

Sopa de tortuga

BERNARDO MAYORGA*

«En este mundo caprichoso nada es más caprichoso que la fama póstuma. Una de las más notables víctimas de la falta de juicio de la posteridad es Zenón el eleático. Habiendo inventado cuatro argumentos, todos inmensamente sutiles y profundos, la tosquedad de filósofos posteriores lo declaró a él un mero prestidigitador ingenioso y todos y cada uno de sus argumentos sofismas. Después de dos mil años de continuas refutaciones, esos sofismas fueron restablecidos y constituyeron la base de un renacimiento matemático».

BERTRAND RUSSELL [1]

1. INTRODUCCION

Entre las paradojas de la lógica y las matemáticas quizá la más conocida -y la más espectacular- sea la de Aquiles y la tortuga, propuesta por Zenón de Elea (c. 490-c. 430 a.C.) hace ya más de 24 siglos: si el veloz Aquiles concede alguna ventaja a la lenta tortuga, jamás podrá darle alcance por rápido que corra, ya que si el héroe parte de un punto A y el quelonio de uno más adelante B, ambos avanzando en línea recta en la misma dirección, cuando el Pelida

* Profesor Asociado, Departamento de Matemáticas. Universidad Industrial de Santander. Bucaramanga, Colombia.

pase por el punto B el reptil estará ya transitando por otro más adelante C; cuando Aquiles pase por C la tortuga ya va en D, y así sucesivamente, de suerte que el guerrero tesalio puede acercarse cada vez más a su contendora pero sin alcanzarla nunca.

Puesto que «en la vida real» no se necesita ser el alígero Aquiles para alcanzar cualquier tortuga, el razonamiento de Zenón era demasiado chocante para poder ser aceptado o al menos admirado, así que no se hicieron esperar las críticas e incluso burlas a ese y otros argumentos -las célebres aporías de Zenón- elaborados para demostrar la imposibilidad del movimiento y de la multiplicidad, argumentos que de todas maneras llevaron a la crisis la doctrina pitagórica del número como principio de la realidad.

Aristóteles (384-322 a. C.), por ejemplo, impugnaba las paradojas de Zenón afirmando que si bien el espacio y el tiempo son infinitamente divisibles *en potencia*, no lo son *en acto*; que la esencia del movimiento es precisamente «franquear el límite», ser la identidad entre un lugar y *otro* lugar, así como el devenir tiene por esencia ser la identidad entre el ser y el no-ser, entre lo mismo y lo otro [2]. «Refutaciones» de ese tipo seguían siendo consideradas válidas hasta el siglo pasado por filósofos como Hegel (1770-1831).

La verdadera refutación matemática de las paradojas del eleático sólo es posible desde 1872, año en el cual Dedekind y Cantor publican, por aparte, sus construcciones de los números reales a partir de los racionales (lo que quiere decir, a partir de los naturales). Esa construcción es la culminación de la llamada aritmetización del análisis (iniciada por Gauss y continuada por Bolzano, Cauchy y Weierstrass), que desterró de las matemáticas los misteriosos infinitesimales, a los que dedicaron muchas elucubraciones matemáticas aficionados y filósofos (véase, por ejemplo, [3])* y que fue presionada precisamente por pensadores que, como Zenón, no tragaban entero. «Establecer claramente las dificultades implicadas era seguramente realizar la parte más difícil de la tarea filosófica, y esto es lo que hizo Zenón», dice Russell [5].

El presente artículo se originó en el desafío lanzado en un seminario de Historia de las Matemáticas a los estudiantes (último curso de Licenciatura) para demostrar que efectivamente Aquiles alcanza la tortuga. Algunos de los que intentaron resolver el problema por su cuenta lo hicieron con los elementos de física de quinto de bachillerato, calculando dónde y cuándo la alcanza, pero basados en la suposición de que eso sucede, que es precisamente lo que hay que demostrar. Otros expusieron literalmente lo que encontraron en un petulante artículo sobre el tema escrito por el señor Joaquín Navarro en la enciclopedia UNIVERSITAS [6]. Nadie entregó la solución

