Revista INTEGRACION
Departamento de Matemáticas UIS
Vol. 6, No. 2, julio-diciembre 1988

Movimiento de la población con fluctuantes pseudoaleatorias en la tasa de crecimiento

YU TAKEUCHI *

0. INTRODUCCION

Denotemos por X_n el tamaño de la población de un país al cabo de n años (o días, siglos, etc.) después de haber efectuado el primer censo (n = 1); entonces la sucesión $(X_n) = X_1, X_2, X_3, \dots)$ representa el estado de la población a través del tiempo. si a_n es la tasa de crecimiento de la población (tasa de natalidad menos tasa de mortalidad) en la unidad de tiempo en el año n , entonces tenemos

$$X_{n+1} = (1 + a_n) \cdot X_n \qquad (n = 1,2,3, \dots): \tag{1}$$

luego

$$X_{n+1} = \prod_{k=1}^{n} (1 + a_k) . \; X_1 . \tag{2}$$

* Profesor Titular, Universidad Nacional de Colombia

Como un caso especial, si suponemos que $a_n = 0$ para todo n, entonces

$$X_n = X_1 \text{ (para todo } n = 1,2,3, \ldots) , \tag{3}$$

o sea que la población se mantiene constante cuando la tasa de crecimiento de la población *es cero en cualquier momento* (situación trivial).

¿Cómo se comportará el tamaño X_n de la población si a_n es *"cero en promedio"* o sea, si se presenta una cierta *fluctuación, aleatoria* de los valores de a_n alrededor de su valor medio 0? El resultado es bastante sorprendente: la población se extingue al cabo de un tiempo suficientemente largo, o sea

$$\lim_{n \to \infty} X_n = 0 . \quad \blacksquare \tag{4}$$

1. NUMEROS ALEATORIOS Y NUMEROS PSEUDO ALEATORIOS

En las calculadoras se obtienen "los números aleatorios", produciendo una sucesión (c_n) de elementos reales entre 0 y 1 de tal manera que cada término c_n es *"supuestamente" independiente* de los términos ya producidos c_1 , c_2 , ... , c_{n-1} (esto es, no existe ninguna regla que relacione c_n con los términos anteriores). En consecuencia, estos números aleatorios están distribuidos *"uniformemente"* entre 0 y 1, o sea, la probabilidad de que estos números aparezcan en cualquier posición entre 0 y 1 sería "uniforme". Más precisamente, dado un intervalo $[a, b] \subset [0, 1]$, la probabilidad de que estos números estén en ese intervalo $[a, b]$ sería igual a la longitud $b-a$ del intervalo. Al observar *los primeros* n *números* $c_1, c_2, \dots, c_n$, los que están en el intervalo $[a, b]$ son

$$\{ c_1 , c_2 , \dots , c_n \} \cap [a, b] ;$$

luego, la probabilidad de que cada número caiga en el intervalo $[a, b]$ es igual a

$$\frac{1}{n} \cdot \# (\{ c_1 , c_2 , \dots , c_n \} \cap [a, b) ; \qquad \text{(Nota*)}$$

por lo tanto, la *distribución uniforme* de los números aleatorios $c_1 , c_2 , c_3 , \dots$ puede formularse como sigue:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \cdot \# (\{ c_1 , c_2 , \dots , c_n \} \cap [a, b]) = b-a . \blacksquare \qquad (5)$$

Dada una sucesión (c_n) de elementos reales entre 0 y 1, los números $c_1 , c_2 , c_3 , \dots$ *no son necesariamente aleatorios*, aunque satisfagan la condición (5); con la condición (5) decimos que los números $c_1 , c_2 , c_3 , \dots$ son "pseudoaleatorios" entre 0 y 1 (más precisamente, "pseudoaleatorios" de distribución uniforme entre 0 y 1).

---

* Nota: $\# (\{ c_1 , c_2 , \dots , c_n\} \cap [a, b)$ es *"el número de elementos"* (o la *cardinalidad*) del conjunto finito $\{c_1 , c_2 , \dots , c_n \} \cap [a, b]$.

Observación 1. Los números "verdaderamente" aleatorios son escasos, ya que esos números son producidos siempre por *algún mecnismo*, a pesar de que nosotros *lo desconocemos por ignorancia"*, tales como los producidos por las computadoras. Más bien, no existen los números verdaderamente aleatorios, ¡ya que Dios está manipulando siempre para producirlos! ■

Observación 2. Si c_1 , c_2 , c_3 , ... son pseudoaleatorios entre 0 y 1 , entonces la convergencia en (1) es *"uniforme"* con respecto al intervalo [a, b]: esto es, dado $\varepsilon > 0$ cualquiera, existe N_o, *"independiente"* de a y de b, tal que

$$\left| \frac{1}{n} \cdot \# (\{ c_1 , c_2 , \ldots , c_n \} \cap [a,b] - (b-a) \right| < \varepsilon \qquad (5')$$

para "todo" $n > N_o$.

Demostración:

Como $[a,b] = [0,b] - [0, a)$, entonces basta demostrarlo para el caso de $a=0$. Sea

$$h_n(x) = \frac{1}{n} , \# (\{ c_1 , c_2 , \ldots , c_n \} \cap [0,x) ;$$

entonces, de (5) tenemos que

$$\lim_{n \to \infty} h_n(x) = h(x) = x \qquad \text{para cada} \quad x \in [0,1] .$$

Además, si $x < x'$ entonces, evidentemente, tenemos que para cada n

$$h_n(x) \leq h_n(x') \quad ,$$

esto es, $h_n(x)$ es una función *creciente* con respecto a n; además su función límite h es la *función "idéntica"* que es continua en el intervalo $[\ 0,1\ ]$. Por lo tanto, la convergencia $h_n \to h$ es "uniforme". (Ver, por ejemplo, [1], Tomo II, ejercicio 197) .

El siguiente teorema nos ofrece un ejemplo importante de los números pseudoaleatorios, pero "no aleatorios".

Teorema 1. Dado un número *irracional* c, sea

c_n = la parte fraccionaria de $n.c$ $(n = 1,2,3, \ldots)$;

entonces los números c_1 , c_2 , c_3 , ... son pseudoaleatorios entre 0 y 1 ●

En la demostración del teorema 1 vamos a emplear las siguientes abreviaciones:

Denotemos por $\#\{\ [\ p,\ q\ ],\ n\ \}$ el número de los elementos c_k $(k = 1,2, \ldots , n)$ que pertenecen al intervalo $[\ p,\ q\ ]$:

$$\#\ \{[\ p,q\ ]\ ,\ n\ \} = \#\ \Big\{\{\ c_1\ ,\ c_2\ ,\ \ldots\ ,\ c_n\ \} \cap [\ p,q\ ]\Big\}\ .$$

También, la expresión "cuando $n \to \infty$" quiere decir "para todo n, a partir de algún N_o" (más precisamente, existe N_o tal que para todo $n \geq N_o$), y $O(1)$ representa un *término acotado* cuando $n \to \infty$.

