Revista INTEGRACION
Departamento de Matemáticas UIS
Vol. 5, No. 1, enero-junio 1987

Notas de clase: Solución gráfica del problema de la programación lineal en $\mathbb{R}^3$

LIBARDO MORAN*

0. La programación lineal es en la actualidad una asignatura corriente y básica en carreras como economía, administración de empresas, contaduría, y similares, y hace parte del currículo de otras con mayor soporte matemático, como las ingenierías industrial y de sistemas. Por carecer de la adecuada base matemática, los estudiantes de las carreras mencionadas en primer término aprenden por lo general los métodos de solución, en particular el símplex, como un receta cuya esencia están lejos de comprender. Por otra parte, en la mayoría de los textos, por lo menos los conocidos en nuestro país, se da la interpretación geométrica del problema de la programación lineal y de su solución sólo para el caso de dos variables, y en muchos estudiantes queda la impresión de que se trata de un método particular para ese particular caso de dos variables. En realidad, el método símplex surgió como resultado de un enfoque fundamentalmente geométrico del problema de la programación lineal, y desde un punto de vista metodológico la presentación geométrica del problema y su solución por métodos «gráficos» en el espacio $\mathbb{R}^3$ tiene muchas ventajas, especialmente en cursos que, como decíamos al principio, no suponen una muy sólida base matemática.

A este respecto dice G. Strang [1]

* Profesor Asociado, Universidad Industrial de Santander. Bucaramanga, Colombia

El *método símplex*, que con justicia podemos llamar la idea más famosa de las matemáticas computacionales recientes, fue desarrollado por Dantzig como una manera sistemática de resolver problemas de programación lineal y, ya sea por suerte o por genio, constituye un suceso asombroso. [...] Me parece que la explicación geométrica es la que descubre el secreto del método. El primer paso consiste en localizar una esquina del conjunto factible. Esta es la «fase I», que suponemos ya está terminada. Lo importante del método está en la segunda fase, que consiste en *ir de esquina en esquina a lo largo de las aristas del conjunto factible*. En cada esquina podemos escoger cualquiera de la n aristas; algunas de estas aristas nos alejan de la x^* óptima pero desconocida y otras nos acercan a ella. Dantzig elige continuar el recorrido por una arista que garantice que el costo decrece. Esa arista conducirá a otra esquina con un costo menor, y no hay posibilidad de regresar a otra que sea más cara. En algún momento se alcanzará una esquina especial desde la cual todas las aristas van en dirección contraria a la deseada: se ha mimizado el costo. Esa esquina es el vector óptimo x^* y el método se detiene. El problema es traducir esta idea al álgebra lineal.

Las presentes notas tienen como objetivo presentar una sistematización del método gráfico para la solución del problema de la programación lineal en $\mathbb{R}^3$.

1. Sea dado el problema estándar de la programación lineal en $\mathbb{R}^3$:

Optimizar la función

$$f(x,y,z) = c_1x + c_2y + c_3z\ ,$$

sujeta a las restricciones

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \gtreqless b_1$$
$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \gtreqless b_2$$

$$a_{m1}x + a_{m2}y + a_{m3}z \gtreqless b_m$$

donde además se exige que $x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0$

Utilizando la notación matricial, y haciendo

$$C_{13} = [c_1\ c_2\ c_3]\ ,\ X_{31} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\ ,\ B_{m1} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ .. \\ b_m \end{bmatrix} \quad O_{31} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{m3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ & \cdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \end{bmatrix}$$

podemos plantear el problema anterior en forma compacta así

Optimizar

$$f = C_{13}\,X_{31}$$

sujeta a

$$A_{m3}\,X_{31} \triangleq B_{m1}$$

$$X_{31} \geqslant 0$$

(el signo $\triangleq$ indica que cada una de las desigualdades implicadas puede ser del tipo $\geqslant$, $\leqslant$ ó $=$; la escritura $X_{m1} \geqslant 0$ significa que entre las coordenadas del vector X_{m1} no hay números negativos; la matriz A_{m3} se conoce con el nombre de *matriz de coeficientes tecnológicos*).