* Las magnitudes infinitamente pequeñas volvieron a nacer en 1961 al inventar Abraham Robinson el Análisis no estándar [4]. Pero los infinitesimales de Robinson son objetos matemáticos perfectamente determinados, que no admiten especulaciones de diletantes.

correcta. El mismo desafío se repitió en un curso especial para licenciados ya graduados durante el IV Coloquio Regional de Matemáticas (Bucaramanga, junio de 1985), con los mismos resultados. Por otra parte, en sus tiempos de estudiante el autor de estas líneas había leído el excelente análisis que de la paradoja de la dicotomía hace Apostol [7] al introducir las sucesiones, y se conformó con pensar que sin mayores cambios se podía adaptar a la de la tortuga. Al volver nuevamente sobre el tema con motivo del desafío se encontró con que en la literatura disponible no hay una demostración directa, con base en las matemáticas universitarias corrientes, del hecho que nos interesa, esto es, de que Aquiles alcanza la tortuga; y halló, por otra parte, que los pocos intentos que en ese sentido se hacen adolecen de errores e incluso, en el caso del señor Navarro, de imperdonables agravios. Todo esto se analizará en la tercera parte de este artículo. Por ahora agreguemos que una de las causas de que no aparezca la demostración es que la mayoría de las obras serias en que las paradojas se presentan está dirigida a un público inteligente pero que no necesariamente domina los indispensables tecnicismos matemáticos, así que aparecen frases como las de que «sólo pueden discutirse de un modo realmente satisfactorio por medio de la matemática más moderna» [8]; «Pero este asunto es tan técnico que resulta imposible dar cuenta de él aquí» [5], etc. Hay por supuesto estudios muy profundos y detallados como el de Russell en *The Principles of Mathematics* [1], que ocupa buena parte de los capítulos XLII y XLIII, pero está más que todo dedicado a explicar la *causa* de la paradoja, que es la aceptación del viejo axioma de que el todo es mayor que la parte, y de cómo ese axioma debió ser rechazado por Cantor para construir su filosofía del infinito, aplicando la cual la paradoja deja de existir; pero Russell no se toma el trabajo de poner a Aquiles a alcanzar la tortuga, suponiendo, quizá, que el lector de su obra no debe tener ninguna dificultad en hacerlo por su cuenta. Russell cita dos artículos ([9] y [10]) de principios del siglo, en los cuales es posible, aunque no muy probable, que los autores se hayan tomado la molestia de hacer cálculos. Para comprobarlo habría que efectuar una visita a la London Library, así que mientras los lectores curiosos esperan una feliz oportunidad para hacerlo, se ofrece aquí la solución de la paradoja utilizando únicamente los elementos de análisis matemático correspondientes a un buen pensum de ingeniería.

2. PLANTEO DEL PROBLEMA

Zenón y Cantor han apostado sus ahorros en una carrera entre Aquiles, el héroe de los pies ligeros, y una tortuga pachorruda cualquiera. Zenón asegura que de partir adelante la tortuga nunca será alcanzada, mientras Cantor afirma lo contrario. Para evitar problemas de aceleración la carrera se hará con partida lanzada, de modo que el cronometraje se iniciará en el momento en que los dos contendores hayan alcanzado velocidad *constante* y la tortuga se encuentre L unidades de longitud adelante del Pelida en una pista recta

con dos carriles paralelos marcados A (para Aquiles) y T (para la tortuga). Las posiciones en el momento de comenzar la prueba son las mostradas por los puntos negros en la Figura 1, cuando la velocidad de Aquiles es v y la de la tortuga av , con $a \in (0,1)$. Zenón, como se dijo al principio, explica