Demostración del teorema 1. Seguiremos los siguientes pasos de (i) a (ix)

(i) Dados $b > 0$, $m \in \mathbb{N}$ con $c_m + b < 1$, se tiene:

$$\#\{[0,b), n\} = \#\left\{\{c_{m+1}, c_{m+2}, \dots, c_{m+n}\} \cap [c_m, c_m+b)\right\}. \quad (6)$$

Demostración:

Como $c_{m+k} = c_m + c_k$, ó, $c_{m+k} = c_m + c_k - 1$, entonces, si $c_{m+k} > c_m$ se tiene que $c_{m+k} = c_m + c_k$. Por lo tanto, tenemos que

$$c_k \in [0, b) \text{ si y sólo si } c_{m+k} \in [c_m, c_m + b),$$

lo cual demuestra la igualdad (6). ●

(ii) Dados $b > 0$, $m \in \mathbb{N}$ con $b + c_m < 1$, tenemos:

$$\#\{[c_m, c_m + b), n\} = \#\{[0, b), n\} + O(1) \quad (7)$$

En efecto, como

$$\left|\#\left\{\{c_1, c_2, \dots, c_n\} \cap [c_m, c_m+b)\right\} - \#\left\{\{c_m+1, \dots, c_{m+n}\} \cap [c_m, c_m + b)\right\}\right| \leq m,$$

entonces tenemos:

$$\# \{ [c_m, c_m + b), n \} = \# \left\{ \{c_1, c_2, \ldots, c_n\} \cap [c_m, c_m + b) \right\} =$$

$$= \# \left\{ \{ c_{m+1}, c_{m+2}, \ldots, c_{m+n} \} \quad [c_m, c_m + b) \right\} + O(1) =$$

$$= \# \{ [0, b) , n \} + O(1) . \bullet$$

(iii) Dado $\varepsilon > 0$ (con $\varepsilon \leq \frac{1}{2}$), si $0 < b < \frac{1}{2}$ ε tenemos:

$$\frac{1}{n} \cdot \# \{ [0,b) , n \} < \frac{5}{6} \varepsilon , \quad \text{cuando} \quad n \to \infty . \qquad (8)$$

Demostración:

Como el conjunto $\{ c_k \mid k \in N \}$ es *"denso"* en $[0,1]$, existe ([1], [2]) c_m tal que

$$b < c_m < \frac{1}{2} \varepsilon$$

Sea M = *la parte entera* de $1/c_m$; entonces tenemos que

$$k.c_m = c_{mk} < 1 \qquad \text{para todo} \quad k = 1,2, \ldots , M .$$

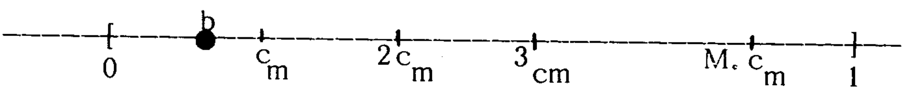

FIGURA 1

De (7) se obtiene:

$$1 \geqq \frac{1}{n} \;.\; \# \{ [0, M.c_m) , n \} =$$

$$= \sum_{k=1}^{M} \frac{1}{n} \;.\; \# \{ [(k-1).c_m , k.c_m) \} =$$

$$= \sum_{k=1}^{M} \frac{1}{n} \;.\; (\# \{ [0, c_m) , n \} + O(1) :$$

luego

$$\frac{M}{n} \;.\; \# \{ [0, c_m) , n \} + \frac{M}{n} \;.\; O(1) \leqq 1 \;.$$

Como $\frac{M}{n} \;.\; O(1) \to 0$ cuando $n \to \infty$, entonces

$$\frac{M}{n} \;.\; \# \{ [0, c_m) , n \} < 1 + \frac{1}{4} \quad \text{cuando} \quad n \to \infty \;;$$

por lo tanto,

$$\frac{1}{n} \;.\; \# \{ [0, b) , n \} \leqq \frac{1}{n} \;.\; \# \{ [0,c_m), n \} < \frac{5}{4} . \frac{1}{M} \leqq \frac{5}{4} . \frac{c_m}{1 - c_m} < \frac{5}{6} \varepsilon ,$$

cuando $n \to \infty$. ●

(iv) Dado $\varepsilon > 0$ (con $\varepsilon < \frac{1}{2}$), si $[a,b) \subset [0, 1]$ con $b-a < \frac{1}{2} \varepsilon$,

entonces tenemos

$$\frac{1}{n} \cdot \# \{[a, b), n\} < \varepsilon , \quad \text{cuando} \quad n \to \infty \quad . \qquad (9)$$

Demostración:

FIGURA 2

Como el conjunto $\{c_k \mid k \in N\}$ es denso en $[0, 1]$, existe c_m tal que

$$c_m < a \quad , \quad b - c_m < \frac{1}{2} \varepsilon .$$

De (7) tenemos:

$$\frac{1}{n} \cdot \# \{[c_m , b), n\} = \frac{1}{n} , \# \{[0, b - c_m), n\} +$$

$$+ \frac{1}{n} \cdot O(1) \quad (\text{cuando} \quad n \to \infty).$$

Pero, como

$$\frac{1}{n} \cdot O(1) \to 0 , \frac{1}{n} \cdot \#\{ [0, b - c_m), n\} < \frac{5}{6} \varepsilon \ (\text{cuando} \quad n \to \infty),$$

entonces se tiene que

$$\frac{1}{n} \cdot \# \{[a, b) , n\} \leq \frac{1}{n} \cdot \# \{[c_m , b) , n\} < \varepsilon \ (\text{cuando} \quad n \to \infty. \bullet$$

(v) Sea M un número natural; entonces,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \# \{ [0, \frac{1}{M}), n \} = \frac{1}{M} .$$

Demostración:

Como el conjunto $\{c_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ es denso en $[0,1]$, dado $\varepsilon > 0$ cualquiera existe c_m tal que

$$0 < \frac{1}{M} - c_m < \frac{\varepsilon}{2M} . \tag{11}$$

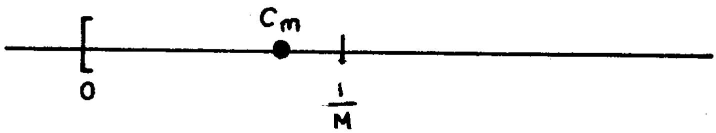

FIGURA 3

Entonces:

$$1 = \frac{1}{n} . \# \{ [0 , 1) , n \} =$$

$$= \sum_{K=1}^{M} \frac{1}{n} . \# \{[(k-1) . c_m , k.c_m) , n \} + \frac{1}{n} . \# \{ [M.c_m , 1), n\} =$$

$$= \sum_{K=1}^{M} \frac{1}{n} . (\# \{ [0, c_m), n\} + O(1)) + \frac{1}{n} . \# \{ [M.c_m, 1), n\}. \tag{12}$$

De (11) tenemos: $0 < 1 - M.c_m < \frac{1}{2}\,\varepsilon$; y de (9),

$$\frac{1}{n} \cdot \# \{[M.c_m, 1) , n\} < \varepsilon \text{ cuando } n \to \infty \qquad (13)$$

