Revista INTEGRACION
Departamento de Matemáticas UIS
Vol. 5, No. 2, julio-diciembre 1987

Para todo, para alguno, para casi todo

YU TAKEUCHI*

1. MOTIVACION

En nuestro trabajo diario nos encontramos frecuentemente con expresiones afectadas por calificativos o «condiciones» tales como «**para todo**», «**para alguno**», «**en a**», «**cuando x tiende a ...**», «**con probabilidad 1**», etc. Cuando las expresiones son compuestas, obtenidas mediante el uso de los conectivos usuales, su validez depende de la forma como se combinen los **conectivos** y las «**condiciones**» anteriores. Los estudiantes cometen errores de razonamiento conmutando arbitrariamente el conectivo con la «condición», o distribuyendo la «condición» indiscriminadamente con respecto a los conectivos, siendo esta práctica una de las dificultades principales para el aprendizaje de la Matemática. No sé por qué razón casi nunca se menciona este delicado problema en los textos introductorios de Matemáticas, ni se hace suficiente énfasis en el comportamiento de conectivos y «**condiciones**», para que los estudiantes aprendan a manejarlos.

Por ejemplo, sean

P : Hay felicidad
Q : Hay fortuna.

Tomemos como «**condición**»: «Más allá de las montañas». Se observa que «más allá de las montañas» es **distributivo** con respecto al conectivo «y», es decir,

* Profesor Titular, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá.

«Más allá de las montañas hay felicidad» y «Más allá de las montañas hay fortuna»

si y sólo si

«Más allá de las montañas, hay felicidad y fortuna»

Sin embargo, «No más allá de las montañas hay felicidad», no es equivalente con «Más allá de las montañas no hay felicidad», poniéndose de presente la no conmutatividad del conectivo «NO» con la condición «más allá de las montañas».

Vamos a suponer en adelante que P, Q son proposiciones condicionales con al menos la variable x libre y que X es un conjunto referencial (¡no vacío!) en el cual x toma valores. Por ejemplo si $X = \mathbb{R}$, podemos tener

P : «La función f es continua en x» , ó

Q : «Existe una vecindad de x contenida en A».

El conjunto de los elementos de X que hacen verdadera la proposición condicional P lo notaremos por:

$$x \in X \mid P \} \quad \text{o simplemente} \quad x \mid P \}$$

Así por ejemplo tendremos $\{ x \mid f$ es continua en $x \}$, o $\{ x \in \mathbb{R} \mid$ existe una vecindad de x contenida en $A \}$.

2. «PARA TODO», «PARA ALGUNO», «EN A», «CUANDO X TIENDE A ...», etc.

I. PARA TODO

Decir que «la proposición condicional P es verdadera **para todo** x», significa

$$\{ x \mid P \} = X, \qquad \text{y se nota } \forall x\, P \qquad (1)$$

Si «∀x P» y «∀x Q» o sea que «P es verdadera **para todo x**» y «Q es verdadera **para todo x**, entonces

$$x \mid P \} = X \qquad x \mid Q \} = X \qquad (2)$$

Luego

$$\{ x \mid P \text{ y } Q \} = \{ x \mid P \} \cap \} \{ x \mid Q \} = X \cap X = X \qquad (3)$$

Por lo tanto «P y Q es verdadera para todo x

Recíprocamente, a partir de (3) se obtiene (2), lo cual significa

$$\forall x\, P \ \text{ y } \ \forall x\, Q \qquad \text{si y sólo si} \qquad \forall x\, (P \ \text{ y } \ Q).$$

O sea que «∀x» (Para todo x) es distributiva con respecto a la conectiva «y» •

Sabemos que $\forall x \neg P$ (Para todo x, no P) significa

$$\{ x \mid \neg P \} = X. \qquad (4)$$

Luego $\{ x \mid P \} = X - X = \emptyset$, o sea

$$\{ x \mid P \} \neq X \qquad (5)$$

lo cual significa $\neg(\forall x\, P)$.

Sin embargo, $\neg (\forall x\, P)$ no implica $\forall x\, (\neg P)$, ya que evidentemente (5) no implica (4).

