Revista INTEGRACION
Departamento de Matemáticas UIS
Vol. 4, No. 1, enero-junio 1986

Funciones armónicas en el círculo

YU TAKEUCHI*

1. INTEGRAL DE POISSON [3]

Una función de dos variables reales $u(x,y)$ se llama «armónica» si satisface la ecuación de Laplace:

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

En el presente artículo se va a tratar de funciones armónicas en el círculo unitario U con centro en 0:

$$U = \{ (x,y)/x^2 + y^2 < 1 \},$$

luego es conveniente emplear las coordenadas polares (r, θ) en lugar de las coordenadas cartesianas (x, y), así que

$$U = \{ (r, \theta)/0 \leqslant r < 1 \} \qquad \text{(el círculo abierto)},$$

$$\bar{U} = \{ (r, \theta)/0 \leqslant r \leqslant 1 \} \qquad \text{(el círculo cerrado)}.$$

Si $u(r, \theta)$ es armónica en el círculo cerrado $\bar{U}$, entonces se obtiene, como una aplicación de la fórmula integral de Cauchy, la conocida fórmula integral de Poisson:

* Profesor Titular, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá.

$$u(r, \theta) = \int_{-\pi}^{\pi} P_r(t - \theta) \, . \, u(1, t) \, dt \quad , \tag{1}$$

donde

$$P_r(t) = P_r(-t) = \frac{1}{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r \, . \cos t + r^2} \qquad \text{(el núcleo de Poisson)} \bullet$$

Dada una función $f(t)$ integrable en $[-\pi, \pi]$, la *«transformada de Poisson de f»* es:

$$P[f] \, (r, \theta) = F(r, \theta) = \int_{-\pi}^{\pi} P_r(t - \theta) \, . \, f(t) \, dt \quad . \tag{2}$$

Sabemos que $P[f] = F(r, \theta)$ es *«armónica* en U» •

Problema de Dirichlet en U

Dada $f(t)$ integrable en $[-\pi, \pi]$, se trata de encontrar una función $u(r, \theta)$ que satisfaga:

$$\left.\begin{array}{l} \nabla^2 u = 0 \quad \text{en} \quad U \quad (u(r, \theta) \text{ es armónica en U}), \\ \lim\limits_{r \to 1^-} u(r, \theta) = f(\theta) \quad \text{(Condición de Frontera).} \end{array}\right. \tag{3}$$

Si se supone que la función $u(r, \theta)$ es armónica en el círculo cerrado $\overline{U}$, entonces la fórmula integral de Poisson resuelve inmediatamente el problema de Dirichlet en el círculo, con la condición de frontera:

$$\lim_{r \to 1^-} u(r, \theta) = u(1, \theta) \, . \tag{4}$$

Por esta razón, el problema de Dirichlet no es trivial cuando $u(r,\theta)$ no es armónica sobre la circunferencia $r = 1$, siendo ésta armónica solamente en el interior del círculo $r < 1$. Se conocen varios métodos para abordar al problema de Dirichlet en el círculo U •

Método de Fourier [6]

Se resuelve la ecuación diferencial de Laplace por el *método de variables separables* usando las coordenadas polares (r, θ); así se obtiene la solución del problema (3) bajo la condición adicional de que $f(t)$ sea de *variación acotada* en $[-\pi, \pi]$. La condición de frontera, en este caso, tomará la siguiente forma:

$$\lim_{r \to 1^-} u(r, \theta) = \frac{1}{2}(f(\theta^+) + f(\theta^-)) \bullet$$

Función Delta de Dirac [8]

Se observa que el núcleo de Poisson satisface las siguientes propiedades:

(i) $P_r(t) \geqslant 0$ para todo $t \in [-\pi, \pi]$, para todo r con $0 \leqslant r < 1$.

(ii) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} P_r(t)\, dt = 1$ para todo r con $0 \leqslant r < 1$.

(iii) $\displaystyle\lim_{r \to 1^-} P_r(t) = 0$ si $t \neq 0$.