Como $\frac{M}{n}\,O(1) \to 0$ (cuando $n \to \infty$), entonces de (12) y (13) tenemos

$$\Big| \sum_{K=1}^{M} \frac{1}{n} \cdot \# \{[0, c_m), n\} - 1 \Big| < 2\,\varepsilon \quad \text{cuando} \quad n \to \infty \quad ;$$

dividiendo la desigualdad anterior por M,

$$\Big| \frac{1}{n} \cdot \# \{[0, c_m), n\} - \frac{1}{M} \Big| < \frac{2}{M}\,\varepsilon \leqq \varepsilon \text{ (cuado } n \to \infty \text{).} \qquad (14)$$

Por otra parte, como $\frac{1}{M} - c_m < \frac{\varepsilon}{2M} < \frac{1}{2}\,\varepsilon$, entoces

$$\frac{1}{n} \cdot \# \{[c_m , \frac{1}{M}), n\} < \varepsilon \quad \text{cuando} \quad n \to \infty \, . \qquad (15)$$

De (14) y (15),

$$\Big| \frac{1}{n} \cdot \# \{[0, \frac{1}{M}) , n\} - \frac{1}{M} \Big| < 2\,\varepsilon , \quad \text{cuando} \quad n \to \infty \quad ;$$

lo cual significa que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \cdot \# \{ [0, \frac{1}{M}) , n\} = \frac{1}{M} \, . \; \bullet$$

(vi) Sea M un número natural positivo; entonces, para cualquier a real positivo, con $a + \frac{1}{M} < 1$, tenemos

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \cdot \# \{ [a,\ a + \frac{1}{M}) ,\ n \} = \frac{1}{M} \cdot \qquad (16)$$

Demostración:

Dado $\varepsilon > 0$ cualquiera, escogemos c_m tal que

$$0 < a - c_m < \tfrac{1}{2} \varepsilon \ .$$

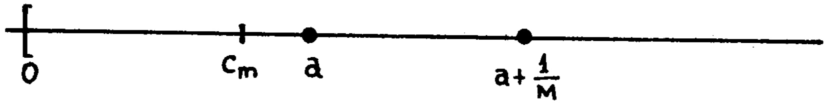

FIGURA 4

Tenemos:

$$\frac{1}{n} \cdot \# \{[c_m, a + \frac{1}{M}),\ n\} = \frac{1}{n} \cdot \# \{ [a, a + \frac{1}{M}),\ n \} + \frac{1}{n} \cdot \# \{[c_m, a); n\} \ .$$

De (9),

$$\frac{1}{n} \cdot \# \{[c_m\ ,\ a)\ ,\ n\} < \varepsilon \quad (\text{cuando} \quad n \to \infty)\ .$$

De (2) y (10),

$$\frac{1}{n} \cdot \# \{[c_m\ ,\ a + \frac{1}{M})\ ,\ n\} \to \frac{1}{M} + (a - c_m) \ (\text{cuando } n \to \infty);$$

luego

$$\left|\frac{1}{n} \cdot \# \{[a\ ,\ a + \frac{1}{M})\ ,\ n\} - \frac{1}{M}\right| < 2\ \varepsilon \ (\text{cuando} \quad n \to \infty);$$

por lo tnto se obtiene el resultado deseado .

(vii) Sea $r(0 < r < 1)$ un número racional; entonces,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \cdot \# \ \{[0, r) , n\} = r . \tag{17}$$

Demostración:

Sea $r = j/M$ donde $j , M \in N$ con $j < M$; entonces por (16) se tiene que

$$\frac{1}{n} \cdot \# \ \{[0 , r), n\} = \sum_{k=1}^{j} \frac{1}{n} \cdot \# \ \{[\frac{(k-1)}{M} , \frac{k}{M}) , n\} \to \frac{j}{M}$$

(cuando $n \to \infty$) .

(viii) Sea $b(0 < b < 1)$ un número real; entonces,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \cdot \ \{[0, b), n\} = b . \tag{18}$$

Demostración:

Dado $\varepsilon > 0$ cualquiera, existe r racional tal que

$$0 < b - r < \frac{1}{2} \varepsilon .$$

Tenemos:

$$\frac{1}{n} \cdot \# \ \{[0,b),n\} = \frac{1}{n} \cdot \# \{[0, r),n\} + \frac{1}{n} \cdot \# \ \{[r,b) , n\}$$

Pero como

$$\frac{1}{n} \cdot \# \{[0, r),n\} \to r \ , \ y \ , \ \frac{1}{n} \cdot \# \{[r, b),n\} < \varepsilon \text{ (cuando } n \to \infty \text{)},$$

entoces

$$\left|\frac{1}{n} \cdot \# \{[0,b), n\} - b\right| < b - r + 2\varepsilon < 3\varepsilon \quad \text{(cuando } n \to \infty\text{)};$$

por lo tanto se obtiene el resultado deseado. ●

(ix) Si $[a,b] \subset [0, 1]$, entonces

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \cdot \# \{ [a,b] , n\} = b - a \ . \tag{19}$$

En efecto:

$$\frac{1}{n} \cdot \# \{[a,b], n\} = \frac{1}{n} \cdot \# \{\{ b \}, n\} + \frac{1}{n} \cdot \{ [0,b),n\} - \frac{1}{n} .\# \{ [0,a) , n\}$$

$$\to 0 + b - a = b - a \qquad \text{(cuando } n \to \infty\text{)} . \ ■$$

2. ORDENACION DE LOS ELEMENTOS DE UN CONJUNTO CONTABLE DENSO EN [0, 1]

Si los nũmeros c_1 , c_2 , c_3 , ... son pseudoaleatorios entre 0 y 1, entonces el conjunto contable $D = \{ c_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ es *denso* en el intervalo $[0, 1]$. En efecto, dado cualquier subintervalo $[a,b]$ del intervalo $[0,1]$ tenemos que

$$\frac{1}{n} \cdot \#(\{c_1, c_2, \dots, c_n\} \cap [a,b]) \to b - a \quad (\text{cuando } n \to \infty);$$

por lo tanto se tiene, para n suficientemente grande, que:

$$\phi \neq \{c_1, c_2, \dots, c_n\} \cap [a,b] \subset D \cap [a,b] \quad . \blacksquare$$

Supongamos que $c_1, c_2, c_3, \dots$ son pseudoaleatorios entre 0 y 1; consideremos la siguiente *"reordención"* σ de los números naturales:

$\sigma(1)$ = el primer índice n tal que $c_n < \frac{1}{2}$;

$\sigma(2)$ = el segundo índice n tal que $c_n < \frac{1}{2}$;

$\sigma(3)$ = el primer índice n tal que $c_n \geq \frac{1}{2}$;

en general,

$\sigma(3k-2)$ = el $(2k-1)$-ésimo índice n tal que $c_n < \frac{1}{2}$;

$\sigma(3k-1)$ = el $2k$-ésimo índice n tal que $c_n < \frac{1}{2}$;

$\sigma(3k)$ = el k-ésimo índice n tal que $c_n \geq \frac{1}{2}$.

