Revista INTEGRACION
Departamento de Matemáticas UIS
Vol. 4, No. 1, enero-junio 1986

La incomprensión en matemáticas y los malentendidos*

JOSSETTE ADDA**

Adivinanza clásica: «¿Cómo hacer pasar a Juan por el agujero de una cerradura?».

Respueta: «Se escribe 'Juan' en un papelito, se enrolla éste y se introduce en el agujero».

Numerosas preguntas hechas a los niños en el curso de matemáticas, ¿no son acaso consideradas por ellos como adivinanzas de este tipo? La incomprensión reside en un malentendido acerca de *aquello de que se habla* (¿«Juan» es un individuo o un nombre de individuo? Hay confusión entre un objeto, su nombre y una representación de ese nombre).

El maestro cree frecuentemente que el contexto es suficientemente claro*** para que el alumno *comprenda* (adivine) cuál es el objeto que él designa con la palabra que él acaba de emplear. Se oye decir a veces: *«él no ha comprendido nada...»,* lo cual no es cierto: él ha comprendido en un momento dado *otra cosa,* las palabras no han designado para el oyente la misma cosa que para el que habla y, con esta *interpretación,* el discurso llega a ser incoherente, *incomprensible.*

---

* El presente artículo es la versión al castellano del titulado «L'incompréhension en mathématiques et les malentendus», publicado originalmente en la revista Edutational Studies in Mathematics, No. 6 (1975), 311-326 (Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland). La traducción fue realizada por el profesor JOSE MEJIA, matemático colombiano radicado en Costa de Marfil. Las notas de la autora se señalan con asteriscos. Las del traductor, numeradas, van al final del artículo.

** Professeur à la Faculté des Sciences, París VII.

*** En efecto, lo mismo sucede al matemático y al «buen alumno», pero esas nociones de «buen alumno» y de «contexto claro» no son independientes: un alumno puede reaccionar como «buen alumno» ante una situación y no *comprender* otra ambigüedad; además no existe el individuo, incluso entre los más brillantes en matemáticas, que no haya tenido la ocasión de encontrar algunas dificultades en matemáticas, y en particular dificultades del tipo estudiadas aquí (por ejemplo, bloqueo ante un problema como consecuencia de un malentendido en un enunciado).

La dificultad proviene del hecho de que las matemáticas se hacen *en la cabeza* pero no se hablan, no se escriben; el lenguaje *expresa* las matemáticas, no son las matemáticas y para comprender lo que se ha expresado es necesario conocer la clave de la interpretación en el contexto del momento. Una de las causas de los fracasos escolares es que esa clave está subentendida para el maestro o que su enunciado ha sido inadvertido por el alumno. Yo trataré de presentar en lo que sigue ejemplos auténticos que apoyan esta tesis.

1. PAPEL DE LA ADAPTACION AL CONTEXTO ESCOLAR

Pronunciadas oralmente en una clase, las dos frases «París es la capital de Francia» y «París tiene cinco letras» parecen tener el mismo sujeto (las comillas no se oyen); sin embargo la situación es tan clara que la frase «la capital de Francia tiene cinco letras» parecerá absurda a todos (salvo, quizás, a los habituados a los crucigramas); y que a la pregunta «¿qué es París?» hecha dentro de los dos contextos siguientes se podrá responder sin vacilación:

1) Si la pregunta se hace en una lección de geografía en que se estudia las capitales de diversos países, se responderá «la capital de Francia»;

2) Si la pregunta se hace en una lección de vocabulario en que se clasifican las palabras según su número de letras se deberá responder «una palabra de cinco letras».

En realidad, se hallará con frecuencia un alumno, el «último» de la clase, que responderá «la capital de Francia»; él no ha sabido (¿o no ha querido?) *llevar la cuerda*[1)].

No saber *llevar la cuerda* es lo que con más frecuencia caracteriza a los niños que, según la ideología del maestro, son llamados «no dotados», o «inadaptados» o «desfavorecidos». H. Freudenthal refiere que cuando se pregunta cómo evaluar el número medio de una familia honlandesa, los alumnos comienzan por proponer que se tome el número de hijos de la familia de cada alumno de la clase y que se haga el promedio, pero en las «buenas clases» hay rápidamente algunos elementos que notan que se falsea considerablemente el resultado puesto que no se toma en cuenta la familia sin hijos, y el resto de la clase «normal» se deja convencer inmediatamente; por el contrario, en las clases de niños desfavorecidos* no se comprende este argumento y se inicia una discusión sobre la familia de los compañeritos, etc...

* En los Países Bajos estos niños son reagrupados en las clases llamadas de «tipo L.B.O.», análogas a las que en Francia reciben el nombre «de transición». Se conocen los peligros de esta segregación, además de que su origen socio-cultural ha sido ampliamente demostrado por numerosos estudios. Se puede notar que el ejemplo arriba citado por H. Freaudenthal aporta aún una contribución a esas observaciones, puesto que, en el momento de ese ejercicio, se pudo constatar que el número medio de hijos de las familias de hijos L.B.O. era de cinco contra tres en las otras clases.