Por ejemplo, la negación de «f(x) es continua para todo x» no implica que «para todo x, f(x) no es continua».

Se deduce que ¬ (NO) y ∀x (para todo x) no son conmutables •

Si «P, para todo x» ó «Q, para todo x», entonces

$$x \mid P \} = X \ \text{ ó } \ x \mid Q \} = X, \qquad (6)$$

luego:

$$\{ x \mid P \ \text{ ó } \ Q \} = \{ x \mid P \} \cup \{ x \mid Q \} = X \qquad (7)$$

En la simbología formal, sería: $(\forall x\, P) \vee (\forall x\, Q) \Rightarrow \forall x\, (P \vee Q)$, o sea que «P ó Q, para todo x».

Evidentemente, (7) no implica (6), en consecuencia

«P ó Q, para todo x» NO implica «P, para todo x» ó «Q, para todo x».

$((\forall x)\, (P \vee Q)$ NO implica $(\forall x\, P) \vee (\forall x\, Q))$, o sea que «∀x» NO es distributivo con respecto a «ó».

Por ejemplo, «$f(x) \geqslant 0$ ó $f(x) < 0$, **para todo x**», pero esto no implica que «$f(x) \geqslant 0$ **para todo x**», ó «$f(x) < 0$ **para todo x**» •

Si «P implica Q, **para todo x**», entonces

«P, **para todo x**» implica «Q, **para todo x**»,

puesto que si «P implica Q, **para todo x**» y «P, **para todo x**», entonces «P y P implica Q, **para todo x**» por la distributividad de «**para todo**» con respecto a «y»; por lo tanto se tiene «Q, **para todo x**».

El recíproco no es verdadero, luego «para todo» **no distribuye** con respecto a la «**implicación**».

Por ejemplo, «$f(x) > 0$, para todo x» implica «$f(x-1) > 0$ para todo x». Sin embargo, tomando $f(x) = x$ no se cumple «$x > 0$ implica $x-1 > 0$, para todo X » •

Ejemplo 1

Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función real y continua, si $f(x) \neq 0$, para todo x, demostrar que f es una función positiva ó f es una función negativa.

Un estudiante resolvió el problema así:

Supongamos que no se cumple la proposición «f es un función positiva», o sea, se tiene **la negación de** «$f(x) > 0$, **para todo x**» ; (8)
Entonces

« $f(x) \leqslant 0$, **para todo x**». (9)

Como

«$f(x) \neq 0$, **para todo x**» (10)

entonces, de (9) y (10) se obtiene

«$f(x) < 0$, **para todo x**, (11)

esto es, «f es una función negativa»

Un buen estudiante sabe que anda algo mal en el desarrollo anterior, puesto que no se utilizó en él la **continuidad** de la función. En efecto, el paso de (8) a (9) **es falso** (obsérvese que el paso de (9) y (10) a (11) ¡es bueno!), sin embargo es fácil engañar a los estudiantes regulares con esta demostración•

Ejemplo

Demostrar: $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$

Demostración: Sea $x \in \overline{A \cup B}$; entonces, «TODA vecindad V de x interseca con $(A \cup B)$, o sea, $V \cap (A \cup B) \neq \varnothing$ » ; esto es, «$V \cap A \neq \varnothing$» ó «$V \cap B \neq \varnothing$», para TODA vecindad V de x; (12)

luego

«$V \cap A \neq \varnothing$, **para toda** vecindad V de x» ó «$V \cap B \neq \varnothing$ **para toda** vecindad V de x». (13)

Por lo tanto se tiene que $x \in \overline{A}$ ó $x \in \overline{B}$, o sea que $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$; luego $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$.

A pesar de que la demostración anterior no sirve por haber distribuido «**para todo**» con respecto a «o» en el paso de (12) a (13), este error es muy común para los estudiantes del curso de Análisis Matemático. Aún más, cuesta mucho trabajo convencer a los alumnos de que su razonamiento no es correcto •

II. PARA ALGUNO

«P, **para algún x**» quiere decir que

$$\{ x \mid P \} \neq \varnothing \qquad (14)$$

En lógica formal se acostumbra escribir «$\exists x$» (existe x) en vez de «**para algún x**».