Como se sabe, se demuestra (ver, por ejemplo, [2] ó [3]) que el conjunto de puntos que satisface un sistema de inecuaciones lineales en $\mathbb{R}^n$ es un conjunto poliédrico convexo (y en caso de ser acotado, simplemente un hiperpoliedro convexo), y que la solución -en el supuesto de que exista- del problema general de la programación lineal es siempre uno de los vértices (la calidad de ser solución puede ser «compartida» con toda una arista o toda una cara del conjunto poliédrico, pero el valor óptimo correspondiente de la función objetivo sí es único). En nuestro caso el conjunto factible será un conjunto poliédrico convexo en $\mathbb{R}^3$, que llamaremos *Sólido de Soluciones Factibles* (SSF). Los vértices del conjunto serán denominados *Soluciones Básicas Factibles* (SBF). Una vez construido el SSF podemos calcular el valor de la función objetivo en cada una de las SBF y hallar el valor óptimo (máximo o mínimo) por simple comparación. Si el número de vértices es muy grande* consideramos el vector

$$c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k}$$

que es el gradiente de la función objetivo f y por lo tanto marca la dirección de su crecimiento. El primer vértice (SBF) que toque la familia de planos $c_1x + c_2y + c_3z = k$ cuando se «deslice» perpendicularmente sobre el vector ∇f tomando $k \in (-\infty, \infty)$, será la solución del problema de minimización; el último lo será del de maximización. En la mayoría de los casos en $\mathbb{R}^3$ esos puntos se ven directamente en los dibujos, pero en caso de duda se puede actuar según lo explica Strang en el trozo citado, y de todas maneras la cantidad de puntos examinados será mínima.

2. Como se trata de representar una serie de inecuaciones del tipo

$$\alpha x + \beta y + \gamma z \lesseqgtr b,$$

se procede a detallar la forma como se representa una de ellas de manera genérica, y posteriormente cómo se encuentra la intersección de un conjunto de ellas.

Se parte de que el conjunto de puntos que satisfacen una inecuación de la forma dada, es un semiespacio limitado por el plano

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = b$$

el cual en adelante se denominará plano frontera y se simbolizará como πF.

Definición 1: Denomínase *plano frontera* (πF) a la ecuación asociada a una inecuación en el espacio tridimensional, o dicho de otra maneral al conjunto de puntos que satisfacen la inecuación en la igualdad•

Como en la práctica la casi totalidad de las inecuaciones son del tipo $\geqslant$ ó $\leqslant$, inecuaciones éstas que en adelante se denominarán débiles (por contemplar la igualdad), y lo que es más, teniendo presente que aun las del tipo $>$ ó $<$ se pueden transformar a $\geqslant$ ó $\leqslant$, respectivamente, en estas notas sólo se hará referencia a las inecuaciones débiles.

* «Pellizcando», por ejemplo, cada uno de los cuatro vértices de un tetraedro (que es un simplex tridimensional en el espacio $\mathbb{R}^3$) con cuatro planos convenientes tendríamos 12 esquinas; haciendo lo mismo con las últimas obtendríamos 36 vértices, luego 108, etc.

Definición 2: Denomínase *semiespacio solución* al conjunto de puntos en el espacio tridimensional que satisfacen una inecuación de la forma

$$\alpha x + \beta y + \gamma z \triangleq b \bullet$$

Definición 3: Denomínase SSF al poliedro convexo de puntos que satisfacen simultáneamente las inecuaciones de la forma

$$A_{m3} X_{31} \triangleq B_{m1}$$

Dada la condición de no negatividad, el SSF, en caso de existir, debe estar limitado al primer octante•

Definición 4: Denomínase *traza* (Tr) a la intersección de un plano frontera con los planos coordenados. Así por ejemplo, si se considera el plano frontera $\alpha x + \beta y + \gamma z = b$ para $x = 0$ (intersección con el plano YZ), resulta $\beta y + \gamma z = b$, que se denomina traza del plano frontera sobre YZ y se simbolizará en adelante como Tr/YZ•

El primer paso a dar consiste en representar el πF correspondiente a la inecuación dada, esto es, graficar $\alpha x + \beta y + \gamma z = b$.

