REVISTA INTEGRACION
Departamento de Matemáticas - UIS
Volumen 3, No. 1, enero-junio de 1985

El Billar y Poincaré: Dos problemas no resueltos

DAVID S. GILLMAN*

I. EL JUEGO DEL BILLAR

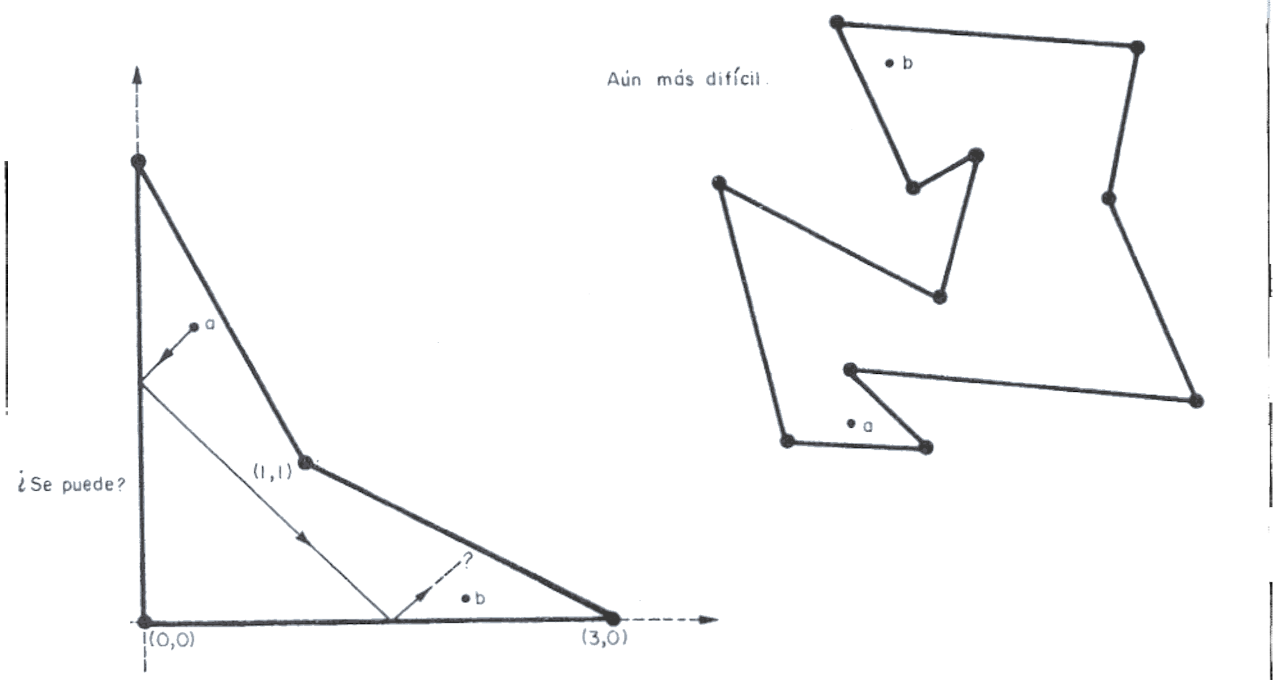
El arte del billar consiste en trazar líneas quebradas con la bola utilizando rebotes. En nuestra discusión teórica del billar, las «bolas» se consideran puntos sin dimensión, las trayectorias son líneas poligonales, y un tiro exactamente en el rincón de la mesa es «muerto» (porque no sabemos cómo definir rebote en este punto). Además, nuestra mesa no es rectangular, sino cualquier polígono finito en el plano.

PROBLEMA: Dados dos puntos a y b en la mesa, ¿es posible rebotar una bola de a hasta b?.

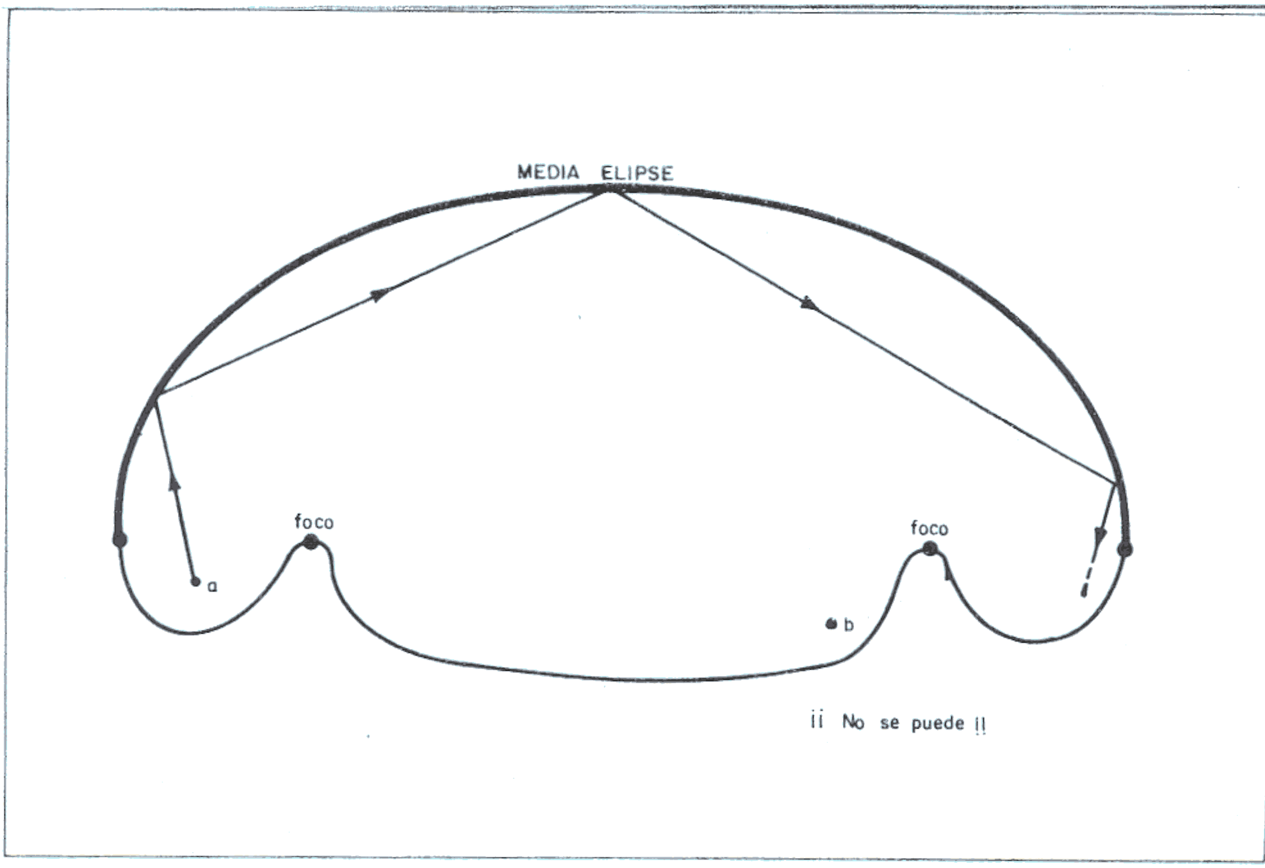
Este problema no está resuelto. De hecho, ¡no está resuelto ni en el caso especial de un cuadrilátero!