Si «P, **para algún x**» ó «Q, **para algún x**», entonces

$$\{x \mid P\} \neq \varnothing \quad \text{ó} \quad \{x \mid Q\} \neq \varnothing \qquad (15)$$

luego

$$\{x \mid P \ \text{ó} \ Q\} = \{x \mid P\} \cup \{x \mid Q\} \neq \varnothing \qquad (16)$$

por lo tanto se tiene que «P ó Q, **para algún x**»

Recíprocamente, a partir de (16) se obtiene (15), lo que significa que «**para alguno**» sí es **distributivo** con respecto a «ó». En simbolismo formal sería:

$$(\exists x\, P) \vee (\exists x\, Q) \iff (\exists x)\,(P \vee Q) \ \bullet$$

De manera análoga a la anterior, se observa que «P y Q, **para alguno**» implica «P, **para alguno**» y «Q, **para alguno**». Sin embargo, «P, **para alguno**» y «Q, **para alguno**» no implica «P y Q, **para alguno**». Por ejemplo, consideremos dos conjuntos A y B disyuntos con $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$; entonces tenemos que «$x \in A$, para algún x» y «$x \in B$, para algún x»; sin embargo no se cumple que «$x \in A$ y $x \in B$, **para algún** x •

La negación de «P, **para alguno**» implica que «No P, **para alguno**»; sin embargo el recíproco no es válido, o sea: «No P, para alguno» **no implica la negación de** «P, para alguno». Por ejemplo, «$f(x) \neq 0$, para algún x» no implica la negación de «$f(x) = 0$, para algún x» (esto es, «$f(x) \neq 0$, para todo x») •

Si «P implica Q, **para alguno**» entonces tenemos que «P, **para alguno**» implica «Q, **para alguno**».

El recíproco no es verdadero. Por ejemplo, «$f(x) = 0$, para **algún** x» implica «$f(x-1) = 0$ para **algún** x». Sin embargo, tomando $f(x) = x$ no es válida la afirmación «$x = 0$ implica $x - 1 = 0$, para **algún** x».

Es simbolismo formal: $\langle (\exists x)(P \Rightarrow Q) \rangle \Longrightarrow \langle (\exists x\, P) \Rightarrow (\exists x\, Q) \rangle$, pero no vale el recíproco •

III. «En a»

«P, en $x = a$» quiere decir que

$$a \in \{ x \mid P \}, \text{ o sea que } P(a) \text{ es verdadera.} \tag{17}$$

Observamos inmediatamente que «P, en a» y «Q, en a» si y sólo si «P y Q, en a», o sea que «en a» es **distributivo** con respecto a «y».

Se observa fácilmente que «en a» **distribuye** tanto con respecto a la «o» como a la «implicación» •

Supongamos que «P, en a» no se cumple, esto es:

$$a \notin \{ x \mid P \tag{18}$$

entonces tenemos que

$$\in \{ x \mid \text{no } P \}, \tag{19}$$

o sea, «No P, en a». Recíprocamente, (19) implica (18), por lo tanto la «negación» es conmutable con la condición «en a» •

IV. CUANDO x TIENDE A.

La condición «cuando $x \to c$» es mucho más complicada que las anteriores «para todo», «para alguno» y «en a», pues «cuando $x \to c$» quiere decir «para todo $x \neq c$ **suficientemente cercano** al punto c», apareciendo el concepto ambiguo de «estar suficientemente cercano» , en el cual descansa la filosofía básica del cálculo precisada originalmente por Cauchy. Este concepto del acercamiento puede interpretarse como

«para todo $x \neq c$ de alguna vecindad del punto c», o sea:
«pata todo $x \in (c-\delta, c+\delta) - \{c\}$, para **algún** δ ».