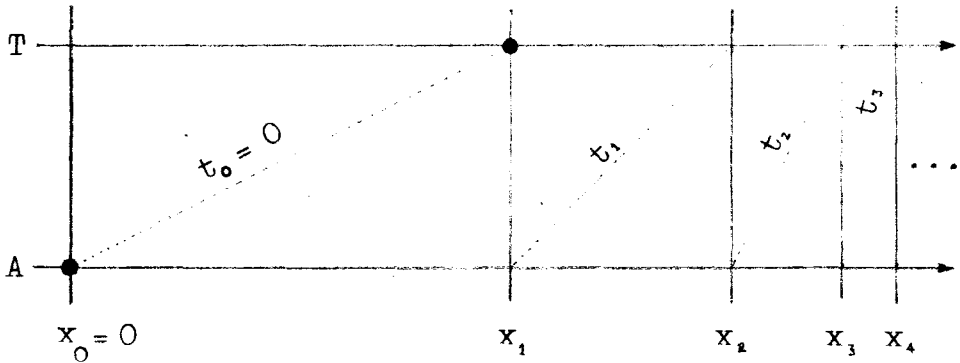


Figura 1

que cuando Aquiles llegue en el instante t_1 a la marca x_1 , la tortuga ya está pasando por x_2 ; cuando el héroe pase por x_2 en el momento t_2 ya el quelonio va en x_3 , y así sucesivamente, *Aquiles seguirá acercándose a la tortuga, pero sin lograr alcanzarla jamás*. Cantor, por su parte, nos da permiso de hacer ciertas digresiones antes de entrar en acción.

3. SOLUCIONES CANDIDAS

- a) Un estudiante de quinto de bachillerato, no muy perspicaz pero que sabe manejar sus fórmulas de física, razonará: sea x_A la posición de Aquiles y x_T la de la tortuga cuando han pasado t segundos desde el pistoletazo inicial. Entonces

$$\begin{aligned} x_A &= vt, \\ x_T &= L + avt; \end{aligned} \tag{0}$$

cuando las dos posiciones coincidan -¡Suponiendo lo que se debe demostrar!- tendremos

$$vt = L + avt ,$$

de donde

$$t = \frac{L}{(1 - a) v} ; \quad (1)$$

reemplazando el valor hallado de t en cualquiera de las dos fórmulas de (0) obtenemos

$$x = \frac{L}{1 - a} . \quad (2)$$

Las fórmulas (1) y (2) nos dan, respectivamente, el instante y el sitio (medido desde el punto de partida de Aquiles) en que la tortuga será alcanzada... si es que el Pelida logra hacerlo.

- b) Mención especial merece el ya citado artículo del señor Navarro en UNIVERSITAS [6], artículo que constituye, en últimas, la causa motriz del presente.

Comienza el señor Navarro con una andanada de ofensas contra Zenón, llamándolo despectivamente «sofista» al principio y concluyendo la serie con la afirmación de que «en realidad, las paradojas de Zenón son simples juegos lingüísticos ideados por alguien que no tenía por qué saber la definición moderna de límite». Afirma de paso que «los filósofos medievales pueden ser exculpados [por creer que los argumentos de Zenón tenían alguna importancia], pues Augustin-Louis Cauchy nació en 1789, pero los pseudofilósofos actuales [¿Russell, quizás?] no tienen disculpa posible, como no sea la de ignorar por completo las matemáticas». Pero olvida Navarro que Cauchy murió en 1857, cuando faltaban quince años para que -con su ayuda, por supuesto- se concluyera la construcción de los números reales y deviniera posible despejar de manera rigurosa las paradojas del genial discípulo de Parménides, como ya se indicó en el primer párrafo.

Al plantear el problema dice don Joaquín: «Supóngase a Aquiles, el héroe de los pies veloces, persiguiendo a una tortuga que le lleva 10 m de ventaja; supóngase además que la tortuga viaja a la inverosímil velocidad de 1 cm/s y que Aquiles lo hace a 1 m/s, es decir, 100 veces más deprisa que la tortuga y un poco más despacio que el actual *recordman* del mundo». Como se recordará, el pasado 24 de junio la abuelita boyacense Evelia Martínez estableció en Roma una nueva marca mundial en los 100 m planos en la categoría damas, mayores de 80 años, al parar el cronómetro electrónico en 31.48 s, lo cual le da una velocidad media de 3.18 m/s, o sea más del triple de la del