Para ello se procede de la siguiente manera: se determinan los cortes con los ejes, si existen, así:

$x = 0,\ y = 0,$ entonces $z = b/\gamma$;
$x = 0,\ z = 0,$ entonces $y = b/\beta$;
$y = 0,\ z = 0,$ entonces $x = b/\alpha$.

Esto es, los puntos de corte son:

$(0,0,b/\gamma)$, $(0,b/\beta,0)$ y $(b/\alpha,0,0)$.

En caso de ser cero α, β ó γ, esto quiere decir que el plano correspondiente no corta los ejes X, Y ó Z, respectivamente.

Por ejemplo, $\alpha x + \gamma z = b$ no corta el eje Y, o sea que es un plano paralelo a dicho eje; y el plano $\beta y = b$ resulta ser paralelo al plano XZ. En caso de que $b = 0$ el plano pasa por el origen, y haciendo igual a cero cada una de las variables podemos tomar puntos en el plano determinado por los ejes de las dos restantes. Una vez que se tengan tres puntos, incluido el origen, podemos dibujar un triángulo «representante» del plano buscado.

Se hace énfasis en que a pesar de que una condición a satisfacer es la no negatividad de las variables, esto no implica que en determinado momento no se puedan tomar como referencia puntos donde una de sus componentes sea negativa. Una vez representadas las trazas (que proporcionan la orientación del πF), se procede a determinar el conjunto de puntos que satisfacen la inecuación fuerte asociada a la inecuación que se quiere representar, la cual puede simbolizarse mediante $\alpha x + \beta y + \gamma z \, \Delta b$, donde Δ debe interpretarse como $>$ ó bien $<$; si $b \neq 0$ se reemplaza el origen en la inecuación fuerte, resultando una desigualdad de la forma $0 \, \Delta \, b$, la cual o es absolutamente cierta o bien absolutamente falsa. En caso de ser cierta esto significa que el origen pertenece a la solución, y que el semiespacio solución lo contiene. En caso contrario el semiespacio solución no lo contiene y está ubicado al lado opuesto del πF. Si $b = 0$ se procede a reemplazar un punto arbitrario que no pertenezca al πF, preferiblemente uno que está ubicado sobre uno de los ejes coordenados, de la forma $(x_1, 0,0)$ ó $(0, y_1, 0)$ ó bien $(0,0,z_1)$. Si el punto elegido satisface la inecuación fuerte, quiere decir que el semiespacio solución lo contiene, y en caso contrario el semiespacio solución estará ubicado al lado opuesto al πF.

3. A continuacion se presenta un ejemplo numérico para mostrar cómo se obtiene el semiespacio solución, limitado por la condición de no negatividad de las variables. Se trata de determinar el conjunto de puntos que satisfacen la inecuación $x + 2y + 3z \leqslant 600$ con la condición $x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0$.

El πF correspondiente está dado por $x + 2y + 3z = 600$. Los cortes con los ejes son los puntos (600,0,0), (0,300,0), (0,0,200), y las trazas están dadas por:

$$Tr/XY : x + 2y = 600 \; ;$$
$$Tr/XZ : x + 3z = 600 \; ;$$
$$Tr/YZ : 2y + 3z = 600 \; .$$

La inecuación fuerte correspondiente a la dada resulta ser

$$x + 2y + 3z < 600 \; \bullet$$

Como $b = 600$ ($\neq 0$), se reemplaza el origen (0,0,0) en ella y resulta

$$0 < 600$$

que evidentemente es verdadero; por lo tanto el origen es parte de la solución. Considerando ahora $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$, y representando el conjunto de puntos pedidos, se tiene el sólido ABCO como solución. El sólido en mención aparece representado en la figura 1.