Así, la condición «P, cuando $x \to c$» puede expresarse, en términos conjuntistas, como sigue:

$$x \mid P \} \supseteq (c-\delta, c+\delta) - \{ c \}, \text{ para algún } \delta \tag{20}$$

Sea X un conjunto (universal) que contiene a alguna vecindad del punto «c»; consideremos la familia F de todos los subconjuntos A de X tales que

$$A \supseteq (c-\delta, c+\delta) - \{ c \quad \text{para algún } \delta \text{ ;} \tag{21}$$

entonces la condición (20) también puede expresarse por

$$\{ x \mid P \} \in F \tag{22}$$

La familia F es **un filtro** en X, el cual está caracterizado por las tres propiedades siguientes:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(i)} & \emptyset \notin F \text{;} \\ \text{(ii)} & A, B \in F, \text{ entonces } A \cap B \in F \text{;} \\ \text{(iii)} & A \in F \text{ y } B \supset A, \text{ entonces } B \in F \end{array}\right\} \tag{23}$$

Ahora discutiremos la **conmutabilidad** y/o **distributividad** de la condición «cuando $x \to c$» con los conectivos «y», «o», «negación» e «implicación».

«Cuando $x \to c$» es **distributivo** con respecto a «y».

En efecto, si «P, cuando $x \to c$» y «Q, cuando $x \to c$», entonces

$$\{x \mid P\} \in \mathcal{F} \quad y \quad \{x \mid Q\} \in \mathcal{F}$$

Por la propiedad (ii) de los filtros, tenemos que

$$\{x \mid P \text{ y } Q\} = \{x \mid P\} \cap \{x \mid Q\} \in \mathcal{F},$$

o sea que «P y Q, cuando $x \to c$». El recíproco también es válido por la propiedad (ii) del filtro $\mathcal{F}$ •

Si «P, cuando $x \to c$» ó «Q, cuando $x \to c$» entonces

$$\{x \mid P\} \in \mathcal{F} \quad ó \quad \{x \mid Q\} \in \mathcal{F}$$

Tenemos

$$\{x \mid P \text{ ó } Q\} \supseteq \{x \mid P\} \qquad \{x \mid P \text{ ó } Q\} \supseteq \{x/Q\};$$

por la propiedad (iii) del filtro $\mathcal{F}$ se tiene que

$$\{x \mid P \text{ ó } Q\} \in \mathcal{F};$$

por lo tanto tenemos que «P ó Q, cuando $x \to c$».

El recíproco no es cierto, esto es, «P ó Q, cuando $x \to c$» no garantiza que «P, cuando $x \to c$» ó «Q, cuando $x \to c$». Por ejemplo, se tiene siempre que «$f(x) \geq 0$ ó $f(x) < 0$, cuando $x \to c$»; sin embargo, no siempre es válida «$f(x) \geq 0$, cuando $x \to c$» ó «$f(x) < 0$, cuando $x \to c$», ya que $f(x)$ puede tomar valores positivos y valores negativos en cualquier vecindad del punto c, como el caso de $f(x) = \operatorname{sen} \dfrac{1}{x - c}$ •

Supongamos que «No P, cuando $x \to c$», o sea

$$\{x \mid \text{No } P\} \in \mathcal{F}. \tag{24}$$

Si se tuviera «P, cuando $x \to c$», entonces, de (22) y (24) y utilizando la propiedad (ii) del filtro $\mathcal{F}$, se tendría que

$$\varnothing = \{x \mid P \text{ y No } P\} = \{x \mid P\} \cap \{x \mid \text{No } P\} \in \mathcal{F}$$

lo cual es imposible por la propiedad (i) del filtro $\mathcal{F}$. Por lo tanto se debe tener la negación de «P, cuando $x \to c$» .

El recíproco no es correcto, esto es, la negación de «P, cuando $x \to c$» no implica «No P, cuando $x \to c$». Por ejemplo, la negación de «$f(x) \geq 0$, cuando $x \to c$» no implica «$f(x) < 0$, cuando $x \to c$» •

Si «P implica Q, cuando $x \to c$» entonces «P, cuando $x \to c$» implica «Q, cuando $x \to c$». En efecto, si «P implica Q, cuando $x \to c$» y «P, cuando $x \to c$», entonces tenemos que

$$\text{«P implica Q y P, cuando } x \to c\text{»}, \tag{25}$$

por la distributividad de «cuando $x \to c$» con respecto a «y» . De (25) se obtiene que «Q, cuando $x \to c$».
El recíproco no es válido, esto es, a partir de («P, cuando $x \to c$» implica «Q, cuando $c \to c$») no siempre se concluye que «P implica Q, cuando $x \to c$». Por ejemplo, para la función f definida por $f(y) = 1$ si $y \neq 0$, $f(0) = 0$, tenemos:

$$(\text{«}|y| < |x| \text{ cuando } x \to 0\text{» implica «}|f(y)| < |x|, \text{ cuando } x \to 0\text{»}),$$

pero no se cumple «$|y| < |x|$ implica $|f(y)| < |x|$, cuando $x \to 0$».