Aquiles de Navarro. De modo que las ofensas personales no se limitan a Zenón, sino que se extienden al bravo héroe de Troya y a todos los atletas que en el mundo son, llegando incluso hasta las nobles e indefensas tortugas. En efecto, si la señora Martínez corre con velocidad que triplica la del pseudo-Aquiles, cualquier velocista que se respete lo hace 10 veces más rápido: la velocidad *media* correspondiente al actual *recordman* del mundo de los 100 m planos (James Ray Hines, 9.95 s, México, 14.10.68) es de 10.05 m/s. Pero se han medido velocidades mayores: el 21 de junio de 1963 en St. Louis, Missouri, cuando Robert Lee Hayes impuso nueva marca mundial en las 100 yardas con 9.1 s, le fue medida entre las 60 y las 75 yardas una velocidad de 12.47 m/s. Por otra parte, el actual plusmarquista mundial de los quelonios, «Charlie», corrió en Tickhill, S. Yorkshire (Inglaterra) 18 pies en 43.7 s, lo cual le da una velocidad media de 12.56 cm/s, o sea más de doce veces mayor que la de la tortuga de Navarro. Esta última (1 cm/s) ni siquiera llega a los 1.3 cm/s correspondientes a la velocidad normal de un caracol común cuando se desplaza en busca de alimento. (Para confrontar todos los datos anteriores se puede consultar la última edición del GUINNESS Book of World Records).

Navarro explica después el argumento de Zenón y sigue:

«Pero analicemos esta carrera de persecución con la ayuda de la fría aritmética. Designemos por E_1 y e_1 , E_2 y e_2 , E_3 y e_3 , etc., las respectivas posiciones de Aquiles y la tortuga en cada uno de los momentos considerados en el ejemplo. Sean t_1 , t_2 , t_3 ,... etc., los respectivos intervalos de tiempo transcurridos que contaremos en segundos y a partir del instante de inicio de la carrera. Para $t_1 = 10$, es decir, al cabo de 10s, $E_1 = 10$; en cuanto a e_1 , vale $10 + \frac{10}{100}$ pues hay que contar con los 10 m de ventaja y el hecho de que la tortuga va 100 veces más despacio y, por lo tanto, recorre por su(s) propio(s) pie(s) $\frac{10}{100}$ de metro. Así pues, $e_1 = 10 + \frac{10}{100} = 10,1$.

Avancemos a Aquiles hasta que $E_2 = 10,1$. Entonces, por el mismo razonamiento de antes, $e_2 = 10 + \frac{10,1}{100} = 10 + 0,101 = 10,101$. Un sencillo cálculo nos dice que $t_2 = 10,1$ segundos. ¿Y E_3 ? $E_3 = e_2 = 10,101$, que era la posición anterior de la tortuga; entonces

$$t_3 = 10,101 \text{ y } e_3 = 10 + \frac{10,101}{100} = 10,10101 .$$

Y así sucesivamente. En forma de tabla:

$E_1 = 10$	$e_1 = 10,1$	$t_1 = 10$
$E_2 = 10,1$	$e_2 = 10,101$	$t_2 = 10,1$
$E_3 = 10,101$	$e_3 = 10,10101$	$t_3 = 10,101$
$E_4 = 10,10101$	$e_4 = 10,1010101$	$t_4 = 10,10101$
\vdots	\vdots	\vdots
$E_n = 10,01 \overbrace{01}^{n-1}$	$e_n = 10,01 \overbrace{01}^{n-1}$	$t_n = 10,01 \overbrace{01}^{n-1}$

E_n , e_n y t_n son los respectivos valores en la n -ésima toma de tiempos. El signo $\overbrace{\quad}^n$ indica que el número de 1 situados detrás* de la coma decimal es n .

