Revista INTEGRACION
Departamento de Matemáticas UIS
Vol. 3, No. 2, julio-diciembre 1985

Estructuras elementales *

RAFAEL ISAACS **

1. MOTIVACION

Dicen que Klein dijo que la geometría es el estudio de los invariantes bajo un grupo de transformaciones. Lo que no logro entender es por qué siendo este tratamiento contemporáneo a la fundamentación de la matemática, no se logró unificar dicha fundamentación también en términos de invariantes. La construcción que Peano hace para los naturales, como se aclarará más adelante, implícitamente maneja este concepto cuando se trabaja, como se hará en la presente nota, no sobre un grupo de tranformaciones sino sobre una función.

Consideremos, pues, una función $F{:}E \to E$; definimos un **conjunto invariante** (CI) como aquel subconjunto $X \subseteq E$ tal que $F(X) \subseteq X$. Piénsese como ejemplo, que los naturales, según esta definición, son un conjunto invariante sobre la función «siguiente de...».

También definimos **conjunto fuertemente invariante** (CFI) como aquel subconjunto $X \subseteq E$ tal que $F(X) = X$.

Por ejemplo si $E=\{a,b,c,d\}$ y $F(a) = b$, $F(b) = c$, $F(c) = c$, $F(d) = d$, como se muestra en la Figura 1,

* Ponencia presentada en el Primer Simposio Colombiano de Algebra y Teoría de Números. Universidad de los Andes, Bogotá, noviembre de 1982.

** Profesor Asociado, Departamento de Matemáticas. Universidad Industrial de Santander. Bucaramanga, Colombia.

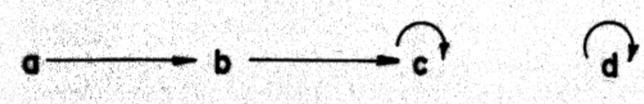

FIG. I

entonces, los CI son exactamente {a,b,c,d}, {a,b,c}, {c}, {d}, {c,d} y ∅, mientras los CFI son los conjuntos E, {d}, {c}, {c,d} y ∅.

Es fácil demostrar que la intersección cualquiera de CI es también un CI. El El mínimo CI al cual pertenece X (elemento de E) o sea la intersección de todos los CI a los cuales pertenece X que es también un CI, la llamaremos COLA de X y la notaremos $\bar{X}$ la cola de X, es el conjunto $\{F^n(X)$: n pertenece a IN$\}$.

2. PROPOSITO

Esta nota fundamentalmente busca hacer preguntas. Algunas podrán ser resueltas inmediatamente. Otras, espero, pueden ser trabajos de investigación.

La pregunta central es si se pueden hacer fundamentos clasificando funciones (del tipo anteriormente expuestas) según sus invariantes.

Mi respuesta, apresurada tal vez, es que sí; para convencer se mostrará cómo aparecen los árboles, finitos e infinitos, los naturales, los grupos cíclicos y los enteros como tales. Esta es la razón por la cual me atrevo a calificar estas estructuras como elementales. Por su nivel y sencillez podrían estar a la entrada del estudio de los fundamentos.

Reduciremos los casos a tratar, limitándonos a las funciones que tienen cierta característica de conexidad: no permitimos CI disyuntos. Quiere decir que en E no hay subconjuntos propios que «trabajen solos», a diferencia del ejemplo anterior representado en la Figura 1, en donde los conjuntos {a,b,c} y {d} son invariantes disyuntos no vacíos.

Lo que se hará a continuación puede entenderse como un primer bosquejo de clasificación de estos objetos. Esta clasificaación se basa en observar cómo puede ser F, biyección o no, y cómo puede ser E, finito o infinito. Las de-