Se pretendía colocarlos dentro de una situación «concreta», pero de hecho no era concreta para ellos; les era necesario imaginarla fuera de sus vivencias personales.

2. LOS MALENTENDIDOS SOBRE LAS SITUACIONES CONCRETAS

La moda de las situaciones concretas ha causado no pocos estragos. Al querer crear el concepto altamente contradictorio de «matemático-concreto»,* no se pudo más que crear nuevas fuentes de incomprensión.

En una lección de Curso Preparatorio** en que se introducía la numeración en base tres, la maestra manipulaba pequeños *cubos* (llamados «bloques lógicos») que ella denominaba «fichas» y refería la historia siguiente: «Para entrar al zoológico es necesario un *tiquete;* un tiquete vale tres francos, cada una de mis fichas vale un *franco* (notemos de paso que las dos significaciones del verbo valer no son idénticas). Para entrar al zoológico, cada persona dará, pues, tres francos» dice ella a la vez que muestra las «fichas». Luego, antes de comenzar el juego (la «taquila» era una máquina que transformaba tres francos en un tiquete), ella pide a los alumnos que alineen sus «fichas» sobre el escritorio. Yo vi al pequeño Régis (el último de la clase), quien había escuchado bien atentamente, tomar su caja de «fichas» (placas circulares y no cubos) y alinearlas en tanto que otros sacaban sus cubos. El los ordena bien y se cruza de brazos. Siendo la clase numerosa, la maestra no lo había visto actuar; cuando se le acerca, ella cree que él no había comprendido *nada* y que no había hecho nada. Pero no; él no había comprendido simplemente que lo que hoy se llamaba «ficha» no era lo que ayer había sido llamado «ficha» (y esto nunca había sido precisado); ¿qué pensaba él viéndola manipular los cubos que ella llamaba «fichas» y qué pasaba en su cabeza cuando él le oía decir que también eran francos, y luego tiquetes de entrada al zoológico?

Se podría llenar un libro con todas las extravagancias que se pueden ver en la utilización de los *bloques lógicos:* yo citaré simplemente un incidente al cual asistí recientemente.

Una maestra quería hacer un estudio de las *permutaciones:* ella decía, al comienzo, que se iba a buscar cuántos trenes diferentes se podrían construir con tres vagones y proponía, para ello, tomar bloques lógicos (una caja de

* Esta subasta de situaciones concretas parece deberse a una reacción contra los primeros adversarios de la reforma, quienes encontraban «las matemáticas modernas» demasiado «abstractas». Nuestro ministro de la Educación decía aún recientemente que el cálculo era más «concreto».. ¿Se puede verdaderamente considerar concreto el aprendizaje de operaciones con entes eminentemente abstractos como son los números? ¿En qué lo es más que todas esas *manipulaciones* a las cuales se entregan los niños con objetos diversos (pequeños autos, conchas de mar, etc...)?; pero, ¿se pueden clasificar esas actividades concretas de «matemáticas»? Más que querellas sobre los calificativos «abstracto» y «concreto», ¿no sería mejor preocuparse por ver lo que es simplemente «matemático»?.

** Primer año de escuela en Francia (niños de 6 a 7 años de edad)[2].

los cuales tenía cada alumno en su mesa); cuando el ejercicio se terminó a duras penas, ella propuso tratar el mismo problema para un tren de cinco vagones, y un alumno protestó diciendo «es imposible porque no hay sino tres formas» (en efecto los bloques lógicos de marca eran redondos, cuadrados o triangulares solamente...).

3. MALENTENDIDOS SOBRE LA «ESCENIFICACION» de un problema

A menudo, la historia referida para motivar al alumno y que constituye un *ropaje del problema* matemático es confusa (en todo caso, casi siempre, más complicada que el mismo problema matemático). El niño que no ha comprendido esta historia en el curso de matemáticas, que no sabe qué responder, concluye de allí que él no comprende las matemáticas y a menudo el maestro también lo cree así; pero de hecho él no había franqueado la *pantalla* que esta historia anteponía a las matemáticas, él no las había alcanzado aún y, cuando, luego de una larga conversación, se descorre el velo, el alumno dice: «¡Ah, es eso lo que usted quería!; y entonces él sabe resolver el problema (el verdadero problema matemático por fin descubierto).

Recientemente asistí a una clase de Preparatoria en que la maestra tuvo la idea de hacer un ejercicio sobre la adición de los enteros con parejas cuya suma era 6. Para ello distribuyó hojas de papel en las cuales estaban dibujadas filas de vaquitas de San Antonio como esta:

Ella pidió a los niños que dibujaran marcas sobre las dos alas de cada vaquita de manera que cada una tuviera siempre exactamente 6 marcas en la espalda.

Ciertamente varios niños comprendieron (adivinaron) rápidamente lo que la maestra esperaba; se oyó incluso, luego de unos cinco minutos, que un niño preguntó: «¿Se pueden dibujar 6 marcas en un lado y nada en el otro?»; pero para la mayor parte de los niños, la clase fue, durante una hora entera, una enorme confusión. Una alumna había dibujado concienzudamente 4 vaquitas con 3 marcas redondas a izquierda y 3 iguales a derecha; cuando yo le dije que todo estaba bien pero que ella podría, tal vez, dibujar una vaquita *«diferente»* para cambiar, ¡ella dibujó 3 marcas *cuadradas* de cada lado!. Enseguida, habiendo oído a la maestra constatar con un alumno vecino que había 7 vaquitas posibles, ella dibujó una vaquita con 7 marcas...