Es fácil ver que ahora Aquiles alcanza sin dificultad a la tortuga, pues a medida que crece el número n , tanto E_n como e_n como t_n van acercándose al mismo valor numérico: al número decimal periódico

$$x = 10,1010101010101\dots,$$

que es bien fácil de calcular. En efecto,

$$100 \cdot x = 100 \cdot 10,101010101\dots = 1010,101010101\dots, \text{ y restando}$$

$$\begin{array}{r} 100 \cdot x = 1010,1010101\dots \\ - x = 10,1010101\dots \\ \hline 99 \cdot x = 1000 \end{array}$$

$$x = \frac{1000}{99}$$

Al cabo de $\frac{1000}{99} (= 10 + \frac{10}{99})$ segundos exactos, Aquiles se hará una sopa de tortuga en el punto preciso alejado $\frac{1000}{99}$ de su punto de partida».

Hasta aquí el optimista Joaquín Navarro. Observemos ahora su tabla, en la cual resaltan con toda claridad dos hechos: 1) cada una de las sucesiones $\{E_n\}$ (y $\{t_n\}$ que es igual) y $\{e_n\}$ es estrictamente creciente; 2) en todo momento la tortuga le lleva una ventajita al héroe. O sea, precisamente, lo que Zenón afirma. Pero no se ve, del modo como presenta Navarro su razonamiento, ninguna RAZON SUFICIENTE para asegurar, como él lo hace, que «a medida que crece el número n , tanto E_n como e_n , como t_n van acercándose al mismo valor numérico».

* Aquí reproducimos la tabla tal cual aparece en la página 147 del original citado. Nótese la errata en la última fila de la tabla, consistente en la falta de un 1 entre la coma y el cero en cada uno de los tres guarismos.

Es posible que un método similar haya sido el utilizado por el jesuita flamenco Grégoire de Saint Vincent (1584-1667) para calcular el punto donde Aquiles alcanza la tortuga, lo que le valió el elogio de Leibniz en 1693 (véase [11]). En realidad el método que estamos comentando se puede justificar desde el punto de vista del análisis, mostrando que las sucesiones en cuestión, que como vimos son estrictamente crecientes, son sin embargo acotadas, lo cual implica, EN VIRTUD DEL TEOREMA DE LA MINIMA COTA SUPERIOR -y solo en virtud suya - su convergencia. Es de anotar que en los pocos textos de cálculo que lo mencionan, e incluso en algunos de análisis como el de Apostol [12], este teorema aparece como axioma. La razón es que la demostración (véase, por ejemplo, [13]) es muy larga y complicada. Sin el teorema de la mínima cota superior (o supremo) no se puede, pues, demostrar el teorema básico de que toda sucesión creciente acotada converge, por lo cual, cuando los autores llegan a este punto, en el capítulo correspondiente de series, tienen que excusarse diciendo, por ejemplo, «no intentaremos dar una prueba rigurosa de este teorema, pero lograremos una apreciación intuitiva del resultado adoptando el siguiente enfoque gráfico» [14], etc. Confesión similar debería haber hecho Navarro, con lo cual quedaría claro que quedó sin demostrar lo que se quería demostrar, y en consecuencia Zenón sigue invicto y Aquiles sin poder prepararse su caldo de tortuga.

En el libro [15], que es un texto de popularización de las ideas fundamentales de la matemática moderna, se supone que la velocidad de Aquiles es el doble de la de la tortuga y se intenta de manera honrada explicar desde un punto de vista más o menos elemental por qué las sucesiones que nos ocupan deben tener un límite.

Dejemos como ejercicio para el lector el mostrar que las sucesiones de Navarro son acotadas, y anotemos que de todas maneras en el intento comentado hay un gran progreso con respecto al bachiller del literal a), ya que se hace el esfuerzo de razonar a partir del planteamiento de Zenón, y no como hizo nuestro joven amigo, que ignoró olímpicamente los argumentos del eleático y aplicó el álgebra elemental a su prejuicio de que el pobre quelonio no le da un brinco al hijo de Tetis.

