CD)\{$.

Función E asociada a una topología:

$E_\zeta(D) = P(\mathrm{int}(CD))$.

4A. Topología asociada a una función E:

$T_E = \}D : C(D) \in E(D)\{$.

Función E asociada a una topología :

$E(H) = P(e(H))$.

BIBLIOGRAFIA

[1] Bourbaki Nicolas: Topologie Générale, Livre III. Hermann,Paris (1961).

[2] García M. M. et alt.: Topología, Tomo 1. Madrid, Ed. Alhambra (1975).

[3] Guasgüita R. Jairo: Conceptos topológicos relativos a la noción de borde. Tesis dirigida por Manuel Suárez M., UPN., Bogotá (1986).

[4] Ruiz S. Carlos: Topología o Convergencia, Fascículo 1. UPTC, Tunja (1975).

[5] Ruiz S. Carlos, Suárez M. Manuel: Topología o Convergencia, Fascículo 2. UPTC, Tunja (1980).

[6] Ruiz S. Carlos, Suárez M. Manuel: Elementos de Topología, Cuaderno 2. VI Coloquio Colombiano de Matemáticas,Bogotá (1976).