Para «ayudarlos» la maestra había distribuído a cada niño 6 cubitos, y les dijo que ellos podrían ver, haciendo dos paquetes con esos 6 cubitos, cómo repartir las marcas: en realidad la mayor parte de los niños no utilizó esos cubos y cada vez que, queriendo dar una explicación, la maestra se valía de esos cubos aparecía una confusión mayor.

Era evidente que los niños no veían que los dos problemas eran los *mismos:* para mostrárselo a un niño yo puse al comienzo un cubo sobre cada marca de una vaquita que tenía 6 marcas estableciendo así la biyección, luego, habiendo dispuesto unos cubos sobre otra vaquita, yo le pedí que dibujara las marcas. El niño supo enseguida responder a varias preguntas hechas sea en un sentido o en el otro sobre esa biyección marcas - cubos. Antes de esa pequeña escena, yo dibujé una vaquita con 2 + 3 marcas y le pregunté el número de marcas, él supo responder inmediatamente; otras pruebas análogas con otros niños me permitieron ver que no se presentaba ningún error sobre los *cálculos* (¡objetivo de la lección!); las incomprensiones radicaban, pues, esencialmente, ya sobre la significación de la pregunta propuesta, ya sobre el tipo de objeto dibujado (¿en qué una vaquita es «la misma» que otra?, pues los objetos de estudios eran las *vaquitas-módulo-la repartición-de-marcas,* curiosos entes en verdad), ya sobre el isomorfismo entre los dos problemas propuestos.

Se espera con frecuencia que los niños sepan trivialmente trasladar un problema a otro ya tratado; ésto es ignorar que ese traslado necesita poner en evidencia un *isomorfismo,* lo cual es frecuentemente más difícil de concebir que el problema propuesto inicialmente.

Ese tipo de malentendidos se ha hecho muy común debido a la moda de las «situaciones que se han de matematizar», ropajes que no son inventados sino para, justamente, velar, esconder la matemática. El arte de fabricar ejercicios se confunde entonces con el arte de hacer complicado lo que es sencillo*.

Hay otra manera de «escenificar» la matemática, de hacerla «concreta», de la cual yo debo decir algo: es la presentación de *películas matemáticas,* dibujos animados por ejemplo, lo más frecuente mudos (o con un fondo musical para «hacer agradable la matemática»). Esas películas son imaginadas para *sugerir* una noción, pero ellas pueden sugerir otra cosa a un niño, e incluso nada a otro. Cuando se ve una película en el cine, es bien raro que lo que se comprenda coincida exactamente con las intenciones del autor (como para toda obra de arte...), incluso sucede que se reconozca que no se comprende la *película,* o que no se comprenda al *autor.* ¿Por qué, cuando se trata de la comunicación de la matemática, sería necesario considerar que no se ha comprendido la *matemática?*

---

* Cf. tema de BEPC señalado en *Bulletin de l'APMEP,* No. 296 (diciembre, 1974). p. 931.

4. MALENTENDIDOS CREADOS POR EXPRESIONES VERBALES QUE CONFUNDEN VARIOS NIVELES LINGÜISTICOS

H. Freudenthal ha estigmatizado en su libro *Mathematics as an Educational Task* los defectos de los ejercicios que toman las letras del alfabeto por objeto. Citemos el contratiempo de un profesor que quería hacer estudiar «el conjunto de las x tales que x es una vocal», y se extrañaba de que muchos alumnos hubieran dicho que el conjunto era vacío. Un ejercicio análogo ha sido propuesto incluso como examen; el conjunto sobre el cual se basaba el problema era el conjunto de las x tales que x es una letra de la palabra «clase». ¿Será razonable pensar que los niños han tomado conciencia de que una letra es un objeto, de que ese objeto puede ser *designado* por un signo y de que ese signo puede ser, él mismo, una letra? (¿No será más bien que el autor de ese texto no se dio cuenta de esta dificultad)?*

Hay un dominio de la enseñanza donde se encuentran a cada paso riesgos de confusión entre *significante* y *significado:* es el estudio de la *numeración.* El problema es particularmente complicado porque aquí se tratan simultáneamente los números (entes abstractos, elementos de N), los nombres de los números (que designan, que significan los anteriores) y sus escrituras (representaciones que significan los nombres de los números); se trata pues de tes niveles (y no de dos solamente: objeto y nombre). El discurso que toma esos tres niveles por objeto es difícil de comprender y es generador de malentendidos puesto que él mismo se encuentra a otro nivel y parece confundir los otros tres en un nivel-objeto, lo que podría esquematizarse así:

Significante: Discurso del maestro que enseña la numeración

Significados { Escritura del nombre del número; Nombre del número; Número.

Ejemplo de frase leíada en una ficha de 6°: «... en base diez, los paquetes son de 10; hay 13 paquetes, se va a hacer una multiplicación para encontrar el número»...