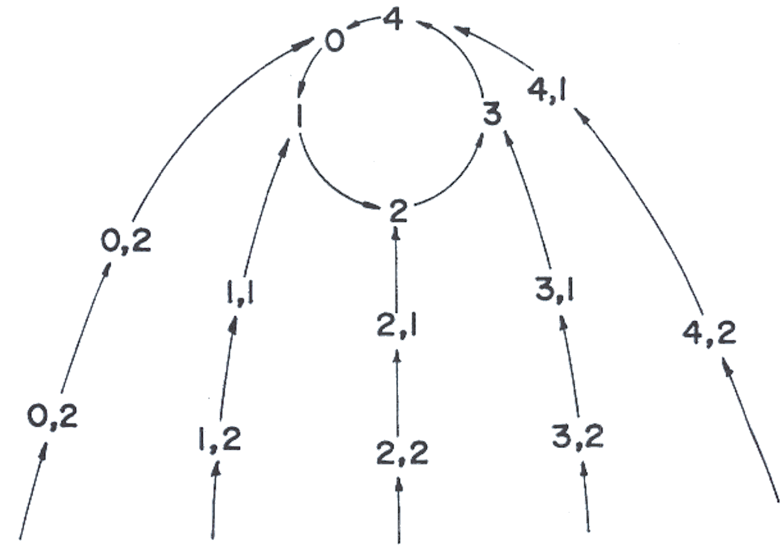

FIG. 2a

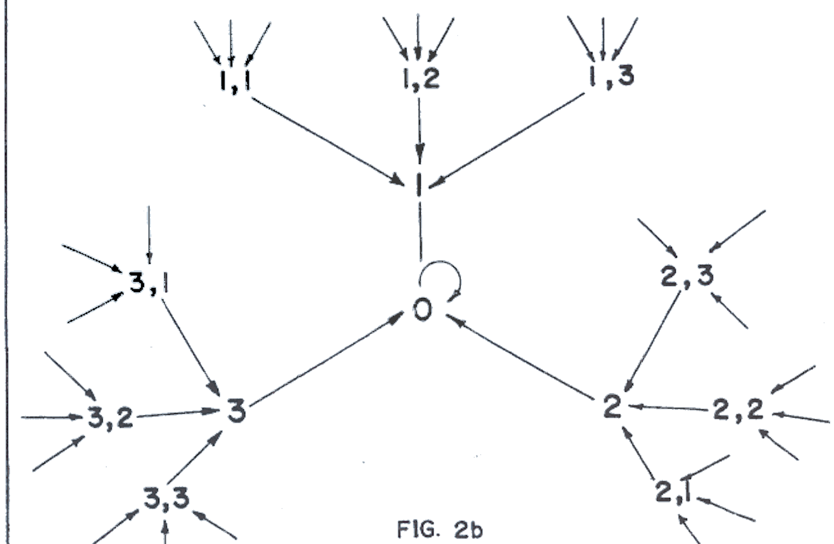

FIG. 2b

mostraciones de todas las afirmaciones que se hacen son muy sencillas y se omiten en su mayoría.

En la Figura 2, se muestran diferentes tipos de ejemplos con la condición de conexidad exigida.

3. CASOS FINITOS

3.1 Siendo F biyección

En este caso (Figuras 2d, 2g) se obtiene un grupo cíclico finito. Si X es CFI entonces E-X también lo es y tendríamos dos CI disyuntos contra lo que hemos supuesto, entonces los únicos CFI son E y ϕ. Esto impplica que se cumple el PRINCIPIO DE INDUCCION bajo la función F en el conjunto E, hecho que facilita enormemente todo el desarrollo. Definimos REPETICION como aquella permutación g de E que conmuta en la composición con la función F.

Si se fija un elementos e cualquiera de E, se demuestra que existe para cada elemento x de E una función repetición que la podemos notar g_x (pues es única) tal que $g_x(e) = x$; siendo así se define la suma módulo e de la siguiente manera: $x + y = g_x(y)$.

Entonces E ha sido dotado de la estructura de grupo (también se puede de anillo) y se demuestra que es cíclico en el sentido de que es el mínimo grupo que contiene a, por ejemplo, F(e).

Es más, se puede demostrar que hay asociada una estructura algebraica isomorfa al anillo de los enteros módulo n donde n es el número de elementos de E.

Este trabajo es de gran sencillez y coherencia y se desarrolló totalmente en un curso que dicté hace unos años para la Licenciatura de Matemáticas en la UIS, en la asignatura de Tópicos especiales. El paso al infinito tiene complicaciones aunque es de suponer que se basa en conceptos parecidos.

3.2 Cuando F no es biyección

Aquí conjeturo que se deben obtener estructuras parecidas a los árboles que utilizan los lingüistas.

En primer lugar es fácil ver que no pueden existir dos CFI no vacíos y diferentes entre sí. Por lo tanto no se pierde generalidad al considerar que el único CFI no vacío que necesariamente debe existir sea un singlotón, el elemento