Evidentemente, $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es *uno a uno* y *sobre*, y tenemos:

$$\frac{1}{n} \cdot \#(\{c_{\sigma(1)}, c_{\sigma(2)}, \dots, c_{\sigma(n)}\} \cap [0, \tfrac{1}{2})) \to \frac{2}{3} \quad (n \to \infty);$$

$$\frac{1}{n} \cdot \#\left(\{ c_{\sigma(1)}, c_{\sigma(2)}, \ldots, c_{\sigma(n)}\} \cap [\tfrac{1}{2}, 1]\right) \to \frac{1}{3} \ (n \to \infty) ;$$

esto es, los números $c_{\sigma(1)}, c_{\sigma(2)}, c_{\sigma(3)}, \ldots$ ya *no* son pseudoaleatorios entre 0 y 1, a pesar de que el conjunto $\{ c_k \mid k \in \mathbb{N} \}$ es igual al conjunto $\{ c_{\sigma(k)} \mid k \in \mathbb{N} \}$. ■

Dado un conjunto contable de números entre 0 y 1, la *"uniformidad de la distribución* de los números D *depende de la "ordenación"* de los elementos de D; por esta razón, para hablar del tema en cuestión es indispensable *"ordenar"* previamente los elementos del conjunto contable D. Tenemos el siguiente resultado:

Teorema 2. Sea D un conjunto contable de números reales entre 0 y 1; existe una ordenación de los elementos de D, digamos $D = \{y_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, tal que los números $y_1, y_2, y_3, \ldots$ son pseudoaleatorios entre 0 y 1.

Demostración

Consideremos una sucesión (c_n) de elementos reales tal que $c_1, c_2, c_3, \ldots$ son pseudoaleatorios entre 0 y 1 (nótese que tal sucesión siempre existe, ver el teorema 1). Como D es un conjunto contable y denso en [0, 1], entonces podemos escoger una sucesión (a_n) de elementos en D de tal manera que

$$|a_1 - c_1| < 1 ,$$

$$a_2 \neq a_1 , \ |a_2 - c_2| < \frac{1}{2} ;$$

en general,

$$a_k \neq a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, \quad |a_k - c_k| < \frac{1}{k} \quad (k = 2,3,4,\ldots) \tag{20}$$

Primero, demostramos que los números a_1, a_2, a_3, ... son pseudoaleatorios entre 0 y 1. En efecto, dado un subintervalo $[p, q]$ de $[0, 1]$, y dado $\varepsilon > 0$ cualquiera (sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\varepsilon < 2(q - p)$, se tiene que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \#(\{c_1, c_2, \ldots, c_n\} \cap [p - \tfrac{1}{4}\varepsilon, q + \tfrac{1}{4}\varepsilon]) = q - p + \frac{1}{2}\varepsilon ;$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \cdot \#(\{c_1, c_2, \ldots, c_n\} \cap [p + \tfrac{1}{4}\varepsilon, q - \tfrac{1}{4}\varepsilon]) = q - p - \frac{1}{2}\varepsilon ;$$

o sea,

$$\frac{1}{n} \cdot \#(\{c_1, c_2, \ldots, c_n\} \cap [p - \tfrac{1}{4}\varepsilon, q + \tfrac{1}{4}\varepsilon]) < q - p + \frac{3}{4}\varepsilon \quad (n \to \infty) \tag{21}$$

$$q - p - \frac{3}{4}\varepsilon < \frac{1}{n} \cdot \#(\{c_1, c_2, \ldots, c_n\} \cap [p + \tfrac{1}{4}\varepsilon, q - \tfrac{1}{4}\varepsilon]) \quad (n \to \infty). \tag{22}$$

Sea m un número natural que satisface la desigualdad $\frac{1}{m} < \frac{1}{4}\varepsilon$; si $k \geq m$, entonces de (1) tenemos que

$$\left.\begin{array}{l} c_k \in [p + \frac{1}{4}\varepsilon, q - \frac{1}{4}\varepsilon] \text{ implica } a_k \in [p, q], \\ c_k \notin [p - \frac{1}{4}\varepsilon, q + \frac{1}{4}\varepsilon] \text{ implica } a_k \notin [p, q]; \end{array}\right. \tag{23}$$

luego, para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos la siguiente desigualdad:

$$q - p - \frac{3}{4}\varepsilon - \frac{m}{n} < \frac{1}{n} \cdot \#(\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \cap [p, q])$$

$$< q - p + \frac{3}{4}\varepsilon + \frac{m}{n} \quad (\text{cuando } n \to \infty). \tag{24}$$

Como $\frac{m}{n} \to 0$ cuando $n \to \infty$, entonces de (24) obtenemos

$$\left|\frac{1}{n} \cdot \#(\{a_1,a_2,\dots,a_n\} \cap [p,q]) - (q-p)\right| < \varepsilon$$

$$(\text{cuando } n \to \infty); \tag{25}$$

por lo tanto;

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \cdot \#(\{a_1,a_2,\dots,a_n\} \cap [p,q]) = q - p,$$

o sea que los nũmeros $a_1, a_2, a_3, \dots$ son pseudoaleatorios entre 0 y 1 . ●

Si $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} = D$ entonces el teorema ya estã demostrado, Supongamos que $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \neq D$; sea

$$D - \{a_n / n \in \mathbb{N}\} = \{b_n / n \in \mathbb{N}\} ;$$

definimos y_n $(n = 1,2,3,\dots)$ como sigue:

$y_1 = b_1$;

$y_2 = a_1$;

$y_3 = b_2$;

$y_4 = a_2$; $y_5 = a_3$;

$y_6 = b_3$;

$y_7 = a_4$; $y_8 = a_5$; $y_9 = a_6$;

en general:

si $k = \frac{1}{2} n(n+1)$, entonces $y_k = b_n$;

si $\frac{1}{2}\, n(n+1) < k < \frac{1}{2}\,(n+1)\,(n+2)$, entonces $y_k = a_{k-n}$

(para $n = 1,2,3, \dots$) ;

entonces los números y_1 , y_2 , y_3 , ... son pseudoaleatorios entre 0 y 1. En efecto, si $\frac{1}{2}\, j(j+1) \leq n < \frac{1}{2}\,(j+1)\,(j+2)$ entonces

$$\#\,(\{\, y_1\,,\, y_2\,,\dots,\, y_n\,\} \cap [p,\, q]\,) =$$

$$= \#\,(\,\{\, a_1,\, a_2\,,\dots,\, a_{n-j}\,\} \cap [p,\, q]\,) + \#(\{\, b_1, b_2, \dots, b_j\,\} \cap [p,q]) ; \qquad (26)$$

luego

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \cdot \#\,(\{\, y_1, y_2, \dots, y_n\} \cap [p,\, q]) =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{n-j}{n-j} \cdot \#\,(\{a_1, a_2, \dots, a_{n-j}\} \cap [p,\, q]\,) +$$

$$+ \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \cdot \#\,(\,\{\, b_1, b_2, \dots, b_j\,\} \cap [p,\, q]\,) =$$

$$= (q - p) + 0 = q - p\,, \qquad (27)$$

puesto que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n-j}{n} = 1\,, \qquad \lim_{n \to \infty} \frac{j}{n} = 0\,.$$

Por lo tanto, los números y_1 , y_2 , y_3 , ... son pseudoaleatorios entre 0 y 1. Evidentemente, $D = \{\, y_n \mid n \in \mathbb{N}\,\}$. ■

3. FORMULA INTEGRAL DE CHEBYSHEV

Empleando los números pseudoaleatorios entre 0 y 1, podemos dar una nueva definición de la integral según Riemann para funciones continuas, evitando el uso del concepto de "particiones de un intervalo".