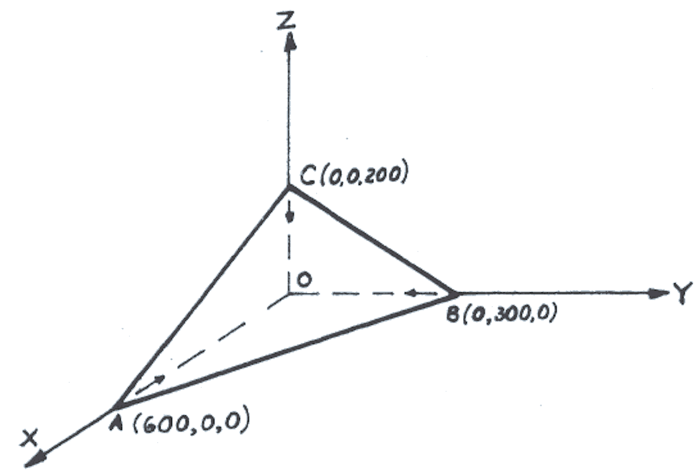

Figura 1

Considerando ahora la verdadera necesidad, que consiste en encontrar el SSF de un sistema de inecuaciones, se trata entonces de intersecar los semiespacios resultantes del sistema de inecuaciones dado. Esto debe llevarse a cabo tomando uno a uno cada semiespacio y limitando el sólido resultante cada vez.

4. Como ejemplo de aplicación, considérese el sistema de inecuaciones dado a continuación y obténgase el SSF correspondiente:

$$\begin{aligned} x + 3y + 6z &\leqslant 1200 \; ; \\ 6x + 3y + z &\leqslant 1200 \; ; \\ 3x + 6y + z &\geqslant 1200 \; ; \\ 3x + 6y + z &\geqslant 1200 \; ; \\ x, y, z &\geqslant 0 \; . \end{aligned}$$

Los planos fronteras correspondientes son:

$$\begin{aligned} x + 3y + 6z &= 1200 \qquad (\pi F_1) \; ; \\ 6x + 3y + z &= 1200 \qquad (\pi F_2) \; ; \\ 3x + 6y + z &= 1200 \qquad (\pi F_3) \; . \end{aligned}$$

Los cortes con los ejes resultan ser entonces:

πF_1: $P_1(0,0,200)$, $P_2(0,100,0)$ y $P_3(1200,0,0)$;
πF_2: $P_4(0,0,1200)$, $P_5(0,400,0)$ y $P_6(200,0,0)$;
πF_3: $P_7(0,0,1200)$, $P_8(0,200,0)$ y $P_9(400,0,0)$.

Trazas sobre los planos XY, XZ, YZ:

πF_1: $x + 3y = 1200$; $x + 6z = 1200$; $3y + 6z = 1200$
πF_2: $6x + 3y = 1200$; $6x + z = 1200$; $3y + z = 1200$;
πF_3: $3x + 6y = 1200$; $3x + z = 1200$; $6y + z = 1200$

Inecuaciones fuertes:

$$x + 3y\ 6z < 1200 \;;$$
$$6x + 3y + z < 1200 \;;$$
$$3x + 6y + z > 1200 \;.$$

Como $b \neq 0$ para todas ellas, entonces remplácese $(0,0,0)$ y analícese el resultado, así:

$0 < 1200$; (1)
$0 < 1200$; (2)
$0 > 1200$. (3)

Las desigualdades (1) y (2) resultan verdaderas, lo que se interpreta en el sentido de que $(0,0,0)$ pertenece al semiespacio solución. La falsedad de la desigualdad (3) implica que el origen se encuentra al otro lado del espacio solución.