(iv) $\displaystyle\lim_{r \to 1^-} P_r(0) = +\infty$

Por lo tanto, el núcleo de Poisson genera la función delta de Dirac cuando $r \to 1^-$, esto es, si $f(t)$ es continua en $[-\pi, \pi]$ (y además, $f(-\pi) = f(-\pi)$); entonces se tiene que

$$\lim_{r \to 1^-} P[f]\,(r, \theta) = \lim_{r \to 1^-} F(r, \theta) = f(\theta) . \tag{5}$$

O sea que la transformada de Poisson $P[f]$ satisface la condición de frontera del problema de Dirichlet dada en (3). Como sabemos que $P[f]$ es armónica en U, entonces $P[f]$ es la solución del problema de Dirichlet planteado en (3) •

A continuación, presentamos un método poco conocido para resolver el problema de Dirichlet (3), bajo la hipótesis de que f sea continua.

2. SUMA DE ABEL Y SUMA DE CESÀRO [2], [4]

Dada una serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \ , \tag{1}$$

sea

$$S_n = a_o + a_1 + \ldots + a_n \tag{2}$$

la suma parcial de los primeros $n+1$ términos; entonces la *suma total* S de la serie (1) es el límite:

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n \ . \tag{3}$$

Si no existe el límite en (3) entonces la serie (1) *diverge.* Aún en tal caso, existen varios métodos para asignar a la serie (1) un valor numérico que puede interpretarse como la suma total.

Suma de Cesàro (Cesàro Ernesto, 1859-1906)

Considérese la media aritmética de S_n:

$$\sigma_n = \frac{1}{n} (S_o + S_1 + \ldots + S_{n-1}) \ ; \tag{4}$$

si existe el límite

$$\lim_{n \to \infty} \sigma_n = \sigma \ ,$$

entonces decimos que la serie (1) es «sumable según Cesàro», y se denota por:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sigma \qquad \text{(según Cesàro)} \ . \tag{5}$$

Es bien conocido que la sumabilidad según Cesàro es *«regular»*, esto es, la convergencia de la serie (1) a S en el sentido común y corriente implica la sumabilidad de la serie (1) según Cesàro, y que $\sigma = S$ •

Suma de Abel (Abel Niels Henrik, 1802-1829)

A la serie (1) le asignamos una función A(x) de la variable real x, dada por la serie de potencias

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n \qquad (-1 < x < 1) . \tag{6}$$

Si existe el límite

$$\lim_{x \to 1^-} A(x) = A \ , \tag{7}$$

entonces decimos que la serie (1) es sumable según Abel, y el límite A se llama «la suma de Abel de la serie (1)», y se denota por

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A \qquad \text{(según Abel).} \tag{8}$$

La sumabilidad según Abel es *regular*, o sea que la convergencia de la serie (1) a S (en el sentido común y corriente) implica la sumabilidad según Abel de la serie (1), y que S es igual a la suma de Abel; este hecho se conoce como *«el Teorema de Abel»* •

Frobenius demostró que la sumabilidad según Cesàro implica la sumabilidad según Abel:

Teorema de Frobenius (Frobenius Georg Ferdinand, 1849-1917)

Si la serie (1) converge según Cesàro:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sigma \qquad \text{(según Cesàro)} ,$$

entonces la serie converge según Abel, y se tiene:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sigma \qquad \text{(según Abel).}$$

Demostración:

Primero, expresamos la función $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ en términos de σ_n (dado en (4)). Tenemos:

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = (1 - x) . \sum_{n=0}^{\infty} (a_o + a_1 + ... + a_n) . x^n =$$

$$= (1 - x) . \sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n =$$

$$= (1 - x)^2 . \sum_{n=0}^{\infty} (n + 1) \sigma_{n+1} . x^n =$$

$$= \frac{(1 - x)^2}{x} . \sum_{n=1}^{\infty} n \sigma_n . x^n . \qquad (9)$$

Por otra parte, como

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^n = \frac{x}{(1 - x)^2} \quad ,$$

tenemos:

$$(1 - x)^2 . \sum_{n=1}^{\infty} n \sigma . x^n = \sigma x . \qquad (10)$$

De (9) y (10):

$$x(A(x) - \sigma) = (1 - x)^2 . \sum_{n=1}^{\infty} n (\sigma_n - \sigma) . x^n . \qquad (11)$$