(Cómo leer esta frase? El alumno lee «trece» indudablemente, ya que se trata de «uno, tres» por ser el número de paquetes de cada orden. Además, si el alumno que ha leído la frase parece no haber comprendido bien el sentido del «13», peor es aún lo que estaba escrito: en efecto, en todo sistema de numeración se puede escribir que los paquetes son de «10» por definición, pero lo importante es que, en base diez, ellos son de *diez* y en base dos de dos (¡que se escribe también «10»!).

* Letra-objeto: significado.
Letra-signo: significante.

La enseñanza de varios sistemas de numeración es muy interesante en principio porque ella debería permitir poner en evidencia lo que es la numeración misma y las técnicas de escritura y de cálculos (en particular el manejo de las «cantidades que se llevan» [3]); en efecto, por las razones vistas más arriba, es difícil de realizar sin confusión a causa de los niveles que implica; además es imposible tratar lingüísticamente todos los sistemas de numeración de la misma manera: nuestra lengua vehicular no es neutra; en español [4] por ejemplo, se puede hablar de «diez», de «trece» independientemente de la base de escritura (aunque «trece» proviene de «tres»), pero no de «diecisiete».

Una encuesta del IREM de Estrasburgo* mostró que los alumnos «establecen una equivalencia entre la noción de inverso de un número y la escritura 1/a» y «entre las nociones de número decimal y de número racional y las escrituras con coma y fraccionario», equivalencia que es calificada en el estudio de «fenómeno de subcomprensión»; aquí se trata muy claramente, en mi criterio, de un fenómeno que se puede hallar, al contrario, muy normal, muy lógico en función de la enseñanza hecha: hay una confusión de niveles, los números no se distinguen de sus representaciones escritas, por ejemplo $\frac{1}{8}$ no se ve como el ente abstracto número, sino como una tripla constituída por el «1», una barra de fracción y «8», luego es un número racional y no decimal puesto que se cree que un número decimal es una sucesión finita constituída por cifras y una coma (lo que excluye también 0,124999...).

En el informe de su encuesta, los autores dicen «nos ha parecido que sólo el reconocimiento de la buena respuesta bajo varias escrituras podía ser un índice de una comprensión de la noción, de allí la necesidad de presentar esas diferentes escrituras en medio de otras». Me parece que incluso eso es muy insuficiente: conocer (y saber reconocer) las traducciones de una palabra en varias lenguas diferentes no implica siempre que se conozca la significación de esa palabra. Tal como se hizo la enseñanza, así como de la comprensión que de ellas tuvieron los niños, de igual manera el control se hace sobre los nombres o, a lo mejor, de la *correspondencia* entre las nociones matemáticas y sus nombres pero no sobre esas nociones en sí mismas.

En efecto, la interpretación por la confusión de los niveles de lenguaje, por el hecho de que el maestro no hable, frecuentemente, sino de los significantes en lugar de los significados, permite explicar buen número de errores constatados por diferentes observadores: por ejemplo, cuando se repara** que los alumnos se equivocan al ordenar en orden creciente 14,2 y 14,18, ¿se

* «Sur l'acquisition des structures numèriques de 3» por un equipo del IREM de Estrasburgo, Educational Studies in Mathematics 5(1974) 441-459.
(IREM: Instituto de Investigación de la Enseñanza de la Matemática).

** Encuesta llevada a cabo por P. Buisson del IREM de Ruen. Es interesante subrayar que él señala que los adultos en formación permanente sin cultura escolar cometen menos el error: la vida les ha proporcionado mejores condiciones de conocimiento de los números y del papel de la coma.

puede atribuir ésto simplemente a un «mal conocimiento del orden de los decimales» o es más bien la significación del símbolo «14,2» lo que se ignora? Se constataría fácilmente eso al comprobar que la comparación de 14,20 con 14,18 daría probablemente resultados muy diferentes, lo que probaría que las escrituras «14,20» y «14,2» no se toman en cuenta como un mismo objeto.

Otro resultado* de esta serie de trabajos confirma aún la presente tesis: los ejercicios en que se pide reinscribir una lista de números ordenándolos en orden creciente son más satisfactorios que aquellos en que se pide ordenar los mismos números atribuyéndoles un número de orden: ¿no es ésto volver a designar un número por un número lo que es fuente de confusión?

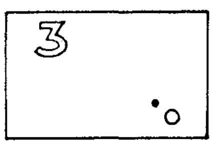
Recordemos también una simpática extravagancia observada por la señora Krygowska en un alumno que, en suma, no veía en los *graffiti* matemáticos sino sucesiones de signos con una regla de simplificación: en

$$\frac{\text{«arc tg } \alpha\text{»}}{\text{r}}$$

él simplificaba por «r».