De la misma manera, podemos discutir la distributividad de la condición «cuando $x \to \infty$» con respecto a los demás conectivos •

V. CON PROBABILIDAD 1

Consideremos $X = [0, 1]$; sea μ la medida de Lebesgue; si

$$\mu\{x \mid P\} = 1, \tag{26}$$

decimos que «P, con probabilidad 1». Si $\mathcal{F}$ es la familia de todos los subconjuntos medibles A de X tales que $\mu(A) = 1$, o sea

$$\mathcal{F} = \{A \subseteq X \mid \mu(A) = 1\}$$

entonces $\mathcal{F}$ es un filtro en X, puesto que $\mathcal{F}$ satisface las tres propiedades (i), (ii) y (iii) dadas en (23). «P, con probabilidad 1», puede expresarse:

$$\{x \mid P\} \in \mathcal{F} \tag{27}$$

Por lo tanto, la conmutabilidad y/o distributividad de la condición «con probabilidad 1» con los conectivos, es exactamente igual al caso de «cuando x tiende a ... » •

VI. PARA CASI TODO

En los casos IV y V las condiciones «cuando x tiende a ... » y «con probabilidad 1», pueden expresarse por «$\{x \mid P\} \in F$», usando un filtro F en X. Sea F^* un ultrafiltro en X, o sea, una familia de subconjuntos de X que satisface, además de las tres propiedades de filtro dadas en (23), la cuarta propiedad siguiente:

(iv) Si $A \subseteq X$ entonces $A \in F^*$ ó $A^c = X - A \in F^*$ (28)

Decimos que

$$\boxed{\text{«P, para casi todo x» si y sólo si } \{x \mid P\} \in F^*.} \quad (29)$$

Como una aplicación del axioma de Zorn, sabemos que un filtro F en X siempre puede extenderse a un ultrafiltro F^* en X; por esta razón las condiciones «cuando x tiende a ...», «con probabilidad 1» pueden ser extendidas a una condición «para casi todo x» •

«Para casi todo x» es conmutable con la negación y distribuye con respecto a todos los conectivos binarios.

En efecto, «para casi todo x» distribuye con respecto a «y», ya que un ultrafiltro F^* es un filtro •

Supongamos que «P ó Q, para casi todo x», esto es:

$$x \mid P \text{ ó } Q = x \mid P\} \cup \{x \mid Q\} \in F^*$$

Por la propiedad (iv) del ultrafiltro F^* se tiene que

$$\{x \mid P\} \in F^* \quad \text{ó} \quad x \mid Q\} \in F^*$$

o sea que «P, para casi todo x» ó «Q, para casi todo x. Por lo tanto, para casi todo x» distribuye con respecto a «o» •

Supongamos que «P, para casi todo x» no se cumple, esto es:

$$\{x \mid P\} \notin F^*.$$

Como $\{x \mid P\} \cup \{x \mid \text{No } P\} = \{x \mid P \text{ ó No } P\} = X \in F^*$, entonces por la propiedad (iv) del ultrafiltro F^*, se tiene que

$$\{x \mid \text{No } P\} \in F^*$$

o sea que «No P, para casi todo x. Por lo tanto, «para casi todo x» es conmutable con la negación •

Supongamos que «P, para casi todo x» implica «Q, para casi todo x». Si no fuera verdadero «P implica Q, para casi todo x», entonces, por la conmutabilidad del «para casi todo» con la negación, se tendría:

«negación de (P implica Q), para casi todo x»,

o sea:

«(P y No Q), para casi todo x»

Como «para casi todo» distribuye con respecto a «y», se tendría:

«P, para casi todo x» y «No Q, para casi todo x».