Supongamos ahora que la serie (1) converge a σ según Cesàro, o sea, $\sigma_n \to \sigma$; entonces dado $\varepsilon > 0$ cualquiera existe N_o tal que

$$|\sigma_n - \sigma| < \varepsilon \qquad \text{para todo} \qquad n > N_o .$$

Por lo tanto,

$$(1 - x)^2 . \left| \sum_{n=N_o+1}^{\infty} n(\sigma_n - \sigma) x^n \right| <$$

$$< \varepsilon (1 - x)^2 . \sum_{n=N_o+1}^{\infty} n\, x^n < \varepsilon (1 - x)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n\, x^n = \varepsilon\, x < \varepsilon .$$

De (11) tenemos:

$$| x(A(x) - \sigma) | \leqslant (1 - x)^2 \left| \sum_{n=1}^{N_o} n(\sigma_n - \sigma)\, x^n \right| + (1 - x)^2 \left| \sum_{n=N_o+1}^{\infty} n(\sigma_n - \sigma)\, x^n \right| <$$

$$< (1 - x)^2 \left| \sum_{n=1}^{N_o} n(\sigma_n - \sigma)\, x^n \right| + \varepsilon . \qquad (12)$$

Pero, como

$$(1 - x)^2 \left| \sum_{n=1}^{N_o} n(\sigma_n - \sigma)\, x^n \right| \to 0 \qquad \text{cuando } x \to 1^- ,$$

entonces la desigualdad (12) nos garantiza que

$$\lim_{x \to 1^-} x\, (A(x) - \sigma) = 0 ,$$

o sea

$$\lim_{x \to 1^-} A(x) = \sigma ,$$

esto es, la serie (1) *converge* al valor σ *según Abel.* □

3. SUMA DE ABEL DE LA SERIE DE FOURIER

Sea $f(\theta)$ una función 2π-periódica, continua en $[-\pi, \pi]$; entonces la serie de Fourier* generada por $f(\theta)$ es [1]

$$\frac{1}{2} a_o + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n . \cos n\theta + b_n . \operatorname{sen} n\theta \right\} , \qquad (1)$$

donde

* Fourier Joseph (1758-1830).

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \, dt , \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \operatorname{sen} nt \, dt . \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Es bien conocido que la serie de Fourier no siempre converge a $f(\theta)$ en el sentido común y corriente* (Du Bois Reymond dio un ejemplo de divergencia de la serie de Fourier en 1873), pero *siempre converge a* $f(\theta)$ *según Cesàro* (Teorema de Féjer** , Math. Ann. Vol. 58, 1904, p. 51). Como la sumabilidad de Cesàro implica la sumabilidad de Abel, entonces la serie de Fourier (1) debe converger a $f(\theta)$ según Abel. Esto es:

$$A(r) = \frac{1}{2} a_o + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \, . \cos n\theta + b_n \, . \operatorname{sen} n\theta \right\} . \, r^n \xrightarrow[r \to 1^-]{} f(\theta). \qquad (3)$$

Reemplazando en (3) los valores de a_n y b_n dados en (2), tenemos que

$$A(r) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \, . \cos n(t - \theta) \right\} dt .$$

Pero como

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \, . \cos n(t\text{-}\theta) = \text{Real} \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (r \, . \, e^{i(t-\theta)})^n \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} \, . \, \frac{1 - r^2}{1 - 2r \, . \cos (t - \theta) + r^2} ,$$

entonces

$$A(r) = \int_{-\pi}^{\pi} P_r(t - \theta) \, . \, f(t) \, dt = P[f] = F(r, \theta) . \qquad (4)$$

* Según el teorema de Jordan (Jordan Camille, 1838-1922), si $f(\theta)$ es de *variación acotada* entonces la serie de Fourier converge a $\frac{1}{2}\left(f(\theta^+) + f(\theta^-)\right)$.