Teorema 3. Sea f continua en el intervalo $[0,1]$; si $x_1, x_2, x_3, \ldots$ son pseudoaleatorios entre 0 y 1, entonces

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \,. \tag{28}$$

Demostración:

Sea B = máximo de $f(x)$ en $[0,1]$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|x - y| < \delta \quad \text{implica} \quad |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3} \;;$$

luego, si $M \in N$ con $\frac{1}{M} < \delta$, tenemos:

$$\left| \int_0^1 f(x)\,dx - \frac{1}{M} \sum_{k=1}^{M} f\left(\frac{k}{M}\right) \right| < \frac{\varepsilon}{3} \,. \tag{29}$$

En cada subintervalo $\left[\frac{k-1}{M}, \frac{K}{M}\right)$ tenemos:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \cdot \#\left(\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \cap \left[\frac{k-1}{M}, \frac{k}{M}\right)\right) = \frac{1}{M} \; (k = 1, 2, \ldots, M) \;;$$

luego

$$\left| \frac{1}{n} \cdot \#\left(\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \cap \left[\frac{k-1}{M}, \frac{k}{M}\right)\right) - \frac{1}{M} \right| < \frac{\varepsilon}{3MB} \quad (\text{cuando } n \to \infty) .$$

Tenemos:

$$\frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^{n} f(x_j) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{M} \left(\sum_{x_j \in \left[\frac{k-1}{M} , \frac{k}{M}\right)} f(x_j) \right) =$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{M} \left(\sum_{x_j \in \left[\frac{k-1}{M}, \frac{k}{M}\right)} \left(f\left(\frac{k}{M}\right) + f(x_j) - f\left(\frac{k}{M}\right)\right) \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{M} \frac{1}{n} \cdot \#\left(\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \cap \left[\frac{k-1}{M}, \frac{k}{M}\right)\right) \cdot f\left(\frac{k}{M}\right) +$$

$$\pm \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{M} \left(\sum_{x_j \in \left[\frac{k-1}{M}, \frac{k}{M}\right)} \left(f(x_j) - f\left(\frac{k}{M}\right)\right) \right) . \tag{30}$$

Pero

$$\left| \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{M} \left(\sum_{x_j \in \left[\frac{k-1}{M}, \frac{k}{M}\right)} \left(f(x_j) - f\left(\frac{k}{M}\right)\right) \right) \right| < \frac{1}{n} \cdot \frac{\varepsilon}{3} n = \frac{\varepsilon}{3}, \tag{31}$$

$$\left| \sum_{k=1}^{M} \frac{1}{n} \cdot \#\left(\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \cap \left[\frac{k-1}{M}, \frac{k}{M}\right)\right) \cdot f\left(\frac{k}{M}\right) - \right.$$

$$\left. \sum_{k=1}^{M} \frac{1}{M} \cdot f\left(\frac{k}{M}\right) \right| \leq$$

$$\sum_{k=1}^{M} \left| \frac{1}{n} \cdot \# \left(\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \cap \left[\frac{k-1}{M}, \frac{k}{M} \right) \right) - \frac{1}{M} \right| \cdot \left| f\left(\frac{k}{M}\right) \right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{M} \frac{\varepsilon}{3MB} \cdot B = \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{(cuando } n \to \infty \text{)}. \qquad (32)$$

De (30), (31) y (32) tenemos:

$$\left| \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^{n} f(x_j) - \sum_{k=1}^{M} \frac{1}{M} \cdot f\left(\frac{k}{M}\right) \right| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{2\varepsilon}{3}$$

$$\text{(cuando } n \to \infty \text{)}. \qquad (33)$$

De (29) y (33):

$$\left| \int_0^1 f(x)\, dx - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} f(x_j) \right| < \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \quad \text{(cuando } n \to \infty \text{)},$$

lo cual comprueba el teorema.

Corolario 1. Si x_1 , x_2 , x_3 , ... son pseudoaleatorios entre 0 y 1, entonces el *valor medio* de estos números es igual a $\frac{1}{2}$, o sea:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{1}{2}. \qquad (34)$$

Demostración:

En el teorema 3, tomando $f(x) = x$ se tiene que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k = \int_0^1 x \, dx = \frac{1}{2} \quad \bullet$$

Corolario 2. (Fórmula integral de Chébyshev)

Sea θ tal que θ/π es *irracional*, si $g(x)$ es continua en $[-1, 1]$; entonces tenemos:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\text{sen } t) \, dt = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} g(\text{sen } k\,\theta) , \qquad (35)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\cos t) \, dt = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} g(\cos k\,\theta) ; \qquad (36)$$

esta última es la fórmula obtenida por Chébyshev.

Demostración:

Sean $f(x) = g(\text{sen } 2\pi x)$, x_k = la parte fraccionaria de $k \cdot \frac{\theta}{2\pi}$; entonces $x_1 , x_2 , x_3 , \ldots$ son pseudo-aleatrios entre 0 y 1; además,

$$\text{sen } 2\pi x_k = \text{sen } 2\pi k \frac{\theta}{2\pi} = \text{sen } k\,\theta ,$$

ya que la función "sen" es 2π-periódica. Aplicando el teorema 3 tenemos:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\text{sen } t)\, dt = \int_0^1 g(\text{sen } 2\pi x)\, dx =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} g(\text{sen } 2\pi\, x_k) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} g(\text{sen } k\theta\,) .$$

De la misma manera se obtiene la igualdad (36) . ■

corolario 3. (Método de Montecarlo)

Sea $f : [0, 1] \to [0,1]$ una función continua; si $x_1 , x_2 , x_3 ,\dots ;$

$y_1 , y_2 , y_3 , \dots$ son pseudoaleatorios entre 0 y 1, entonces

$$\int_0^1 f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \# \ \{(x_k , y_i) \mid y_i < f(x_k);\ k,i=1,2,3,\dots,n\} , \quad (37)$$

o sea que la probabilidad de que los puntos (x_k,y_i) $(k,1=1,2,3,\dots)$ estén en la región $\{(x,y)\in [0,1]^2 \mid y < f(x)\}$ es igual al valor de la integral

$$\int_0^1 f(x)\, dx .$$

Demostración:

Como $y_1 , y_2 , y_3 , \dots$ son pseudoaleatorios, entonces para cada k tenemos:

$$f(x_k) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \# \left(\{ y_1,y_2,\dots,y_n\} \cap [0, f(x_k) \right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \# \ \{ y_i/y_i < f(x_k) \ ; \ i = 1,2,\dots,n \} . \qquad (38)$$

Del teorema 3:

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} f(x_k) =$$

$$= \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \#\{ y_i \mid y_i < f(x_k) \; ; \; i = 1,2,\ldots,n\} \qquad (39)$$

En (39) la convergencia "$n \to \infty$" es *uniforme* con respecto a m (la convergencia "$n \to \infty$" es idenependiente de k, en consecuencia, independiente de m); por lo tanto, el *límite "iterado"* en (39) ($\lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty}$) es igual al *límite "doble"* ($\lim_{m,n\to\infty}$); luego

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{\to\infty} \frac{1}{mn} \sum_{k=1}^{m} \#\{ y_i \mid y_i < f(x_k) \; ; \; i=1,2,\ldots,n\} =$$

$$= \lim_{m,n\to\infty} \frac{1}{mn} \cdot \#\{(x_k, y_i) \mid y_i < f(x_k); \; k=1,2,\ldots,m; \; i=1,2,\ldots,n\} \quad (40)$$

Se sostiene la igualdad (37) como un caso particular de (40), tomando $m=n \to \infty$. ■

4. FLUCTUACIONES PSEUDOALEATORIAS

Sean $c_1, c_2, c_3, \ldots$ números pseudoaleatorios entre 0 y 1, y $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función continua; si

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 0 ,$$

entonces

$$\frac{f(c_1) + f(c_2) + \ldots + f(c_n)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 f(x)\,dx = 0 ,$$

o sea que "*el valor medio*" de los números

$$f(c_1) , f(c_2) , f(c_3) , \ldots \tag{41}$$

es "*cero*". Decimos que los números en (41) son "*fluctuaciones pseudoaleatorias* (de tipo f)", y que la *amplitud* de la fluctuaciones es igual a A = máximo de $|f(x)|$ en $[0,1]$.

Como un caso especial, si la función f es de primer grado,

$$f(x) = (2x - 1) . A \quad ; \tag{42}$$

entonces, las fluctuaciones obtenidas

$$(2c_1 - 1) . A , (2c_2 - 1) . A , (2c_3 - 1) . A , \ldots \tag{43}$$

están *distribuidas "uniformemente"* entre $-A$ y A, teniendo así las fluctuaciones pseudoaleatorias de "distribución uniforme". En otros casos, las fluctuaciones pseudoaleatorias no son de distribución uniforme.

Ahora, estudiaremos *el movimiento de la población* cuando la tasa de crecimiento de la población tiene fluctuaciones pseudoaleatorias alrededor de su valor medio.

Sea a_n la tasa de crecimiento de la población en el momento n ; supongamos que los valores de a_n tienen fluctuaciones pseudoaleatorias (de tipo f) alrededor de su promedio λ , con amplitud A menor que 1, o sea:

$$a_n = \lambda + f(c_n) \ (n = 1,2,3,\ldots) , \tag{44}$$

donde c_1 , c_2 , c_3 ,... son números pseudoaleatrios entre 0 y 1; entonces la población X_n en el momento n está dada (véase punto 0) por

$$X_{n+1} = \prod_{k=1}^{n} (1 + \lambda + f(c_k)).\ X_1 . \tag{45}$$

Tomando el logaritmo natural de la igualdad 5) tenemos:

$$\log X_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \log (1 + \lambda + f(c_k)) + \log X_1 . \tag{46}$$

Aplicando el teorema 3 :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \log (1 + \lambda + f(c_k)) \xrightarrow[(n \to \infty)]{} \int_0^1 \log(1 + \lambda + f(x))\, dx \tag{47}$$

Si $\lambda = 0$, entonces*

$$\int_0^1 \log(1 + f(x))\, dx \leq \int_0^1 \left\{ f(x) - \frac{f(x)^2}{6} \right\} dx =$$

$$= \int_0^1 f(x)\, dx - \frac{1}{6} \int_0^1 f(x)^2\, dx = -\frac{1}{6}\int_0^1 f(x)^2\, dx < 0. \tag{48}$$

Por otra parte, el número $\int_0^1 \log(1 + \lambda + f(x))\, dx$ es *estrictamente creciente* con respecto a λ, entonces existe $\lambda_o > 0$ tal que

$$\int_0^1 \log(1 + \lambda_o + f(x))\, dx = 0 . \tag{49}$$

Si $\lambda < \lambda_o$, entonces el límite $\int_0^1 \log(1 + \lambda + f(x))\, dx$ en (47) es *negativo*; por lo tanto se tiene que

$$\sum_{k=1}^{n} \log(1 + \lambda + f(c_k)) \longrightarrow -\infty \quad (n \to \infty) . \tag{50}$$

De la misma manera, si $\lambda > \lambda_o$ tenemos que

---

* Nota: Para $|t| < 1$ tenemos la desigualdad

$$\log(1+t) \leq t - \frac{1}{6} t^2 \quad ;$$

en efecto, la función $F(t) = t - \frac{1}{6} t^2 - \log(1+t)$ posee un único mínimo en $t=0$.

$$\sum_{k=1}^{n} \log(1 + \lambda + f(c_k)) \rightarrow +\infty \ (n \rightarrow \infty). \tag{51}$$

De (45), tenemos el siguiente resultado:

Dadas fluctuaciones pseudoaleatorias en la tasa de crecimiento de la población, existe un único *"valor positivo"* λ_o tal que:

si $\lambda < \lambda_o$, entonces $X_n \rightarrow 0$ (la población *se extingue*):

si $\lambda > \lambda_o$, entonces $X_n \rightarrow +\infty$ (la población *aumenta sin control).*

En particular, dado que $\lambda_o > 0$, tenemos el siguiente resultado: Si la tasa de crecimiento de la población es *"cero en promedio"* entonces la población *se extingue* al cabo de un tiempo suficientemente largo (¡para cualquier tipo de fluctuaciones pseudoaleatorias!). ■

5. FLUCTUACIONES DE LA FORMA A.sen n θ

Si la tasa de crecimiento de la población tiene fluctuaciones pseudoaleatorias del tipo "seno", entonces $f(x) = A.\text{sen}\ 2\pi x$; luego

$$\int_0^1 \log(1 + \lambda + A.\text{sen}\ 2\pi x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \{\log(1+\lambda) + \log(1 + \frac{A}{1+\lambda} . \text{sen}\ t)\}\ dt =$$

$$= \log(1+\lambda) + \log \frac{1+\lambda+\sqrt{(1+\lambda)^2 - A^2}}{2(1+\lambda)}. \tag{52}$$