4. UNA SOLUCION MATEMATICA GENERAL

Sea $t_0 = 0$ el instante en que se inicia la competencia (Fig. 1), estando Aquiles en el punto $x_0 = 0$ y la tortuga en $x_1 = L$; t_1 el momento en que el héroe pasa por el punto x_1 y el quelonio por el punto x_2 , etc. El instante t_n estará dado para Aquiles por la fórmula

$$t_n = \frac{x_n}{v} , \quad (3)$$

y para la tortuga por

$$t_n = \frac{x_{n+1} - x_1}{a v} ; \quad (4)$$

igualando (3) y (4) obtenemos

$$x_{n+1} = L + a x_n . \quad (5)$$

Evidentemente las sucesiones $\{t_n\}$ y $\{x_n\}$ son estrictamente crecientes. Si supiéramos que son acotadas superiormente, la propiedad del supremo en los números reales nos garantizaría la existencia del límite, como ya fue explicado en el párrafo anterior. Pero a priori no sabemos nada. Es claro, por otra parte y según (3), que la convergencia de una de las dos sucesiones es equivalente a la de la otra. Así pues, si logramos demostrar QUE $\{x_n\}$ CONVERGE, eso significará QUE AQUILES ALCANZA LA TORTUGA en el punto $x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n < \infty$ y en el instante $t^* = \lim_{n \rightarrow \infty} t_n < \infty$.

Para variar, utilicemos en la demostración de la convergencia de las sucesiones un criterio eminentemente interno, como es el de Cauchy, eludiendo la verificación de que son acotadas.

LEMA 1. En cualquier momento t_k la ventaja que la tortuga conserva sobre Aquiles está dada por la fórmula

$$x_{k+1} - x_k = a^k L. \quad (6)$$

Demostración. Si designamos con $\Delta_k t$ el lapso empleado por Aquiles para pasar del punto x_{k-1} al punto x_k ,

$$\Delta_k t = \frac{x_k - x_{k-1}}{v} , \quad (7)$$

tenemos que en ese mismo lapso la tortuga pasa de x_k a x_{k+1} :

$$\Delta_k t = \frac{x_{k+1} - x_k}{a v} . \quad (8)$$

Aplicando alternativamente las fórmulas (7) y (8) tenemos

$$x_{k+1} - x_k = av \Delta_k t = av \left(\frac{x_k - x_{k-1}}{v} \right) = a(x_k - x_{k-1}) = a(av \Delta_{k-1} t) =$$

$$= a^2 v \left(\frac{x_{k-1} - x_{k-2}}{v} \right) = a^2 (x_{k-1} - x_{k-2}) = \dots = a^{k-1} (x_2 - x_1) =$$

$$= a^k (x_1 - x_0) = a^k L \quad \blacksquare$$

LEMA 2. La sucesión $\{x_n\}$ es fundamental (o de Cauchy), i.e.,

$$\forall p, q \in \mathbb{N} : |x_q - x_p| \xrightarrow{\min\{p, q\} \rightarrow \infty} 0 .$$

Demostración. Para precisión, sea $q > p$, $q = p + m$. En virtud del Lema 1 y del hecho de que $a \in (0, 1)$ tenemos

$$|x_q - x_p| = x_q - x_p = x_{p+m} - x_p =$$

$$= x_{p+m} - x_{p+m-1} + x_{p+m-1} - x_{p+m-2} + x_{p+m-2} + \dots + x_{p+2} - x_{p+1} +$$

$$+ x_{p+1} - x_p = a^{p+m-1} L + a^{p+m-2} L + \dots + a^{p+1} L + a^p L =$$

$$= a^p L (a^{m-1} + a^{m-2} + \dots + 1) = a^p L \left(\frac{1 - a^m}{1 - a} \right) \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0 \quad \blacksquare$$

Como se sabe, los espacios métricos en los cuales *toda* sucesión fundamental converge a un punto del mismo espacio se denominan completos. Uno de ellos es el conjunto \mathbb{R} de los números reales. La completitud de \mathbb{R} se demuestra con base -otra vez- en las construcciones de Dedekind y Cantor de 1872. Con Cauchy hemos podido llegar hasta el Lema 2, pero sólo después de Dedekind y Cantor podemos afirmar que $\{x_n\}$ converge. Más exactamente, tenemos el siguiente

TEOREMA. Aquiles alcanza la tortuga en el instante y en el sitio dados por las fórmulas (1) y (2).