** Féjer Leopold, 1880-1959.

Por lo tanto, el límite en (3) puede escribirse como sigue:

$$P[f]\,(r,\theta) = F(r,\theta) \longrightarrow f(\theta) \qquad \text{cuando} \qquad r \longrightarrow 1^-,$$

esto es, la transformada de Poisson $P[f]$ satisface la condición de frontera del problema de Dirichlet •

NOTA: En los problemas de Física lo más importante no es la convergencia común y corriente de la serie de Fourier, sino la convergencia del límite en (3) (o sea, la sumabilidad de la serie de Fourier según Abel); este hecho ya fue mencionado por Stokes medio siglo antes del descubrimiento del teorema de Féjer*

4. TRANSFORMADA DE POISSON DE LA MEDIDA [3]

En los parágrafos anteriores, hemos supuesto siempre la «continuidad» de $f(\theta)$ en $[-\pi, \pi]$. Sin embargo, el problema de Dirichlet en el círculo abierto U puede tratarse de la misma manera sin suponer la continuidad de $f(\theta)$. Se conoce el siguiente teorema que garantiza la solución del problema de Dirichlet:

Teorema: Sea $f(\theta) \in L_1(-\pi, \pi)$, entonces: $P[f]\,(r,\theta) = F(r,\theta)$ es armónica en U, y

$$\lim_{r \to 1^-} F(r,\theta) = f(\theta) \text{ para } \textit{casi todo } \theta \text{ en } [-\pi, \pi] \square$$

Surge la siguiente pregunta: ¿Cualquier función armónica en U se obtiene por medio de la transformada de Poisson de alguna función integrable $f(\theta)$? La respuesta es *negativa*. Por ejemplo:

$$P_r(\theta) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cdot \cos\theta + r^2}$$

es armónica en U (o en $0 \leqslant r < 1$). Sin embargo, como

$$P_r(\theta) \xrightarrow[(r \to 1^-)]{} \begin{cases} 0 & \text{si } \theta \neq 0, \\ +\infty & \text{si } \theta = 0, \end{cases}$$

entonces ésta no es una solución del problema de Dirichlet, puesto que no existe $f(t) \in L_1$ tal que $P_r(\theta) = P[f]$ •

* Stokes. Math.and Phys. Papers,Vol. I, pp. 236-237, 1847.

F. Riesz y G. Herglotz extendieron el concepto de la transformada de Poisson de la «función» al de la transformada de Poisson de la «medida».

Dada *una carga* (o *medida generalizada*) finita de Borel μ sobre $[-\pi, \pi]$, se define la transformada de Poisson de μ, $P[d\mu]$, por

$$P[d\mu](r, \theta) = \int_{[-\pi, \pi]} P_r(t - \theta) \, d\mu(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi, \pi]} \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(t - \theta) + r^2} \, d\mu(t) \,. \quad (1)$$

Podemos demostrar inmediatamente que la función $u(r, \theta) = P[d\mu]$ satisface la siguiente desigualdad:

$$\int_{[-\pi, \pi]} |u(r, \theta)| \, d\theta \leqslant \int_{[-\pi, \pi]} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} P_r(t - \theta) \, d\theta \right\} d|\mu|(t) = \int d|\mu|(t) = \|\mu\|, \quad (2)$$

donde $\|\mu\|$ es la *variación total* de la carga (o medida generalizada) μ en $[-\pi, \pi]$. De (2) se tiene que

$$\sup_{0 \leqslant r < 1} \int_{[-\pi, \pi]} |u(r, \theta)| \, d\theta < +\infty \,. \quad (3)$$

Riesz y Herglotz demostraron (1911) el siguiente teorema, como una aplicación del conocido teorema de representación de Riesz:

Teorema: Sea $u(r,\theta)$ una función armónica en U. Entonces $u(r, \theta)$ es la transformada de Poisson de alguna carga (o medida generalizada) finita de Borel si y sólo si $u(r, \theta)$ satisface la condición (3) □

Como un caso particular de este teorema, se tiene que toda función armónica positiva en U proviene de la transformada de Poisson de alguna medida. Por ejemplo, la función $P_r(\theta)$ es armónica positiva en U, luego existe una medida μ tal que $P_r(\theta) = P[d\mu]$. En efecto, sea μ la medida sobre $[-\pi, \pi]$ definida por

$$\mu(S) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \notin S \,, \\ 1 & \text{si} \quad 0 \in S \,; \end{cases}$$

entonces tenemos que

$$P_r(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi, \pi]} \frac{1 - r^2}{1 - 2r \,.\, \cos(t - \theta) + r^2} \, d\mu(t) = P[d\mu] \,\bullet$$