¿Se puede, acaso, concluir de aquí que debemos enseñar a los alumnos que una escritura no debe jamás ser considerada en sí mismo sino que siempre debe considerarse como significante de un significado y que es sobre este significado que se hace el discurso? Desafortunadamente ésto no es cierto: hemos visto ya que, en el estudio de la numeración, una parte del discurso se hace, frecuentemente, sobre la escritura de los números; así mismo, ¿todas las «x» escritas en el tablero o pronunciadas durante la solución de una ecuación son los significantes de un mismo objeto? No: la «x» de la frase «hago pasar x del miembro de la derecha al miembro de la izquierda» no es la misma que es sujeto en la frase «x es igual a menos dos»; la una (*¿concreta?*) está situada en el tablero; la otra (¿abstracta?) está situada en $\mathbb{R}$, en la cabeza del que habla. Incluso los dos «2» escritos lado a lado en «22» no tienen la misma significación.

Más allá de estas situaciones complicadas ya, ciertos alumnos se encuentran confrontados en casos aún más extravagantes, como en el ejercicio siguiente** redactado tal cual (estando la cifra dibujada en color naranja): «Trace en el plano P un número 3 bien hecho y un punto 0:



* Cf. Pluvinage y Duval - próximo a aparecer.
** Papy, *Matemática Moderna I*, p. 423

Dibuje en verde la imagen del 3 simétrica respecto al punto 0. ¿La imagen verde es aún un 3? Explique usted. A mi parecer, la imagen naranja no podía ser ya un 3, no era un número sino un conjunto de puntos.

5. MALENTENDIDOS LIGADOS A LAS REPRESENTACIONES GRAFICAS

Ciertamente, siempre se ha oído hablar de las confusiones que se pueden calificar de abuso de lenguaje entre funciones y sus representaciones gráficas del género «esta función es una parábola»; estas fallas verbales no parecen engendrad verdaderos malentendidos. La abundancia de representaciones gráficas (y en particular los diagramas llamados «de Venn») en la enseñanza ha dado nacimiento a una nueva fuente de incomprensión de la matemática: la confusión entre los objetos y sus representaciones.

He aquí un ejercicio propuesto tal cual a alumnos de 5°:

«Ejercicio

He aquí el esquema de un conjunto E. Recopiarlo; encerrar primero el conjunto M de los mamíferos y luego encerrar el conjunto 0 de los animales que viven en el océano.

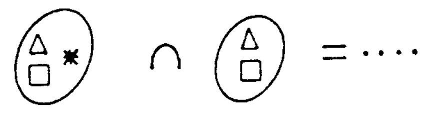
Encerrar el conjunto U de los animales que han sido encerrados ya.

Escribir ese conjunto U en extensión».

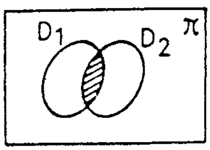
¿Qué pensarían los siquiatras del comportamiento de alguien que hablara así indiferentemente de animales encerrados y de animales que viven en el océano? ¿No es esto un tipo de confusión de niveles que es calificado de delirio, síntoma, creo yo, de esquizofrenia? Tal ejercicio que coloca al mismo nivel los animales y la escritura de sus nombres hace pensar en el bello (y un poco alucinante) dibujo de Escher*, pero no aporta sino malentendidos sobre lo que es la conjunción de dos predicados (operación que no tiene sentido sino cuando los dos predicados se aplican a los mismos objetos).

Estas representaciones son utilizadas como medio de comunicación sin que un modo de empleo coherente de ellas sea explícitamente proporcionado por el maestro (y con razón: ¿qué designan en el ejercicio anterior los signos en el interior del diagrama?).

H. Freudenthal señala en *Mathematics as an Educational Task* los ejercicios del tipo:



donde no se sabe si se trata del *mismo cuadrado* (y es peor aún cuando en lugar de cuadrados se trata de muñecas, de aviones, etc...). Cuando los puntos del plano delimitado por el diagrama de Venn representan puntos del plano es aún más traumatizante, como en los ejercicios en que se representan por dos óvalos dos rectas paralelas en que se debe sombrear la intersección vacía:

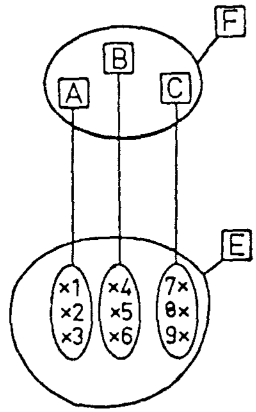


(Además, si $D_1 \cap D_2$ se representa así, ¿cómo representar entonces $D_1 \cap \complement D_2$ que también es vacío? ¿Pueden coincidir las dos representaciones?).

Y sin embargo no se puede decir que algunos no hayan ensayado codificar esas representaciones; incluso se encuentran a veces condicionamientos que parecen ritos: para tener un conjunto se necesitan una cuerda y una etiqueta (más adelante volveremos a este tema).

