Revista INTEGRACION
Departamento de Matemáticas UIS
Vol. 3, No. 2, julio-diciembre 1985

Dos extensiones de la desigualdad de Bernoulli

BERNARDO MAYORGA *

Como lo sabe todo estudiante de análisis, en la determinación de ciertos límites importantes (e.g. $(1 + (1/n))^n$ cuando $n \to \infty$) y en el estudio de algunas funciones elementales (e.g. la exponencial) juega papel fundamental la desigualdad o lema de Bernoulli (Jacob): si $x > -1$ entonces para cualquier entero positivo n se tiene

$$(1 + x)^n \geqslant 1 + nx\,. \tag{0}$$

La demostración generalmente se propone en los textos como ejercicio de aplicación del principio de inducción matemática. Así, en [2] es el ejercicio I.4.10-14; en [4] es el 1.3.9 (aparece allí para $x \geqslant 1$, pero evidentemente es una errata por $x > -1$, ya que para $x > 0$ la desigualdad es una consecuencia trivial del teorema del binomio); en [3] es el ejercicio 2.18 y la demostración se da como una de las «soluciones a problemas seleccionados» al final del libro; en [1] está demostrada dentro del texto. En el libro [5] se presenta generalizada como desigualdad estricta para cualquier potencia real $m > 1$, pero sólo para $x > 0$ (también allí hay errata: aparece $m \geqslant 1$, lo cual no puede ser puesto que con $m = 1$ se obtiene la igualdad para cualquier x) y se propone como ejercicio de aplicación de las derivadas (Nº 52 en los de repaso del Capítulo IV).

* Profesor Asociado, Departamento de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia.

La igualdad en (0) tiene lugar únicamente en dos casos, y ambos son obvios: fuera del ya mencionado de $n = 1$ se cumple para $x = 0$ con cualquier natural n. Así pues, con relación a la desigualdad propiamente dicha se dan siempre sólo condiciones suficientes para que ocurra y podríamos decir que la afirmación esencial tiene, en los dos casos, las siguientes formas compactas *:

$$x \in (-1,0) \cup (0,\infty) \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}_2 : (1+x)^n > 1 + nx \tag{1}$$

$$x \in (0,\infty) \wedge a \in (1,\infty) \Longrightarrow (1+x)^a > 1 + nx \ . \tag{2}$$

Es claro que la gracia de la demostración de (1) consiste en ser elemental, en el sentido de que fuera del principio de inducción matemática (que en el fondo no es tan elemental) sólo se recurre al manipuleo... elemental de desigualdades. Por otra parte, la demostración de (2) se plantea -por lo menos en [5]- como aplicación de las derivadas, lo cual la hace rutinaria pero no estrictamente elemental. De todas maneras, es curioso observar que ni los valores de x dados en (1) agotan las posibilidades de la desigualdad con potencias enteras positivas, ni las agotan tampoco los exponentes reales considerados en (2) manteniendo la x en el intervalo clásico $(-1, \infty)$. Más exactamente, tienen lugar las siguientes afirmaciones:

$$x \in [-2,0) \cup (0,\infty) \Longleftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}_2 : (1+x)^n > 1 + nx \, , \tag{1'}$$

$$x \in (-1,0) \cup (0,\infty) \ \wedge \ a \in \mathbb{R} - [0,1] \Longleftrightarrow (1+x)^a > 1 + ax \tag{2'}$$

La afirmación (1') nos dice que en la desigualdad de Bernoulli se le puede añadir a los valores de x todo el intervalo $[-2, -1]$ -y nada más-; la afirmación (2') dice que manteniéndose en el mismo dominio «estándar» de (1), la desigualdad sigue siendo válida con cualquier potencia real que no pertenezca al intervalo $[0,1]$.

Demostración de la suficiencia en (1') y (2')

1) a. Sea $x \in (-1,0) \cup (0,\infty)$. Entonces** $1+x > 0$ y $(1+x)^2 = 1+2x+x^2 > 1+2x$. Supongamos ahora que la desigualdad se cumple para un cierto k. Entonces $(1+x)^{k+1} = (1+x)^k (1+x) > (1+kx)(1+x) = 1 + (k+1)x + kx^2 > 1 + (k+1)x$, o sea que también se cumple para $k+1$. Por el principio de inducción matemática tenemos que $\forall n \in \mathbb{N}_2$: $(1+x)^n > 1 + nx$.

b. Sea $x \in [-2,-1]$. Entonces $1+x \in [-1,0]$ y $\forall n \in \mathbb{N}_2$: $(1+x)^n > -1$. Pero $nx \in [-2n, -n]$, luego $1+nx \in [1-2n, 1-n]$ y por consiguiente $\forall n \in \mathbb{N}_2$: $1+nx \leqslant -1$. Así pues, $(1+x)^n > -1 \geqslant 1+nx$.

c. Con $x=-2$ y $n \geqslant 2$ tenemos $(1+x)^n = (1-2)^n = (-1)^n = \pm 1$. Por otra parte, $1+nx = 1-2n \leqslant -3$, así que $(1+x)^n = \pm 1 > -3 \geqslant 1+nx$.