Naturalmente, hay funciones armónicas en U que no satisfacen la condición (3). Por ejemplo:

$$u(r, \theta) = \frac{r \operatorname{sen} \theta}{1 - 2r \cos \theta + r^2}$$

es armónica en U, pero:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |u(r,\theta)|\, d\theta = 2 \,.\, \log \frac{1 + r}{1 - r} \longrightarrow + \infty \; (r \to 1^-) \; ;$$

por el teorema anterior, ésta *no es la transformada de Poisson* de alguna carga (o medida generalizada). De esta manera, el teorema de Riesz y Herglotz es el paradero final de los problemas acerca de funciones armónicas en U dentro de los estudios del «Análisis Real» •

5. APLICACION DEL ANALISIS NO-ESTANDAR [5]

El sistema $\mathbb{R}^*$ de los números reales no-estándar es una ampliación del sistema numérico real $\mathbb{R}$, en el cual se pueden manejar los números infinitesimales e infinitos como «*auténticos*» números. Usando los números no-estándar como base para el cálculo, se puede esclarecer definitivamente la relación entre funciones armónicas en U y la transformada de Poisson, llevándonos al final verdadero del problema acerca de funciones armónicas.

Teorema: Sea $u(r, \theta)$ una función armónica en el círculo abierto U. Entonces existe una función no-estándar $h(\tau)$ en $[-\pi, \pi]^*$ tal que

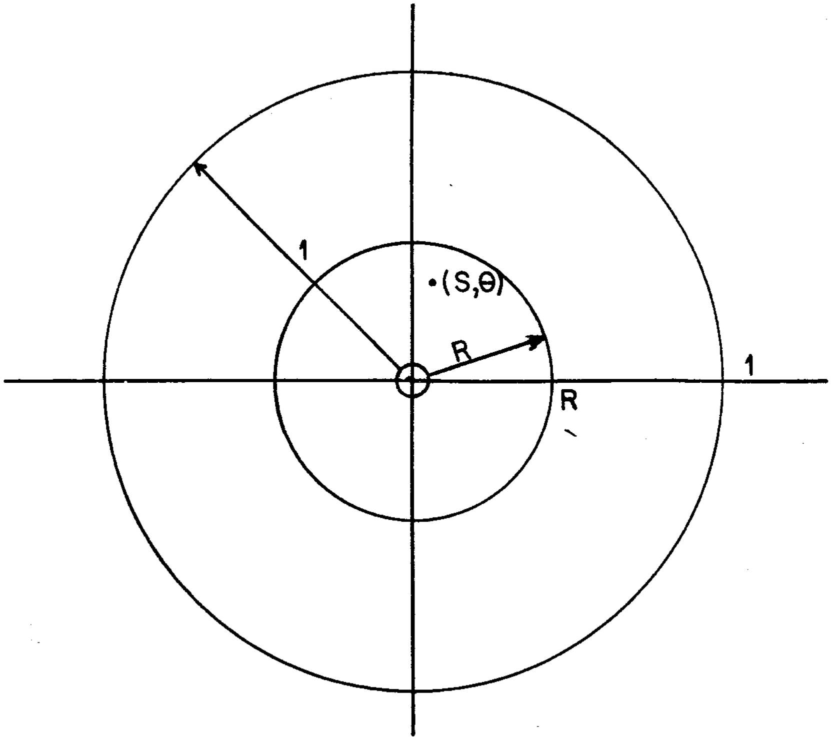
$$u(r,\theta) \approx P[h] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\tau - \theta) + r^2} h(\tau)\, d\tau \,, \tag{1}$$

donde τ es la *variable no-estándar* de integración en el intervalo no-estándar $[-\pi, \pi]^* = \{ \tau \in \mathbb{R}^* / -\pi \leqslant \tau \leqslant \pi \}$; «$\approx$» se lee: «*Infinitamente próximo a*» lo cual significa que la diferencia $u(r, \theta) - P[h]$ es un número infinitesimal.

(No es necesario que los lectores tengan un conocimiento previo del «Análisis no-estándar» para poder captar la idea de la demostración del teorema; basta manejar los números no-estándar -reales, infinitesimales e infinitos- como si fueran los números reales acostumbrados en el cálculo común, ya que se cumplen *las mismas fórmulas* de integración y de derivación para el caso del cálculo con los números no-estándar [7]).