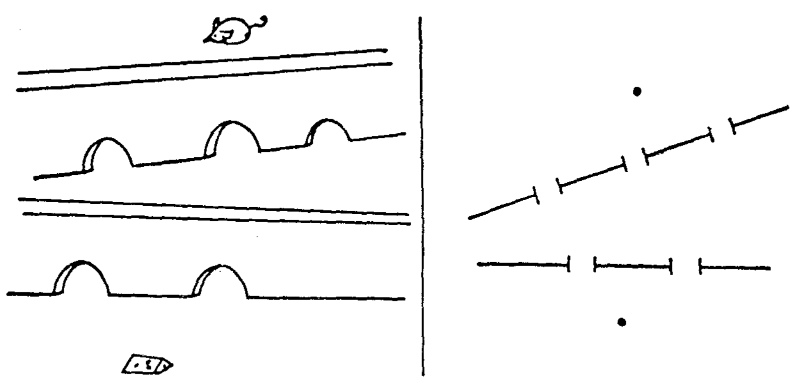
Pero si la etiqueta representa el nombre del conjunto, es totalmente lógico que los niños no «comprendan el dibujo siguiente:

* N.C. Escher, *Tekenen*, «Manos dibujando»: el dibujo representa dos manos que se dibujan mutuamente.



donde F es el conjunto-cociente de E según una cierta equivalencia mientras que él está representado como el conjunto de las *etiquetas* de las clases y no como el conjunto de clases.

Incluso cuando la representación se hace sin que entrañe ella misma confusión de niveles y que el niño no confunda el objeto representado y su representación, la *lectura* de esta representación puede provocar malentendidos: por ejemplo, ante el ejercicio siguiente, en que los niños debían determinar el número de caminos que debía seguir el ratón para alcanzar el queso, muchos niños se sintieron incomodados por la lectura del dibujo en perspectiva (ellos interrumpían sus trazos bajo el puente y perdían así el rastro de algunos caminos...); por el contrario ante la representación más abstracta propuesta a la derecha no se constató equivocación.



Además cuando se proponen dos sistemas de representación diferentes, sucede que los niños imaginan entre ellas conexiones parásitas que perturban su comprensión. Por ejemplo, en una ficha en que estaban dibujados dos libros, se había pedido colocar sobre una recta graduada (también ella representada en la hoja) el número de páginas de esos libros: algunos niños quisieron trasladar (con ayuda de un espacio entre el pulgar y el índice) el espesor de los libros sobre la recta confundiendo así la representación del número de páginas y la medida de la representación del espesor del libro.

6. ¿UNA IDOLATRIA?

El fenómeno que consiste en tomar un *símbolo* por una idea se llama de ordinario «idolatría», ¿La enseñanza de la matemática es una idolatría?*

Es de temerse que sí, como lo vamos a ver:

a) Las «concretizaciones» de esquemas

Las manipulaciones hechas por los niños sobre lo que se llama «los conjuntos» son muy significativas de este tipo de desviación: se aprende aquí que se «hace» un conjunto al colocar objetos sobre la mesa y al encerrarlos (esto es indispensable, sino «no se ha terminado el conjunto») con una cuerda provista de una «etiqueta-nombre» y eventualmente de una «etiqueta-cardinal» e incluso de una «varita»** Se concretiza, pues, así, en lo que se llama «un conjunto», la *representación* llamada «de Venn» de un conjunto. Se puede, en rigor, concebir que para ciertos problemas sea interesante representar por un diagrama dibujado en el tablero el conjunto de conchas de mar que la maestra ha traído en su canasta, pero, cuando ella declara que para hacer un conjunto con esas conchas hay que disponerlas como en el tablero y concretizar con una cuerda y etiquetas el diagrama que se hubiera esquematizado, hay aquí una *inversión* completa absolutamente espantosa***. Incluso puede verse en una película**** a una maestra que pide, luego de haber «hecho» un conjunto de piedrecitas y un conjunto de conchas de mar, «hacer el conjunto de todo lo que hay sobre la mesa». Se constata que ella quiere hablar de la reunión de los dos conjuntos precedentes, es decir que para ella las cuerdas y las etiquetas no hacen parte «de lo que hay sobre la mesa». En realidad se ve que los niños están bien *amaestrados* y que no se equivocan, pero, ¿es esto verdaderamente sano y se puede a la vez enseñar eso y pretender que la enseñanza de la matemática debe formar el espíritu lógico?

Se podría citar numerosos casos de desviaciones análogas. Yo quisiera solamente recordar una experiencia en que adolescentes de 14 a 15 años, para estudiar las permutaciones de un conjunto de 4 elementos, me parece, in-

---

* ¿Se dirá que de ciencia de ella es, la matemática, por su enseñanza, se ha transformado en religión? O bien, como en un artículo aparecido en *Gulliver* (octubre 1973), ¿que los niños franceses se han convertido en *bècassines?* [8]

** ¡Cuya longitud es proporcional al cardinal! Habría que discutir esto también desde otro punto de vista: malentendido sobre la noción de cardinal.

*** ¿Acaso una ciudad tiene, materializadas sobre sus calzadas, las cuadrículas que se han dibujado en sus planos?

**** Colección Testimonios pedagógicos del C.A.V. de San Cloud: «Reunión-Intersección en el Curso Preparatorio».

tercambiaban sus puestos alrededor de una mesa: ¡cada uno llevaba colgado alrededor del cuello un gran bloque lógico en plástico! Aquí se trata de una desviación a partir de la idea inicial de Diénes. Incluso cuando Fletcher propuso el juego en que una serie de niños, al levantar y bajar los brazos alternativamente a ritmos diferentes simulan un contador binario, él no había previsto que esa idea sería tomada por la mayor parte de los manuales franceses de 6° e incluso de la escuela elemental, transformada, llevada hasta el absurdo como en un manual en que los números se ven representados por dibujos de sucesiones de niños que levantan un brazo y que tienen un cartón en el cual está dibujada una cifra.