2) Sea $x \in (-1,0) \cup (0,\infty)$ y $a \notin [0,1]$. Definamos

$$\begin{array}{ll} f : (-1,\infty) \to \mathbb{R} & g : (-1,\infty) \to \mathbb{R} \\ \quad x \mapsto f(x) = (1+x)^a \, , & \quad x \mapsto g(x) = 1+ax \end{array} \tag{3}$$

a. Sea $a > 1$. Entonces $f'(x) = a(1+x)^{a-1} > 0$, $f''(x) = a(a-1)(1+x)^{a-2} > 0$, lo cual indica que con $a > 1$ la función f es estrictamente creciente y estrictamente convexa. Por otra parte, $f(0) = 1 = g(0)$ y $f'(0) = a = g'(x)$, lo que quiere decir que en el intervalo $(-1, \infty)$ la recta $1+ax$ es tangente a la curva convexa $(1+x)^a$ en el punto único $x = 0$, y por consiguiente $\forall x \in (-1,0) \cup (0,\infty)$ y $a > 1$ se tiene la desigualdad estricta pedida.

b. Sea $a < 0$. Entonces $f'(x) = a(1+x)^{a-1} < 0$, $f''(x) = a(a-1)(1+x)^{a-2} > 0$, o sea que con $a < 0$ la función f es estrictamente decreciente pero sigue siendo estrictamente convexa. Al igual que con $a > 1$ se tiene $f(0) = g(0) = 1$ y $f'(0) = g'(x) = a$, y en consecuencia $\forall x \in (-1,0) \cup (0,\infty)$ y $a < 0$ se tiene la desigualdad estricta $(1+x)^a > 1 + ax$. □

Demostración de la necesidad en (1') y (2')

1) a. Si $x=0$ se tiene la igualdad con cualquier $n \in \mathbb{R}$.

b. Sea $x < -2$, es decir, $x = -2 - \alpha$, con $\alpha \in (0,\infty)$.

Para tener $(1+x)^n < 1+nx$ basta tomar un número n *impar* tal que, por ejemplo, $n \geqslant 4/\alpha^2$. En efecto, tomar un tal n equivale a tomar $\alpha^2 \geqslant 4/n$ y por consiguiente

$$(1+x)^n = (1-2-\alpha)^n = (-1-\alpha)^n = (-1)^n (1+\alpha)^n = -(1+\alpha)^n =$$

$$\left[1 + n\alpha + \frac{n(n-1)}{2!}\alpha^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\alpha^3 + \quad + n\alpha^{n-1} + \alpha^n \right]$$

* En lo que sigue $\mathbb{N}_2 = \{2,3,4,...\}$.

** En este literal se repite simplemente la demostración corriente de (1), tal como aparece, por ejemplo, en [1] ó [3].

$$< -\left[1 + n\alpha + \frac{n(n-1)}{2}\alpha^2\right] \leqslant -\left[1 + n\alpha + \frac{n(n-1)}{2}\frac{4}{n}\right]$$

$$= -[1 + n\alpha + 2n - 2] = 1 + n(-2-\alpha) = 1 + nx,$$

o sea $(1 + x)^n < 1 + nx$.

2) a. si $x=0$ tiene lugar la igualdad en la parte derecha de (2') con cualquier $a \in \mathbb{R}$.

b. Si $x \leqslant -1$ se tiene $1+x \leqslant 0$, por lo cual la expresión $(1+x)^a$ carecerá en general de sentido.

c. Con $a=0$ ó $a=1$ se tiene la igualdad en (2').

d. Sea $x \in (-1,0) \cup (0, \infty)$ y $a \in (0,1)$. Para las mismas funciones f y g definidas en (3) tenemos

$f'(x) = a(1+x)^{a-1} > 0$, $f''(x) = a(a-1)(1+x)^{a-2} < 0$, luego f es estrictamente creciente y estrictamente cóncava. Como $g(0) = 1 = f(0)$ y $g'(x) = a = f'(0)$, quiere decir que en el intervalo $(-1, \infty)$ la recta $1+ax$ es tangente a la curva cóncava $(1+x)^a$ en el punto $x=0$ y en los demás pasa por encima:

$$(1+x)^a \leqslant 1+ax. \square$$

BIBLIOGRAFIA

[1] PISOT, Ch., ZAMANSKY, M. Mathématiques Générales (Algébre-Analyse). Dunod, Paris, 1966.

[2] APOSTOL, T.M. Calculus, V.I , Second Ed. Xerox, Lexington, 1967.

[3] SPIVAK, M. Calculus. Reverté, Bogotá, 1978.

[4] DE LILLO, N. J. Advanced Calculus with Applications. Macmillan Publishing Co., Inc., New York, 1982.

[5] STEIN, S.K. Cálculo y Geometría Analítica, 3a. ed. McGraw-Hill, Madrid, 1984.