Graficada cada una de las inecuaciones independientemente se tiene:

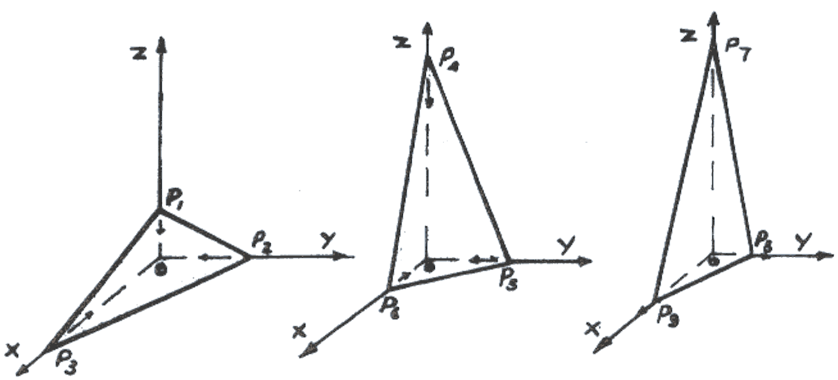

Figura 2

Aun cuando el orden para obtener el SSF no es estricto, en cuanto a qué inecuaciones se deben graficar inicialmente, se presenta aquí una secuencia para obtener el SSF dado por ACEFG, que se muestra en la figura 4.

Grafíquese πF_1 y πF_2. Se observa que D y G son puntos que pertenecen a ambos planos, por lo tanto estos dos puntos deben pertenecer a la recta intersección de los dos planos: la recta en referencia es DG. Como el origen satisface las dos primeras inecuaciones, entonces el SSF para estas es el dado por GIDHO (una especie de pirámide acostada), como se muestra en la figura 3.

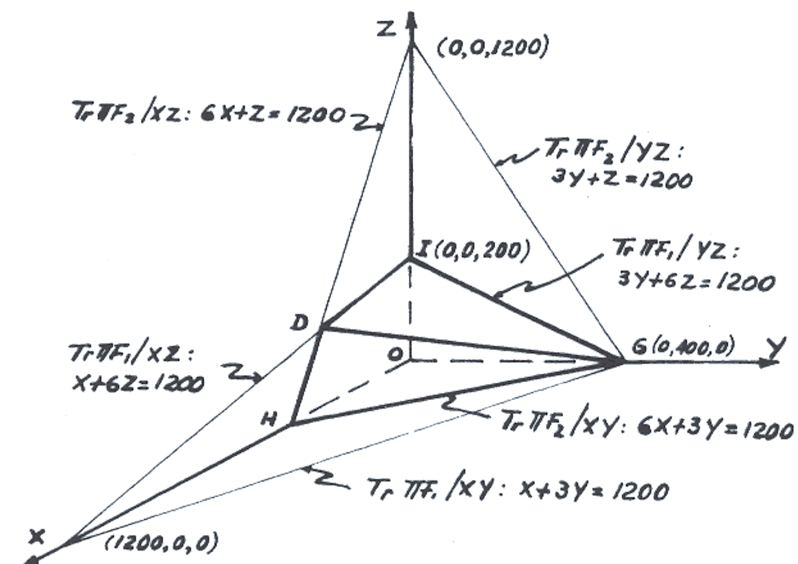

Figura 3

Obtenido este sólido se procede a limitarlo por la tercera inecuación, graficando inicialmente el πF_3 y buscando la intersección de éste con el sólido DIOHG, que resulta ser la porción de plano AFEC. Como el origen no satisface esta última inecuación, no debe satisfacer el SSF; por lo tanto, el conjunto convexo de puntos que remplazados en las inecuaciones las satisface en su totalidad es el poliedro AFECG.

La intersección del πF_3 c DIOHG se lleva a cabo de la siguiente manera:

Llámese A el punto intersección de las Tr/YZ de los πF_1 y πF_3, y sea B el punto intersección de las Tr/XZ de los mismos; únanse suavemente estos puntos, y llámese C el punto de corte de AB y GD; se puede observar que la recta AB sólo corta al sólido GIDOH en el tramo AC, ya que CB queda por fuera de él. Retíñase el tramo AC.