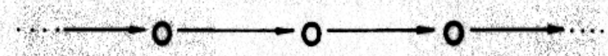

FIG. 2c

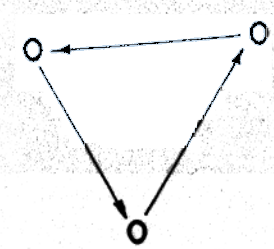

FIG. 2d

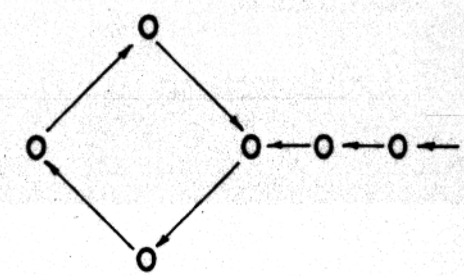

FIG. 2e

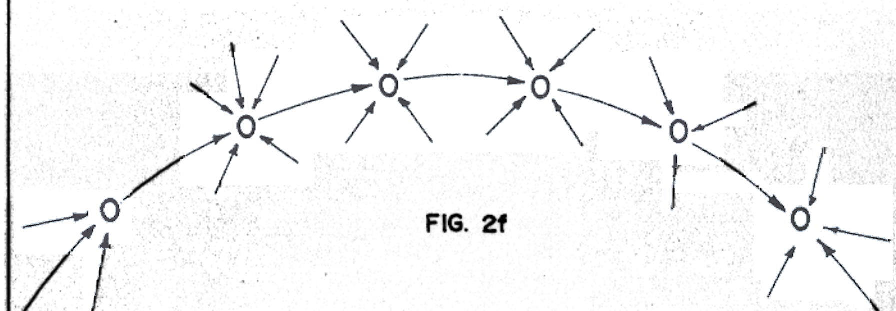

FIG. 2f

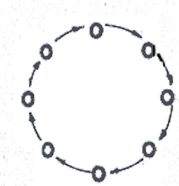

FIG. 2g

del cual lo llamamos la RAIZ. Como la función no es sobre, E - F(E) son las hojas.

En la Figura 3 se representa un ejemplo de uno de estos árboles en donde el único conjunto no trivial fuertemente invariante es {0}.

Una regla (determinística) es uno de estos árboles donde F es una función constante. Cabe suponer que un árbol se puede expresar como cierto producto de «reglas». La pregunta, a mi manera de ver interesantísima y de pronto no muy difícil de responder, es cómo se puede definir este producto.

Otro asunto que hay que mirar es si para aspectos de los árboles que buscan describir la estructura profunda de los lenguajes, es absolutamente necesario el orden que tradicionalmente se asigna a cada nivel.

Estas ideas, como se puede notar fácilmente, no las tengo formalizadas.

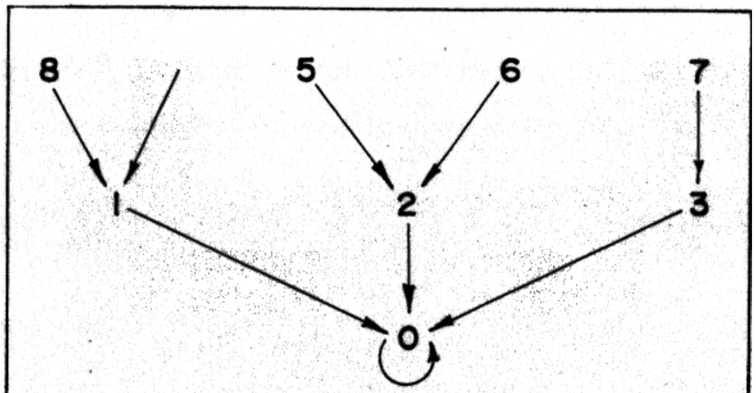

FIG. 3

4. CASOS INFINITOS

4.1 Cuando F no es sobre pero si 1 - 1

Se conjetura que en este caso se tiene algo equivalente a los números naturales y creo que para comprobarlo se puede llegar fácilmente a los axiomas de Peano.

Aprovechando la idea de las colas se demuestra que no pueden existir dos elementos diferentes que estén en E - F(E), entonces sólo existe un elemento que es el «1».

Hay que demostrar, entre otras tantas cosas, que no existe ningún CFI diferente del vacío.

4.2 Cuando F no es 1 - 1

Aquí habría que demostrar que a lo más existe un CFI finito no vacío aunque puede ser que no exista. Si existe tal CFI finito, se puede considerar como un singlotón y se tendría un árbol infinito con raíz. Como ejemplo consideremos los enteros con la función que a cada número le asocia su mayor divisor, si es posible, diferente de él mismo.

Cuando F es sobre no hay «hojas». También hay que tener en cuenta si existen o no CFI infinitos. En fin, se presenta la necesidad de hacer una nueva reclasificación. (Figuras 2a, 2b, 2f, 2e).

4.3 Cuando F es biyección

Se demuestra como en el caso finito que los únicos CFI son el vacío y el mismo E. La conjetura, fundamental para este caso y que nace por generalización del caso finito, asegura que esta estructura es equivalente a los enteros. Se tendría un sistema muy sencillo para axiomatizar Z que consistiría básicamente en lo siguiente: Los enteros son un conjunto con una función biyectiva definida entre ellos, tal que los únicos CFI son el vacío y el mismo conjunto y en donde al menos existe un CI no trivial (que se puede tomar como los naturales). Aquí hay ciertas complicaciones que no lo dejan a uno seguir adelante, relacionadas con buen orden, axioma de escogencia, etc. (Figura 2c).

Aparecen muchísimas preguntas

1. ¿Es este sistema completo? ¿Puede tener alguna ventaja, además de su coherencia (estética), sobre el tradicional?

2. ¿Cómo demostrar que por ejemplo IR no puede ser dotado de esta estructura?

5. PROYECCIONES

Hay que desarrollar:

1. El concepto de morfismo entre este tipo de estructuras.

2. La posible yuxtaposición de este tipo de estructuras, ya sea trasversal o paralelamente.

Y una pregunta final:

¿Vale la pena tratar de desarrollar estos temas tan de las bases de la matemática, aunque no hayan sido propuestas por las grandes y respetadas academias extranjeras?