Se notará aquí que la degeneración va aún más lejos que la que se ha constatado en el caso de los diagramas de Venn y de las cuerdas: luego de haber encontrado un medio para concretizar una representación de los números, se ha realizado una esquematización de esa concretización a la cual se le ha permitido reunirse (y confundirse con) una representación de los números.

!Esta vez la confusión de niveles llega hasta el colmo!

b) Las relaciones y los diagramas sagitales

Los programas franceses de 6° y de 5° imponen un estudio de las *relaciones.* En realidad, prácticamente en todas las clases (y los manuales son a la vez testigos y responsables de ello) la enseñanza no se ocupa sino de las relaciones binarias; no se trata aún de esas relaciones en sí mismas sino de sus representaciones. Se oye corientemente decir que «una relación es reflexiva si *ella** tiene bucles en todas partes». ¿Se trata de un abuso de lenguaje sin importancia? o pienso que, al contrario, es un revelador de un malentendido como revelador es también el cuestionario sometido a los alumnos de 5° por el I.R.E.M. de Estrasburgo**. Ese cuestionario quiere evaluar las adquisiciones de los alumnos pero, respecto a las relaciones, las adquisiciones sometidas a prueba han tenido que ver casi todas con las propiedades de las *representaciones* de las relaciones, en particular de los diagramas sagitales. Los niños de 5° estudian más una *teoría de diagramas* [6] que una *teoría de relaciones.**** Es divertido constatar que los mismos que ensayan enseñar una geometría sin figuras hayan dejado desarrollar esa geometría de diagramas.

* Cf. en particular la expresión «flecha de una relación» en las obras de Papy.

** «Sobre la asimilación de los programas 6°.-5°» por un equipo del IREM de Estrasburgo, *Educational Studies in Mathematics* 5 (1973), 207-242.

*** Cf. «A propósito de las relaciones en el primer ciclo de secundaria» J. Adda en Documents et recherches sciences (junio 1975) p. 6-9.

7. LAS TOMAS DE CONCIENCIA

a) La *igualdad* estuvo considerada mucho tiempo como intuitiva: de esta relación que se utiliza constantemente en todas las clases no se había tratado jamás. Desde hace algunos años, en fin, se ha caído en cuenta de las dificultades subyacentes. Así, se ha prohíbido hablar de «triángulos iguales» cuando son isométricos (lo cual sin embargo no sería muy grave, a mi manera de ver, si se buscara más bien hacer comprender a los niños lo que es un *triángulo-módulo-un-desplazamiento:* más bien que hablar de equivalencia en lugar de igualdad, sería mejor hablar de igualdad en el conjunto-cociente por la equivalencia). Los manuales recientes traen con frecuencia en su primer capítulo largos despliegues sobre la igualdad. De esta manera se busca explicar que el signo de igualdad se escribe entre dos signos diferentes que representan el mismo objeto, que un objeto único puede tener dos nombres y que no hay que confundir un objeto con su nombre; todo esto impide a los niños el sentirse incómodos (y tal vez más que antes puesto que se ha atraído la atención sobre ello) por expresiones como «dos números iguales», «dos rectas confundidas» (son los números, las rectas de los cuales se dice que son dos en lugar de uno, no de sus nombres; en realidad hay aquí un penoso abuso de lenguaje). D. Lacombe ha remarcado incluso en una obra reciente la siguiente frase, bien inquietante: «los elementos de un conjunto deben ser diferentes».

b) Se ensaya a veces en los manuales, con colores por ejemplo, distinguir las frases del *lenguaje matemático* de aquellas que se encuentran a un nivel *matemático,* que tienen las precedentes por objeto. Incluso se encuentran en algunas obras ejercicios inspirados en la paradoja del Mentiroso. Yo pienso que esa vía podría ser explorada con más profundidad y que se debería por ejemplo insistir en el hecho de que cuando «A es una condición suficiente para B» se tiene el derecho, dentro del discurso en que se cuenta cómo se busca mostrar B, de decir «hay que mostrar A para mostrar B» (subentendido «aplicando el criterio precedente»). Si esas inversiones por cambio de nivel no se ponen en evidencia, la incomprensión de la noción de condición necesaria o suficiente es inevitable cualesquiera que sean los cuidados aportados a la definición de la implicación; y no se trata absolutamente, en este caso, de una confusión entre la implicación y la equivalencia.

c) Esas dificultades tienen algo de cuasi-diabólico que ellas *no pueden*, por naturaleza, *ser explicitadas* sin transformarse y complicarse.