Por lo tanto, si λ_o es la raíz de la ecuación $\int_0^1 \log(1+\lambda + A.\mathrm{sen}\, 2\pi x)\, dx = 0$,

entonces tenemos

$$\lambda_o = \left(\frac{A}{2}\right)^2 \tag{53}$$

En particular, si c_n es la *parte fraccionaria* de $n\theta$ con θ/π irracional, entonces las fluctuaciones son de la forma $A.\mathrm{sen}\, n\theta$ $(n = 1,2,\ldots)$, y por lo tanto se obtiene el siguiente resultado:

Si la sucesión (X_n) satisface la *fórmula de recurrencia* dada por:

$$X_{n+1} = (1 + \lambda + A.\mathrm{sen}\, n\theta).\, X_n \quad (n = 1,2,3,\ldots), \tag{54}$$

entonces:

$$\left.\begin{array}{llll} X_n \to & 0 & \text{si} & \lambda < \left(\frac{A}{2}\right)^2 \\ X_n \to & +\infty & \text{si} & \lambda > \left(\frac{A}{2}\right)^2 \end{array}\right\} \tag{55}$$

A continuación estudiaremos el comportamiento de la sucesión (X_n) dada por (3) cuando $\lambda = \left(\frac{A}{2}\right)^2$. De (3), tomando $\lambda = \left(\frac{A}{2}\right)^2$, tenemos:

$$X_{N+1} = \prod_{n=1}^{N} \left(1 + A.\ \text{sen}\ n\theta + \left(\frac{A}{2}\right)^2\right).\ X_1 \tag{56}$$

o sea:

$$\log X_{N+1} = \sum_{n=1}^{N} \log \left(1 + A.\text{sen}\ n\,\theta + (A/2)^2\right) + \log X_1 . \tag{57}$$

Considerándolo como una función 2π-periódica de la variable θ, el n-ésimo término de la serie finita en (57), es decir, Log $(1 + A.\text{sen}\ n\ \theta + (A/2)^2)$, puede ser desarrollado en *serie de Fourier* como sigue ([3], [4]):

$$\log (1 + A.\text{sen}\ n\theta + (A/2)^2) =$$

$$= -2 \sum_{K=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k} \left(\frac{A}{2}\right)^{2k} .\text{sen}\ kn\,\theta - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k-1} \cdot \left(\frac{A}{2}\right)^{2k-1} . \cos\ kn\,\theta ; \tag{58}$$

nótese que las series en (58) convergen *"uniformemente"*, ya que $\left|\frac{A}{2}\right| < \frac{1}{2} < 1$.

Reemplazando (58) en (57) tenemos:

$$\log X_{N+1} = -2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k} . \left(\frac{A}{2}\right)^{2k} . \sum_{n=1}^{N} \text{sen}\ kn\ \theta$$

$$- 2 . \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k-1} . \left(\frac{A}{2}\right)^{2k-1} . \sum_{n=1}^{N} \cos\ kn\ \theta \tag{59}$$

Pero

$$\left|\sum_{n=1}^{N} \operatorname{sen} kn\,\theta\right| = \left|\frac{\cos \frac{1}{2} k\,\theta - \cos (N+\frac{1}{2})\,k\theta}{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} k\,\theta}\right| \leq \frac{1}{|\operatorname{sen} \frac{1}{2} k\,\theta|}, \qquad (60)$$

$$\left|\sum_{n=1}^{N} \cos kn\,\theta\right| = \left|\frac{\operatorname{sen} (N+\frac{1}{2})k\,\theta - \operatorname{sen} \frac{1}{2} k\,\theta}{2 \operatorname{sen} k\,\theta}\right| \leq \frac{1}{|\operatorname{sen} \frac{1}{2} k\,\theta|} \qquad (61)$$

De (59), (60) y (61) tenemos

$$\left|\log X_{N+1}\right| \leq 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{A}{2}\right)^k \cdot \frac{1}{|\operatorname{sen} \frac{1}{2} k\,\theta|} \qquad (62)$$

Lema: Dada **a** real con $0 < a < 1$, si θ/π es *irracional* entonces

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a^k}{\operatorname{sen} k\theta} = 0\,. \qquad (63)$$

Demostración:

Usando la fórmula (ver, por ejemplo, [3], [4])

$$\operatorname{sen} k\,\theta = 2^{k-1} \cdot \prod_{s=0}^{k-1} \operatorname{sen}\left(\theta + \frac{s\pi}{k}\right) \qquad (64)$$

tenemos:

$$\frac{1}{k}\left[\log a^k - \log |\operatorname{sen} k\theta|\right] =$$

$$= \log a - \frac{k-1}{k} \log 2 - \frac{1}{k} \sum_{s=0}^{k-1} \log' \left|\operatorname{sen}\left(\theta + \frac{s\pi}{k}\right)\right| \to$$

$$\xrightarrow[(k\to\infty)]{} \log a - \log 2 - \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \log|\operatorname{sen} x|\, dx , \quad (65)$$

ya que

$$\frac{1}{k} \sum_{s=0}^{k-1} \log |\operatorname{sen} (\theta + \frac{s\pi}{k})| = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{k} \sum_{s=0}^{k-1} \log |\operatorname{sen} (\theta + \frac{s\pi}{k})| \to$$

$$\xrightarrow[(k\to\infty)]{} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \log |\operatorname{sen} (\theta + x)|\, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \log|\operatorname{sen} x|\, dx .$$

Pero como

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \log |\operatorname{sen} x|\, dx = -\frac{\pi}{2} \cdot \log 2 ,$$

de (65) se tiene que

$$\frac{1}{k} [\log a^k - \log|\operatorname{sen} k\theta|] \to \log a < 0 \quad (k \to \infty) \; ;$$

por lo tanto,

$$\log \frac{a^k}{|\operatorname{sen} k\theta|} = \log a^k - \log |\operatorname{sen} k\theta| \to -\infty (k \to \infty) ,$$

lo cual demuestra el límite en (63) . ■

Aplicando el lema tenemos

$$\frac{A^k}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}k\theta} \to 0 \qquad \text{cuando} \qquad k \to \infty\,;$$

luego, existe una constante $M > 0$ tal que

$$\left| \frac{A^k}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}k\theta} \right| \leqq M \qquad \text{para todo} \qquad k \in \mathbb{N} \tag{66}$$

Reemplazando la desigualdad (66) en (62) se obtiene la siguiente desigualdad:

$$|\log X_{N+1}| \leqq 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{K} \left(\frac{1}{2}\right)^k . M \leqq 2M + |\log X_1| \tag{67}$$

(para todo $N \in \mathbb{N}$).

o sea que la sucesión (X_n) es *acotada*, y está *separada del valor cero*. Esto es, X_n no diverge hacia infinito, ni tiende a cero cuando $n \to \infty$, solamente cuando λ es igual a $(\frac{A}{2})^2$. ■