Demostración del Teorema:

Dado s con $0 \leqslant s < 1$, existe R tal que $s < R < 1$. La función $u(s, \theta)$ es armónica en el «*círculo cerrado*» de radio R con centro en O; entonces podemos aplicar la fórmula integral de Poisson en este círculo, y se obtiene:



$$u(s, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{R^2 - s^2}{R^2 - 2Rs \cdot \cos(t - \theta) + s^2} \cdot u(R, t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - (s/R)^2}{1 - 2(\frac{s}{R}) \cos(t - \theta) + (\frac{s}{R})^2} \cdot u(r, t)\, dt. \qquad (2)$$

Tomando $r = \frac{s}{R}$ se obtiene:

$$u(rR, \theta) = \int_{-\pi}^{\pi} P_r\,(t - \theta)\,.\,u\,(R, t)\,dt\,. \tag{3}$$

La igualdad (3) es válida para r y R reales con $r < 1$, $R < 1$, luego es también válida para el caso en que r y R sean *números no-estándar* con $r < 1, R < 1$.
Si $R = 1 - \varepsilon$, con ε un número *infinitesimal positivo* (esto es, R es un número no-estándar infinitamente próximo a 1 y menor que 1), entonces

$$r\,R = r\,(1 - \varepsilon) \approx r\,.$$

Como $u(r, \theta)$ es armónica en U, entonces $u(r, \theta)$ es *continua* en U, por lo tanto se tiene que

$$u(rR, \theta) \approx u(r, \theta) \qquad (\text{para } r \textit{ real},\ r < 1). \tag{4}$$

De (3) y (4):

$$u(r, \theta) \approx \int_{-\pi}^{\pi} P_r\,(\tau - \theta)\,.\,u(1 - \varepsilon, \tau)\,d\tau\,. \tag{5}$$

Por lo tanto, $h(\tau) = u(1 - \varepsilon, \tau)$ es la función no-estándar que satisface la fórmula (1) en el teorema. □

Ejemplo: Consideramos la función armónica $u(r, \theta)$ del ejemplo anterior:

$$u(r, \theta) = \frac{r \operatorname{sen} \theta}{1 - 2r \cos \theta + r^2}$$

Para un ε infinitesimal positivo, tenemos:

$$h(\tau) = u(1 - \varepsilon, \tau) = \frac{(1 - \varepsilon) \operatorname{sen} \tau}{2(1 - \varepsilon)(1 - \cos\tau) + \varepsilon^2} =$$

$$= \frac{\operatorname{sen} \tau}{2(1 - \cos \tau) + \dfrac{\varepsilon^2}{1 - \varepsilon}} = \frac{\operatorname{sen} \tau}{2(1 - \cos\tau) + \varepsilon_o},$$

donde $\varepsilon_o = \dfrac{\varepsilon_o}{1 - \varepsilon}$ es un número infinitesimal positivo. Por lo tanto:

$$\frac{r \operatorname{sen} \theta}{1 - 2r \cos \theta + r^2} \approx P[h] = \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\tau - \theta) + r^2} \cdot \frac{\operatorname{sen} \tau}{2(1 - \cos\tau) + \varepsilon_o} \, d\tau \bullet$$

REFERENCIAS

[1] APOSTOL, T.M.Análisis Matemático. Editorial Reverté, Barcelona, 1976.

[2] TAKEUCHI, Yu. Sucesiones y Series. Ed. Limusa, México, 1977

[3] RUDIN, W. Real and Complex Analysis. McGraw-Hill, New York, 1966.

[4] SZASZ, Otto; BARLAZ, Joshua. Introduction to the Theory of Divergent Series. University of Cincinati, 1952.

[5] TAKEUCHI, Yu. ¿Qué son los números no-estándar? Mat. Ens. Uni., No. 33, dic. 1984.

[6] KREYZIG, Erwin. Matemáticas Avanzadas para Ingeniería. Ed. Limusa, México, 1979.

[7] TAKEUCHI, Yu. Transformada de Poisson de Funciones No-estándar. Revista Col. Matemáticas, próximo a aparecer.

[8] TAKEUCHI, Yu. Sucesión de funciones y teoría de distribuciones, Sociedad Col. de Matemáticas, 1979.