Si se quieren tratar separadamente, para distinguirlos, un objeto y su designación, hay la obligación de hablar del objeto (designándolo) y de la designación del objeto (designándola), lo que introduce dos nuevos entes según el esquema siguiente:

Objeto —————————— Nombre
| |
Representación del objeto - Representación del nombre

Una experiencia del IREM de Burdeos* es sorprendente a este respecto: se quieren distinguir los niveles de una rosa y de un signo que la representa pero, para hablar de cada uno de ellos, hay que tomarlos por objeto, por significado, y entonces presentar de ellos un nuevo significante; se debe necesariamente desdoblar los niveles (además la rosa está representada aquí por *sus* dos fotografías y el signo está representado por *sus* materializaciones sobre tres cartones puesto que la correspondencia entre fotografía y materialización del signo se hace por intermedio de un cuadro anexo).

Es inútil volver a las paradojas clásicas para recordar aquí los peligros de tomar su propio discurso como objeto de discurso, todo lo que se puede esperar es, creo yo, tomar conciencia, quizá justamente por numerosas trampas, de esas situaciones paradojales; pero para ello es necesario que los maestros mismos estén siempre alerta, se pregunten «¿cómo se interpretará lo que yo digo?». Cuando se enseña se tiene que pensar no solamente en lo que se dice sino también en lo que los otros entienden (¿colocarse en el lugar del alumno? Propiamente no. Aún más difícil que esto, es necesario colocarse en el lugar *de los* alumnos, y todos son diferentes y cada uno tiene razones para tener su propia interpretación...)

Además, es necesario conocer (en el sentido de «haber tenido contactos con», «haber reencontrado») los objetos; estamos pues inducidos a *nombrarlos* antes que se pueda *hablar de sus nombres;* ¿se pensaría , por ejemplo, en explicarle a un francés que aprende a nombrar los primeros objetos de su alrededor que, si él fuera inglés, esos objetos tendrían para él otro nombre? ¿Acaso es razonable querer explicar el principio de la numeración antes de haber nombrado números de una base particular (que sería la base diez puesto que los nombres de los números están ligados a ella?).

8. CONCLUSION

Yo no pretendo reducir la dificultad de las matemáticas a las situaciones analizadas aquí, y yo sé también que «comprender la matemática» no es suficiente para «ser bueno en matemática»; la invención de una *astucia* para resolver un problema es un fenómeno exterior a mi propósito. Yo me he contentado con analizar aquí una de las causas por las cuales el discurso del profesor de matemática puede ser incoherente, incomprensible**

---

* Película «Dèsignation», Serie Testimonios pedagógicos del CAV de San Cloud.

** La referencia a varias encuestas tenía por objeto recordar que los test pueden difícilmente dar informaciones sobre un *concepto,* mientras que las preguntas y respuestas pasan siempre por el filtro (¿o la pantalla?) del lenguaje.

Como lo decía un día H. Freundenthal: «Lo extraño no es que algunos alumnos no comprendan, sino que algunos comprendan». Esta tesis no está pues en contradicción con la de aquellos que piensan que la seudo-comprensión de las matemáticas no es con frecuencia sino un engaño, sino una señal de docilidad (D. Lacombe).

Frecuentemente se habla de la selección por las matemáticas gracias a las fuentes de incomprensión. Indudablemente hay incomprensiones en otras actividades escolares; basta asistir a un curso de C.P. en que las asignaturas no están aún claramente diferenciadas, se ve que son casi siempre los mismos los que no ven (¿no adivinan?) lo que dice la maestra, a quienes el discurso de la maestra permanece extraño. ¿Por qué podrían ellos seguir medianamente el programa escolar en las otras materias y sentirse rápidamente excluídos definitivamente del mundo de las matemáticas? Se dice con frecuencia, y es cierto, que es porque en esta disciplina los conocimientos se encadenan, dependen de lo adquirido antes; sin embargo es probable que sea así puesto que en los otros dominios los niños pueden, de tiempo en tiempo, reparar de qué se habla, reconociendo los objetos de su alrededor; en matemática semejante reconocimiento es una fuente de confusión en contrario, no se ve sino una representación, jamás el ser matemático en sí.

NOTAS

1) La expresión «jouer le jeu» ha sido traducida por el regionalismo «llevar la cuerda», que tiene el mismo sentido de «hacer el juego», «representar la comedia»...

2) Una clasificación bastante general del sistema escolar francés es la siguiente:

Maternal (no obligatoria) : edad 5 a 6 años;
Cursos Preparatorios 1 y 2: $C.P._1$ y $C.P_2$;
Cursos Elementales 1 y 2: $C.E._1$ y $C.E._2$;
Cursos Medios 1 y 2: $C.M._1$ y $C.M._2$;
Liceo: que se comienza a los 11 a 12 años:
Cursos de 6°, 5°, 4°, 3° (en ese orden)

Bachillerato, que consta de los
Cursos 2°, 1° y Terminal
En promedio, el bachillerato se obtiene a los 18 años

3) La expresión entre comillas corresponde a la palabra francesa «retenue». En particular, en ..7 + ..8 = .15; la «retenue» es 1 que se adiciona a las decenas...

4) Evidentemente en el original dice «francés» que se reemplazó por «español» por la similitud del caso.

5) El calificativo de «bécassine »(chochaperdiz) se da a personas «medio tontas».

6) «Teoría de diagramas» no traduce exactamente la ironía original, expresada por «théorie des patates».