6. FORMULA DE RECURRENCIA DE PRIMER GRADO

Supongamos que la sucesión (X_n) está determinada de acuerdo con *la fórmula de recurrencia* no honogénea de primer grado:

$$X_{n+1} = b_n \cdot X_n + c_n \qquad (n = 1,2,3,...)\,. \tag{68}$$

donde los b_n tienen fluctuaciones pequeñas pseudoaleatorias alrededor del valor medio b $(b > 0)$,

$$b_n = b + \varepsilon \,.\, \operatorname{sen} n\,\theta \quad (n = 1,2,3,\ldots) \,. \tag{69}$$

y (c_n) es una sucesión acotada dada. Vamos a estudiar bajo qué condiciones la sucesión (X_n) dada por (68) es acotada, es decir, estudiar la solución (X_n) de la fórmula (68) en el espacio ℓ_∞ , cuando $(c_n) \in \ell_\infty$. (#)

Lema: Existen constantes positivas m, B tales que

$$(0<)\ m \leq \frac{b_1\ b_2 \ldots b_N}{p^N} \leq B \quad \text{para todo} \quad N \in \mathbb{N} \tag{70}$$

donde

$$p = \frac{b + \sqrt{b^2 - \varepsilon^2}}{2} \tag{71}$$

Además,

$$\left.\begin{array}{lll} p < 1 & \text{si y sólo si} & b < 1 + (\frac{1}{2}\varepsilon)^2 , \\ p > 1 & \text{si y sólo si} & b > 1 + (\frac{1}{2}\varepsilon)^2 . \end{array}\right\} \tag{72}$$

(#) ℓ_∞ es el espacio de Banach formado por todas las sucesiones acotadas. Evidentemente, la sucesión (b_n) también pertenece a ℓ_∞

Demostración:

Sean $$p = \frac{b + \sqrt{b^2 - \varepsilon^2}}{2}, \quad \frac{A}{2} = \frac{b - \sqrt{b^2 - \varepsilon^2}}{\varepsilon};$$

entonces,

$$p \cdot A = \varepsilon \quad , \qquad p \cdot \{ 1 + (\frac{A}{2})^2 \} = b \, .$$

Por lo tanto tenemos:

$$\log b_n = \log (b + \varepsilon \cdot \operatorname{sen} n\,\theta) = \log p. \{ 1 + (\frac{A}{2})^2 + A.\operatorname{sen} n\,\theta \} =$$

$$= \log p + \log (1 + A.\operatorname{sen} n\theta + (\frac{A}{2})^2); \tag{73}$$

luego

$$\log (b_1 b_2 \ldots b_N) = \sum_{n=1}^{N} \log b_n = N.\log p +$$

$$\sum_{n=1}^{N} \log (1 + A.\operatorname{sen} n\,\theta + (\frac{A}{2})^2) \, ,$$

o sea,

$$\log \frac{b_1 b_2 \ldots b_N}{p^N} = \sum_{n=1}^{N} \log (1 + A.\operatorname{sen} n\,\theta + (\frac{A}{2})^2) \, . \tag{74}$$

De (57) y (67) tenemos que el valor absoluto del segundo miembro de la igualdad (74) es menor que una constante 2M, así:

$$\log \left| \frac{b_1 b_2 \ldots b_N}{p^N} \right| \leq 2M \quad ;$$

por lo tanto se obtiene la desigualdad

$$e^{-2M} \leq \frac{b_1 b_2 \ldots b_N}{p^N} \leq e^{2M} \quad ;$$

ahora, basta escoger $m = e^{-2M} > 0, \quad B = e^{2M}$.

Por otra parte, podemos comprobar (72) en forma inmediata. ■

De la fórmula de recurencia (68) tenemos (ver [5]):

$$X_{n+1} = (b_1 b_2 \ldots b_n) \cdot \{ X_1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{b_1 b_2 \ldots b_k} \}. \tag{75}$$

(i) Caso $b < 1 + (\frac{1}{2}\varepsilon)^2$. Como $0 < p < 1$. entonces de (70) tenemos:

$$\left. \begin{aligned} &(b_1 b_2 \ldots b_n) \leq B.p^n \to 0 \quad (n \to \infty), \\ &(b_1 b_2 \ldots b_n \geq m.p^n \quad . \end{aligned} \right\} \tag{76}$$

Por lo tanto, si $C = \sup_k |c_k|$ entonces

$$\left| (b_1 b_2 \ldots b_n) \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{b_1 b_2 \ldots b_k} \right| \leq$$

$$\leq B.p^n \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{C}{m \cdot p^k} = \frac{B.C}{m} \cdot p^n \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{p^k} =$$

$$= \frac{B.C}{m} \, \frac{1 - p^{n+1}}{1 - p} \quad . \qquad (77)$$

De (75) y (77) se ve que la sucesión (X_n) es *acotada* para cualquier escogencia del valor del primer término X_1 . ∎

(ii) Caso $b > 1 + (\frac{1}{2}\varepsilon)^2$. Como $p > 1$, entonces tenemos:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{c_k}{b_1 b_2 \ldots b_k} \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C}{m \cdot p^k} = \frac{C}{m} \, \frac{1}{p-1} \ ;$$

por lo tanto, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{b_1 b_2 \ldots b_k}$ *converge absolutamente.*

Si

$$X_1 \neq - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{b_1 b_2 \ldots b_k} \ , \qquad (78)$$

entonces de (75) se ve que $(X_n) \to \pm \infty \quad (n \to \infty)$, ya que

$$(b_1 b_2 \ldots b_n) \underset{n \to \infty}{\to} \infty \, .$$

Si

$$X_1 = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{b_1 b_2 \ldots b_k} \ , \qquad (79)$$

entonces de (75) tenemos

$$X_{n+1} = -(b_1 b_2 \ldots b_n) \cdot \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{c_k}{b_1 b_2 \ldots b_k} \tag{80}$$

De (76) y (80),

$$|X_{n+1}| \leqq (b_1 b_2 \ldots b_n) \cdot \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|c_k|}{b_1 b_2 \ldots b_k} \leqq$$

$$\leqq B.p^n \cdot \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{C}{m.p^k} = \frac{BC}{m(p-1)} \quad ;$$

por lo tanto la sucesión (X_n) es *acotada* . ■

En resumen: si la sucesión (X_n) es la solución de la fórmula (68), entonces:

(i) si $b < 1 + (\frac{1}{2}\varepsilon)^2$, entonces $(X_n) \in \ell_\infty$ para cualquier escogencia del primer término X_1.

(ii) Si $b > 1 + (\frac{1}{2}\varepsilon)^2$, entonces

$$(X_n) \in \ell_\infty \quad \text{si y sólo si} \quad X_1 = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{b_1 b_2 \ldots b_k} \cdot ■$$

REFERENCIAS

[1] TAKEUCHI YU, *Sucesiones y Series*, Tomo I, Tomo II. Ed. Limusa, México, 1976.

[2] TAKEUCHI YU. *Temas de Sucesiones*. III Coloquio Distrital de Matemáticas, 1986.

[3] GRADSHTEYN I.S., RYZHIK, I.M. *Table of Integrals, Series and Products*. Academic Press, New York, 1965.

[4] JOLLEY L. *Sumation of Series*. Chapman and Hall, London, 1925.

[5] TAKEUCHI YU. "Estudios Sistemáticos de algunas sucesiones". *Matemática, Enseñanza Universitaria*, No. 20, 1981, pp.3-74.