Por la conmutabilidad de «para casi todo» con la negación,

«P, para casi todo x, y negación de «Q, para casi todo x»

Esto es imposible, ya que «P, para casi todo x» implica «Q, para casi todo x». (¡absurdo!). Por lo tanto, se debe tener que «P implica Q, para casi todo x» •

Como la «equivalencia» es la «implicación» en ambos sentidos, se tiene que «para casi todo» también distribuye con respecto a la equivalencia.

La matemática basada en la condición «para casi todo» es, sin duda alguna, la teoría más fácil de manejar gracias a su conmutabilidad y/o distributividad con todos los conectivos.

Observación:

Si $a \in X$ entonces $F^*_a = \{A \subseteq X \mid a \in A\}$ es un ultrafiltro en X, llamado «ultrafiltro principal». La condición «P, en a» puede expresarse: $\{x \mid P\} \in F^*_a$. Por esta razón, la condición «P, en a» conmuta y/o distribuye con todos los conectivos.

Tabla de conmutatividad y distributividad

Conectivo / condición	y	o	negación	implicación	equivalencia
para todo	$\Longleftrightarrow$	$\dashrightarrow$	$\dashleftarrow$	$\dashleftarrow$	$\dashleftarrow$
para alguno	$\dashleftarrow$	$\Longleftrightarrow$	$\dashrightarrow$	$\dashleftarrow$	$\dashleftarrow$
en a	$\Longleftrightarrow$	$\Longleftrightarrow$	$\Longleftrightarrow$	$\Longleftrightarrow$	$\Longleftrightarrow$
cuando x $\to$	$\Longleftrightarrow$	$\dashrightarrow$	$\dashleftarrow$	$\dashleftarrow$	$\dashleftarrow$
con prob. 1	$\Longleftrightarrow$	$\dashrightarrow$	$\dashleftarrow$	$\dashleftarrow$	$\dashleftarrow$
para casi todo	$\Longleftrightarrow$	$\Longleftrightarrow$	$\Longleftrightarrow$	$\Longleftrightarrow$	$\Longleftrightarrow$

Convenciones:

$\Longleftrightarrow$ «**condición**» y «**conectivo**» son conmutables o distribuyen libremente.

$\dashrightarrow$ «(P, condición) conectivo (Q, condición)» **implica** «(P, conectivo, Q), condición». «negación de (P, condición)» **implica** «No P, condición».

Implicación en el sentido contrario.

3. ϑ-CONDICION Y ULTRAFILTRO

Vimos que **una condición** caracterizada por **un ultrafiltro** en X conmuta y/o distribuye siempre con todos los conectivos; veremos ahora el recíproco.

Sea ϑ una familia no-vacía de subconjuntos de X; podemos hablar de «ϑ-condición» (notada «x - ϑ») en el siguiente sentido:

«P, para x-ϑ» quiere decir que $\{x \mid P\} \in \vartheta$

Por ejemplo, si $\vartheta = \{X\}$ entonces ϑ-condición es la condición «**para todo x**»; si $\vartheta = \{A \subseteq X \mid A \neq \varnothing\}$ entonces se obtiene la condición «**para algún x**»;

si $\vartheta = \{A \subseteq X \mid a \in A\}$ entonces se obtiene la condición «**en a**»; obtenemos la condición «**cuando x tiende a ...**» al escoger ϑ como un filtro en X; se obtiene la condición «**salvo en un número finito** de puntos» escogiendo $\vartheta = \{A \subseteq X \mid X - A$ es un conjunto finito $\}$, etc.

Teorema: ϑ-condición distribuye con respecto a «y» y conmuta con la negación, si y sólo si ϑ es un ultrafiltro en X.

Demostración:

(i) Supongamos que $A, B \in \vartheta$. Sean P, Q proposiciones condicionales tales que $\{x \mid P\} = A$, $\{x \mid Q\} = B$; entonces se cumple que «P, para x-ϑ» y «Q, para x-ϑ». Por la distributividad de la ϑ-condición con respecto a «y» se tiene que «P y Q, para x-ϑ», o sea:

$$x \mid P \text{ y } Q\} = \{x \mid P \quad \cap \{x \mid Q\} = A \cap B \in \vartheta .$$

(ii) Supongamos que $A \in \vartheta$, y, $B \supset A$. Sean P, Q proposiciones condicionales tales que $\{x \mid P\} = A$, $\{x \mid Q\} = B$; entonces,

$$x \mid P \text{ y } Q\} = \{x \mid P\} \cap \{x \mid Q\} = A \cap B = A ,$$

luego tenemos que «P y Q, para x-ϑ». Por la distributividad de la ϑ-condición con respecto a «y» se tiene que:

«P, para x-ϑ» y «Q, para x-ϑ».

