Revista INTEGRACION
Departamento de Matemáticas UIS
Vol. 3, No. 2, julio-diciembre 1985

# Una actividad de clase: Los criterios del cociente y de la raíz para la convergencia de series

GABRIEL YAÑEZ *

La situación que se relata se dio en un curso de Cálculo III para estudiantes de ingeniería. Aunque el desarrollo hecho no tiene nada de original, es importante analizarlo desde el punto de vista didáctico, ya que se trata simplemente de desarrollar una inquietud planteada por los estudiants y que obviamente no figura ni en el sagrado programa oficial de la materia, ni en los textos usuales de Cálculo.

En el libro de cálculo de Apostol [1], página 490, se encuentran los siguientes ejercicios: Decir de cada una de las siguientes series si es convergente o divergente, justificando su respuesta.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \, n!}{n^n}$ Aplicando el criterio del cociente:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow \frac{2}{e} < 1 \text{ , convergente.}$$

* Profesor Asistente, Departamento de Matemáticas. Universidad Industrial de Santander. Bucaramanga, Colombia.

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$ $\quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \to \frac{3}{e}$ , divergente.

Es apenas obvio generalizar la situación anterior:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n n!}{n^n},\ a > 0\ ;\ \frac{a_{n+1}}{a_n} \to \frac{a}{e}\ ; \quad \begin{array}{l}\text{si } a < e, \text{ convergente;} \\ \text{si } a > e \text{ divergente.}\end{array}$$

Surge la pregunta: Si $a = e$, ¿qué ocurre con la serie, es decir, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n n!}{n^n} = ?$

**Desarrollo:**

Dado el contexto, lo primero que se piensa es en ensayar con el criterio de la raíz:

$$a_n^{1/n} = (e^n n!/n^n)^{1/n} = e\,(n!/n^n)^{1/n}.$$

Surgió otro problema:

$$\lim_{n \to \infty} (n!/n^n)^{1/n} = ?$$

Después de varios intentos infructuosos, en el mismo libro de Apóstol encontramos una elegante solución (ejercicio 19, página 487): como $f(x) = \log x$ es una función estrictamente creciente, para todo $x \geqslant 1$ se tiene

$$\sum_{k=1}^{n-1} \log k < \int_1^n \log x\, dx < \sum_{k=2}^{n} \log k\,,$$

o sea

$$\log(n-1)! < \log n^n - n + 1 < \log n!\,,$$

de donde

$$(n-1)! < n^n e^{-n} e < n!\,,$$

y como



$$(n-1)! < n^n e^{-n} e$$

entonces

$$n! < n^{n+1} e^{-n} e\,,$$

o sea,

$$n^n e^{-n} e < n! < n^{n+1} e^{-n} e$$

$$e^{-n} e < \frac{n!}{n^n} < n e^{-n} e\,,$$

$$\frac{e^{1/n}}{e} < \frac{(n!)^{1/n}}{n} < \frac{n^{1/n} e^{1/n}}{e}$$

como $n^{1/n}$ y $e^{1/n} \to 1$, entonces (por el teorema del sandwich para sucesiones)

$$(n!/n^n)^{1/n} \underset{n \to \infty}{\to} \frac{1}{e} \tag{1}$$

Luego $a_n^{1/n} \underset{n \to \infty}{\to} 1$ y el criterio de la raíz tampoco es aplicable. Por este lado nos fregamos, pero obtuvimos un buen límite:

$$(n!/n^n)^{1/n} \underset{n \to \infty}{\to} \frac{1}{e}$$

¡Ah!, pero en el ejemplo 3 de la página 489 Apóstol demuestra que si

$$a_n = \frac{n!}{n^n} \text{ entonces } \frac{a_{n+1}}{a_n} \to \frac{1}{e}$$

Lo mismo el cociente que la raíz... ¿Qué se esconde detrás de esta coincidencia?

Olvidemos esto por ahora, y volvamos al problema inicial, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n n!}{n^n}\ .$$

Analicemos la condición de necesidad, es decir, ¿será que $\frac{e^n n!}{n^n} \underset{n \to \infty}{\to} 0$ ?

¡Pues no! Resulta que $a_n = \dfrac{e^n\, n!}{n^n}$ es una sucesión creciente:

$$\frac{e^n\, n!}{n^n} < \frac{e^{n+1}\,(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \Leftrightarrow \left(\frac{n+1}{n}\right)^n < e$$

lo que garantiza la validez, ya que la sucesión $(1+1/n)^n$ es creciente y converge precisamente a $e$ (ver, por ejemplo, [2]).

Como $a_1 = e$, entonces $a_n \not\to 0$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{e^n\, n!}{n^n}$ diverge •

Alguien podría decir en este momento que el desarrollo anterior debió hacerse desde el principio; pero la verdad es que el no ser tan algorítmico nos permitió obtener (1) y además conjeturar el siguiente resultado.