Demostración. En virtud de la completitud de \mathbb{R} la sucesión fundamental $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$ converge a un punto de \mathbb{R} que denotamos x^* . Así que tomando límites en ambos miembros de (5) cuando $n \rightarrow \infty$ tenemos

$$x^* = L + ax^* ,$$

de donde

$$x^* = \frac{L}{1 - a} , \quad (9)$$

fórmula que coincide con (2). Ahora bien, tomando límites en (3) tenemos $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = t^* = x^*/v$, y reemplazando aquí el valor de x^* dado por (9) obtenemos

$$t^* = \frac{L}{(1-a)v}, \quad (10)$$

en concordancia con (1) ■

Al observar las fórmulas (9) y (10) nuestro bachiller sonreirá ingenuamente. Aquiles comenzará a preparar la olla para su sopa y Zenón entregará a Cantor sus ahorros, pero pasándole al mismo tiempo, para aguarle un poco la fiesta, una noticia de Hilbert sobre la paradoja de la dicotomía, observación que vale igualmente para la nuestra y que dice: «Por lo general se trata de eludir esta paradoja razonando que de todas maneras la suma de una cantidad infinita de esos intervalos temporales converge, y por lo tanto representa un transcurso finito de tiempo. Ese razonamiento, sin embargo, no toca un punto esencialmente paradójico, cual es el hecho de que cierta sucesión infinita de eventos que se siguen unos a otros, sucesión cuya terminación no podemos siquiera imaginar (no sólo de hecho, sino aunque fuera en principio), deba en realidad y a pesar de todo concluirse» [16].

REFERENCIAS

- [1] RUSSELL Bertrand. The Principles of Mathematics, Second Edition. George Allen & Unwin Ltd., London, 1937.
- [2] ARISTOTELES. Metafísica. Sarpe, Madrid, 1985.
- [3] MARX Karl. Manuscritos matemáticos. Edición bilingüe (alemán-ruso) publicada por Editorial Nauka, Moscú, 1968.
- [4] ROBINSON Abraham. Non-standard analysis. Proc. Koninkl. ned. akad. wet. A, v. 64, No. 4 (1961), 432-440.
- [5] RUSSELL Bertrand. Los metafísicos y las matemáticas. En: NEWMAN James R. El mundo de las matemáticas, tomo 4, 368-381, Ediciones Grijalbo, Barcelona, 1983.
- [6] NAVARRO Joaquín. Zenón contra Cauchy. En: UNIVERSITAS, tomo 12 (La Matemática), 147-152, Salvat Editores, Barcelona, 1979.
- [7] APOSTOL Tom M. Calculus, Vol. I, Second Edition. Xerox, Lexington, 1967.
- [8] JOURDAIN Philip E.B. La naturaleza de la matemática. En: NEWMAN James R. El mundo de las matemáticas, tomo 1, 343-408, Ediciones Grijalbo, Barcelona, 1983.

- [9] NOËL M. Le mouvement et les arguments de Zénon d'Elée. *Revue de Métaphysique et de Morale*, Vol. I, 107-125.
- [10] BROAD C.D. Note on Achilles and the Tortoise. *Mind*, N.S., Vol. XXII, 318-319.
- [11] STRUIK Dirk J. A concise history of mathematics. Dover Publications, Inc., New York, 1948.
- [12] APOSTOL Tom M. *Mathematical Analysis*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Tokyo, 1963.
- [13] RUDIN Walter. *Principles of Mathematical Analysis*, Third Edition. McGraw-Hill Kogakusha, Ltd., Tokyo, 1976.
- [14] THOMAS George B. *Calculus and Analytic Geometry*, Fourth Edition. Addison-Wesley Publishing Company, Singapore, 1972.
- [15] RUZSA Imre. *Die Begriffswelt der Mathematik*. Akademiai Kiadó, Budapest, 1976.
- [16] HILBERT David, BERNAYS Paul. *Grundlagen der Mathematik*, I, Zweite Auflage. Springer-Verlag, Heidelberg, 1968