Por lo tanto,

$$A = \{x \mid P\} \in \vartheta \quad \text{y} \quad B = \{x \mid Q\} \in \vartheta .$$

(iii) Supongamos que $\varnothing \in \vartheta$ y llegaremos a un absurdo.

Sea P una proposición condicional tal que $x \mid P\} \in \vartheta$. Como

$$\varnothing = \quad x \mid P \text{ y No } P$$

entonces se tendría que «P y No P, para x-ϑ. Por la distributividad de la ϑ-condición con respecto a «y», tendríamos que

«P, para x-ϑ» y «No P, para x-ϑ» ,

luego:

«P, para x-ϑ y la **negación** de «P, para x-ϑ» ,
lo cual es **absurdo**. Por lo tanto se debe tener que $\emptyset \notin \vartheta$.

De (i), (ii) y (iii) sabemos que ϑ **es un filtro en X** •

(iv) Sean A un subconjunto de X, P una proposición condicional tal que $\{ x \mid P \} = A$. Si $A \notin \vartheta$ entonces tenemos la **negación** de «P, para x-ϑ». Por la conmutabilidad de la ϑ-condición con la «**negación**» obtenemos que «No P, para x-ϑ», esto es,

$$A^c = X - A = \{ x \mid \text{No } P \} \in \vartheta$$

Por lo tanto, ϑ es un **ultrafiltro** en X ■

Observación:

Si una ϑ-condición distribuye para «y» en ambos sentidos ($\Leftrightarrow$), y además, «No P, para x-ϑ» **implica la negación** de «P, para x-ϑ» ($\leftarrow$), entonces ϑ es un **filtro** en X •

Corolario 1.

Si una ϑ-condición es conmutable con «negación» y distribuye con respecto a «y» entonces esta ϑ-condición distribuye con respecto a **todos los conectivos binarios.**

En efecto, como ϑ es un **ultrafiltro** en X, entonces la ϑ-condición es distributiva con todos los conectivos binarios •

Corolario 2.

Una ϑ-condición es conmutable y/o distributiva con todos los conectivos si y sólo si ϑ es un **ultrafiltro** en X •

Ejemplos:

(i) Sea X un conjunto no vacío, $a \in X$. La condición «en a» es conmutable y/o distributiva con todos los conectivos, ya que «en a» es una ϑ-condición con $\vartheta = \{ A \subseteq X \mid a \in A \}$, y ϑ es un **ultrafiltro principal** en X.

(ii) Sea $X = \mathbb{N}$; la condición «cuando $n \to \infty$ » no es conmutable con la «**negación**», puesto que ésta es una ϑ-condición donde $\vartheta = F_r$ (el filtro de Fréchet), y F_r no es ultrafiltro en $\mathbb{N}$.

(iii) Sea $X = \mathbb{N}$; la condición «**para casi todo n**» es conmutable con la negación y distribuye con respecto a todos los conectivos binarios.

(iv) Se obtiene la condición «para todo $x \in X$» al considerar $\vartheta = \{ X \}$; como $\vartheta = \{ X \}$ es un **filtro** en X, pero ϑ no es un ultrafiltro, por lo tanto la condición «**para todo** $x \in X$» **no es conmutable** con la negación •

ORAS RECOMENDADAS SOBRE EL TEMA

[1] MUÑOZ José M. *Teoría de Conjuntos.* Universidad Nacional de Colombia, 1983.

[2] LIPSCHUTZ Seymour. *Matemáticas Finitas.* Colección Schaum, 1975.

[3] TAKEUCHI Yu. *Métodos Analíticos del Análisis No-estándar.* Universidad Nacional de Colombia, próximo a publicarse.