**Proposición:** Sea $a_n$ una sucesión de números reales positivos.

Si $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = L$ y $\lim_{n\to\infty} a_n^{1/n} = M$ entonces $L = M$ •

**Demostración:** a) Sea $L > 0$.

Como $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = L$, dado $\varepsilon \in (0,L)$ existe $N$ tal que

$$L - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < L + \varepsilon \text{ para } n \geq N,$$

de donde

$$a_{n+1} < a_n (L+\varepsilon) < a_{n-1} (L+\varepsilon)^2 < \dots < a_N (L+\varepsilon)^{n-N+1}$$

$$(L-\varepsilon)^{n-N} a_N < a_n < (L+\varepsilon)^{n-N} a_N,$$

$$(L-\varepsilon)^{1-N/n} (a_N)^{1/n} < a_n^{1/n} < (L+\varepsilon)^{1-N/n} (a_N)^{1/n} \qquad (*)$$

$$\lim_{n\to\infty} (L-\varepsilon)^{1-N/n} (a_N)^{1/n} \leq \lim_{n\to\infty} a_n^{1/n} \leq \lim_{n\to\infty} (L+\varepsilon)^{1-N/n} (a_N)^{1/n}$$

como $\lim_{n\to\infty} (a_N)^{1/n} = 1$ entonces $(L-\varepsilon) < \lim_{n\to\infty} a_n^{1/n} < L + \varepsilon$

Como $\varepsilon$ es cualquiera, $\lim_{n\to\infty} a_n^{1/n} = L$



b) Si $L = 0$ basta repetir el mismo procedimiento anterior partiendo de $0 < \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < \varepsilon$. □

Observando la demostración de la proposición en (*) el resultado se puede escribir mejor de la siguiente forma:

**TEOREMA:**

Si $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = L$ entonces $\lim_{n\to\infty} a_n^{1/n}$ existe y es igual también a $L$.

**Demostracion:** Se parte de (*) de la demostración anterior:

$(L-\varepsilon)^{1-N/n} (a_N)^{1/n} < a_n^{1/n} < (L+\varepsilon)^{1-N/n} (a_N)^{1/n}$ ;

como los extremos de estas desigualdades convergen a $L - \varepsilon$ y a $L + \varepsilon$ respectivamente se concluye que $L - \varepsilon < a_n^{1/n} < L + \varepsilon$ para $n < N$, lo que precisamente significa que

$\lim_{n\to\infty} {}^{1/n} = L$ □

## CONCLUSIONES

1) Si el criterio del cociente (raíz) da como resultado 1, es inútil intentar con el criterio de la raíz (cociente).

2) Pero, si el criterio del cociente no es aplicable porque $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ no existe, es posible que el $\lim_{n\to\infty} (a_n)^{1/n}$ sí exista y se pueda decidir. Esta observación, resultado del teorema, hace del criterio de la raíz un criterio más fuerte que el criterio del cociente.

Ejemplo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \text{ donde } a_{2n-1} = \frac{1}{2^{n-1}}$$
$$a_{2n} = \frac{1}{2^n}$$

(i) $n + 1$ par: $n + 1 = 2k$, $n = 2k-1$, entonces

$\dfrac{\quad}{a_n} = \dfrac{1}{2}$ ;

(ii) $n + 1$ impar: $n + 1 = 2k - 1$, $n = 2(k - 1)$, entonces

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 .$$

Luego $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ no tiene límite.

Apliquemos criterio de la raíz:

$$(a_{2n})^{1/n} = \left(\frac{1}{2^n}\right)^{1/n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2};$$

$$(a_{2n-1})^{1/n} = \left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)^{1/n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$$

por consiguiente,

$$(a_n)^{1/n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2} < 1 \text{, y } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ es convergente.}$$

3) ¿Entonces para qué el criterio del cociente?

En la práctica se observa que cuando $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ existe, es más fácil de calcular, hecho que a su vez permite calcular algunos límites con radicales.

Ejemplo:

El $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n!}{n^n}\right)^{1/n} = \frac{1}{e}$ que trabajamos antes, es mucho más fácil ahora ya que, como lo dijimos anteriormente, $\frac{a_{n+1}}{a_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{e}$

4) Y si el $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n)^{1/n}$ no existe, ¿entonces qué?

Hasta aquí se tienen 3 horas-clase, y la cosa a la vez que se pone más interesante, también se va complicando.

Existen varios criterios para estos casos patológicos. Por ejemplo.



## NOTA DEL EDITOR

con relación a las conclusiones 2) y 4) es importante tener en cuenta que en su forma más amplia los criterios de D'Alembert (o del cociente) y de Cauchy (o de la raíz) no exigen la existencia del límite. Para la convergencia de la serie es suficiente que a partir de un cierto $N$ el cociente $(a_{n+1}/a_n)$ o la raíz $a_n^{(1/n)}$ estén acotados superiormente por algún $r \in (0,1)$. En [3] se da el siguiente ejemplo: Considérese la serie

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{2^5} + \dots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^{n+1}} + \dots$$

En esta serie

$$u_n = \begin{cases} \frac{1}{3^n} & \text{si } n \text{ es par,} \\ \frac{1}{2^n} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Evidentemente

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^n & \text{con } n \text{ par,} \\ \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n & \text{con } n \text{ impar.} \end{cases}$$

En consecuencia, la razón $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ «salta» permanentemente sobre la unidad y el principio de D'Alembert no es aquí aplicable.

Por otra parte, el criterio de Cauchy nos da

$$(u_n)^{1/n} = \begin{cases} \left(\frac{1}{3^n}\right)^{1/n} = \frac{1}{3} & \text{con } n \text{ par,} \\ \left(\frac{1}{2^n}\right)^{1/n} = \frac{1}{2} & \text{con } n \text{ impar,} \end{cases}$$

lo cual implica la convergencia de la serie.

## BIBLIOGRAF


Ed. Reverté, Barcelona, 1973

[SK] ntegra. Editorial Mir, Moscú, 1977

VO] Series. Editorial «Naúka», Moscú, 1975 (en