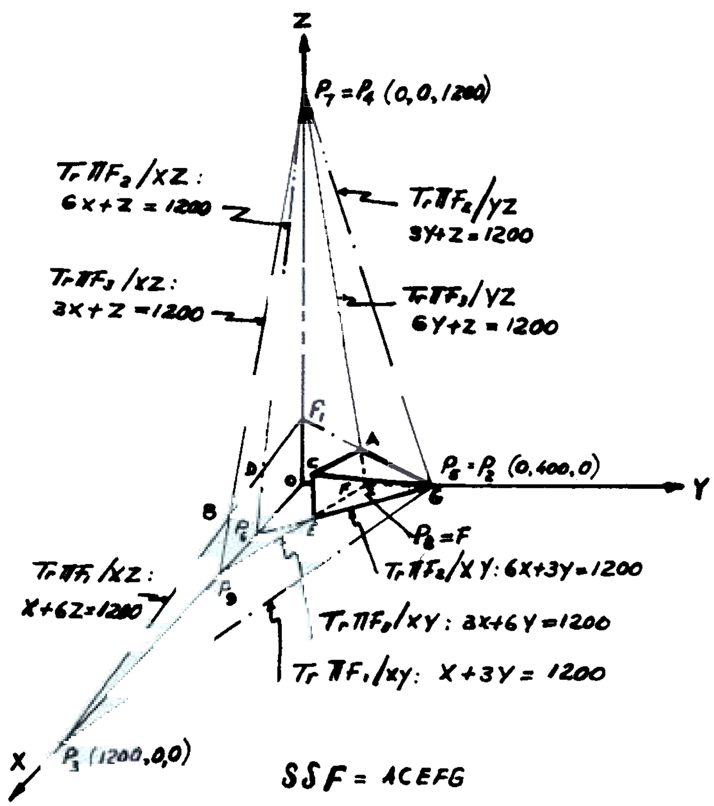

Figura 4

Llámese E la intersección de las Tr/XY de los πF_2 y πF_3; como $P_4 = P_7$ es un punto común a estos planos, entonces EP_4 es la recta intersección de ellos; únanse suavemente estos puntos: debe ocurrir que este segmento debe pasar por C, y sólo EC pertenece al sólido DIOHG; retíñase el tramo EC. Luego únanse AF y FE por líneas a trozos, para hacer énfasis en que éstas se encuentran en la parte posterior del sólido (no se ven). Resulta entonces el sólido ACEFG, como se muestra en la figura 4, donde se puede apreciar que ACEF pertenece al πF_3, ACG pertenece al πF_1 y CEG al πF_2.

Nótese que si la tercera inecuación fuese $3x + 6y + z < 1200$, la solución habría sido el sólido ACEFOIDH, Se aprecia la convexidad de los sólidos resultantes.

El paso siguiente consiste en determinar las coordenadas de los vértices A,C,E,F,G. Se debe proceder de la siguiente manera:

Las coordenadas de G y de F son conocidas, ya que corresponden a la de los puntos P_5 y P_8 respectivamente, esto es (0,400,0) y (0,200,0).

A es la intersección de las Tr/YZ de los πF_1 y πF_3, por lo tanto se debe resolver el sistema

$$\begin{aligned} 6y + z &= 1200\,, \\ 3y + 6z &= 1200\,, \end{aligned}$$

de donde se obtiene $y = 2000/11$, $z = 1200/11$, lo que permite afirmar que A tiene como coordenadas (0,2000/11, 1200/11). E es la intersección de las Tr/XY de los πF_2 y πF_3, lo que implica resolver el sistema

$$\begin{aligned} 6x + 3y &= 1200\,, \\ 3x + 6y &= 1200\,, \end{aligned}$$

de donde $x = y = 400/3$

Por lo tanto las coordenadas de E son (400/3, 400/3,0).

Por último: el vértice C es la intersección de πF_1, πF_2 y πF_3, lo que obliga a resolver el sistema

$$\begin{aligned} x + 3y + 6z &= 1200\,, \\ 6x + 3y + 2 &= 1200\,, \\ 3x + 6y + z &= 1200\,, \end{aligned}$$

de donde se obtiene $x = y = z = 120$; esto es, las coordenadas de C son (120,120,120).

Los vértices A,C,E,F,G son los puntos que hemos llamado *Soluciones Básicas Factibles* (SBF). De esta manera queda perfectamente definido el SSF. Si se tratara de obtener el máximo o el mínimo valor de una función, por ejemplo

$$f(x,y,z) = 500x + 250y + 100z \,,$$

vemos que

$$\nabla f = 500\vec{i} + 250\vec{j} + 100\vec{k} \,,$$

lo cual indica que la función objetivo crece con el crecimiento de cada una de las variables, pero más influida por x y menos por z. (Para mayor claridad se puede dibujar un triángulo representativo de alguno de los planos de la familia $c_1x + c_2y + c_3z = k$, para algún valor conveniente de k, preferiblemente un k menor en valor absoluto que el menor de los c_i). En la figura 4 podemos apreciar, en consecuencia, que el mejor candidato para el mínimo es el vértice F, mientras que para el máximo habría dos, las esquinas C y G. Al remplazar en $f(x,y,z)$ cada una de las SBF tenemos:

$$f(A) = f(0, \frac{2000}{11}, \frac{1200}{11}) = 56363 \,;$$

$$f(C) = f(120,120,120) = 102000 \,;$$

$$f(E) = f(\frac{400}{3} \; \frac{400}{8}, 0) = 100\,000 \,;$$

$$f(F) = f(0,200,0) = 50\,000$$

$$f(G) = f(0,400,0) = 100\,000$$

Se confirman, pues, nuestras sospechas, y quedan definitivamente como mínimo F y como máximo C.

5. Como ejemplo final, trate el lector de obtener el SSF correspondiente al sistema

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &\leq 1500 \,. \\ x + 2y + 3z &\leq 1500 \,, \\ 3x + 2y + z &\leq 1500 \,, \\ y &\leq 500 \,, \\ x &\leq y \\ x \geq 0,\; y \geq 0,\; z &\geq 0 \,, \end{aligned}$$

y constante que resulta ser de la forma que aparece en la figura

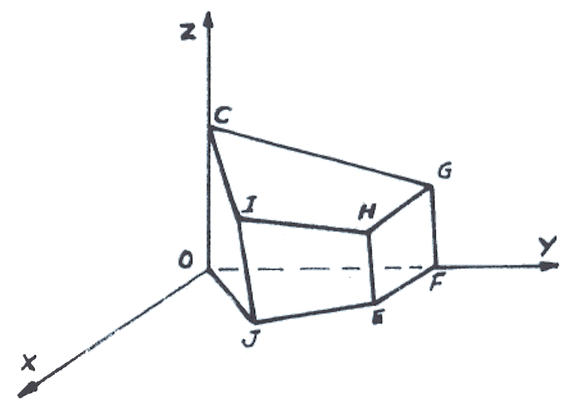

Figura 5

donde: O(0,0,0), J(300,300,0) E(500/3, 500,0), F(0,500,0). G(0,500,500/3), H(125,500,125), I(250,250,250), C(0,0,500).

Una vez dada una determinada función objetivo, se puede analizar la dirección de desplazamiento de la correspondiente familia de planos y determinar los vértices candidatos para maximizar y minimizar•

REFERENCIAS

[1] STRANG Gilbert. Algebra Lineal y sus Aplicaciones. Fondo Educativo Interamericano Nueva York, 1982.

[2] LANCASTER Kelvin. Mathematical Economics. The Macmillan Company, New York, 1968.

[3] NIKAIDO Hukukane. Convex Structures and Economic Theory. Academic Press, New York, 1968.