En el caso de una mesa cuyo borde es una curva diferenciable en el plano, hay una solución, un contraejemplo desarrollado por Victor Klee. El usa una propiedad elemental de la elipse: si la bola cruza el intervalo entre los dos focos de la elipse, después de rebotar cruza otra vez el mismo intervalo. Por lo tanto, media elipse con tres pequeños cuartos atados sirve como contraejemplo.

* Associate Professor, University of California, Los Angeles.


Aún más difícil.
b
a
¿Se puede?
a
(1,1)
?
b
(0,0)
(3,0)

Figur


MEDIA ELIPSE
foco
foco
a
b
¡¡ No se puede !!

Figur

Es sorprendente que no se pueda imitar el ejemplo de Klee en el caso de un polígono finito. O bien: si se puede... ¡no está resuelto!.

II. GRAFOS PLANARES

Una pregunta que parece aún más difícil es: ¿Cuáles grafos finitos son «planares», es decir, homeomorfos a un subconjunto del plano $\mathbb{R}^2$?

Sin embargo se conoce una respuesta completa de la pregunta en forma de dos teoremas que clasifican tales grafos.

Teorema 1: Hay dos grafos que no son planares: el «grafo completo con cinco vértices» y «los vecinos caprichosos».

El primer grafo tiene cinco vértices y diez aristas de tal modo que para todo par de vértices distintos hay una arista que los conecta. El segundo grafo tiene seis vértices a,b,c,a',b',c' y nueve aristas, de manera que existe una arista que conecta cada uno de los vértices a,b,c con uno de los vértices a', b', c'.

Dejamos al lector la comprobación de que estos grafos no pueden sumergirse en el plano.

Teorema 2: Todo grafo finito que no pueda sumergirse en el plano contiene un subgrafo homeomorfo al Grafo completo con cinco vértices o a los Vecinos Caprichosos.

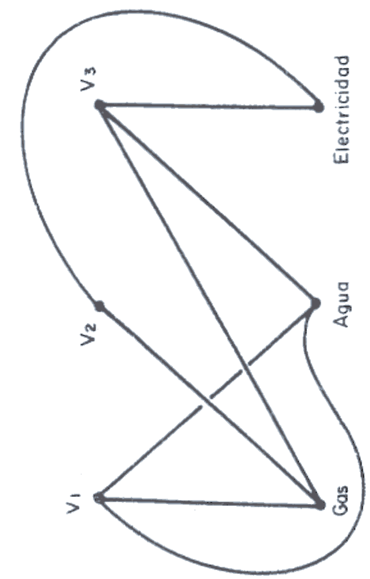
Este resultado fue probado por el topólogo K. Kuratowski en 1930 (4). Para la demostración, véase (1), Capítulo 21.

Lastimosamente, no existe ninguna analogía de los Teoremas 1 y 2 para 2-complejos en $\mathbb{R}^3$. Hay ejemplos de 2-complejos que no existen en $\mathbb{R}^3$, por ejemplo, el espacio proyectivo de dos dimensiones. Pero falta una clasificación de tales ejemplos.

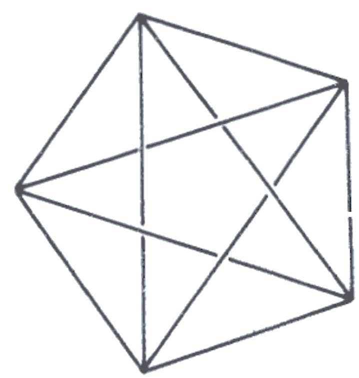
Conjetura 1: Si K es un 2-complejo finito y contráctil tal que K puede sumergirse en una 3-variedad, entonces K puede sumergirse en $\mathbb{R}^3$. Esta conjetura de 2-complejos es equivalente a la famosa conjetura de Henri Poincaré sobre 3-variedades.

III. LA CONJETURA DE POINCARE

Se sabe que toda superficie compacta simplemente conexa es homeomorfa a

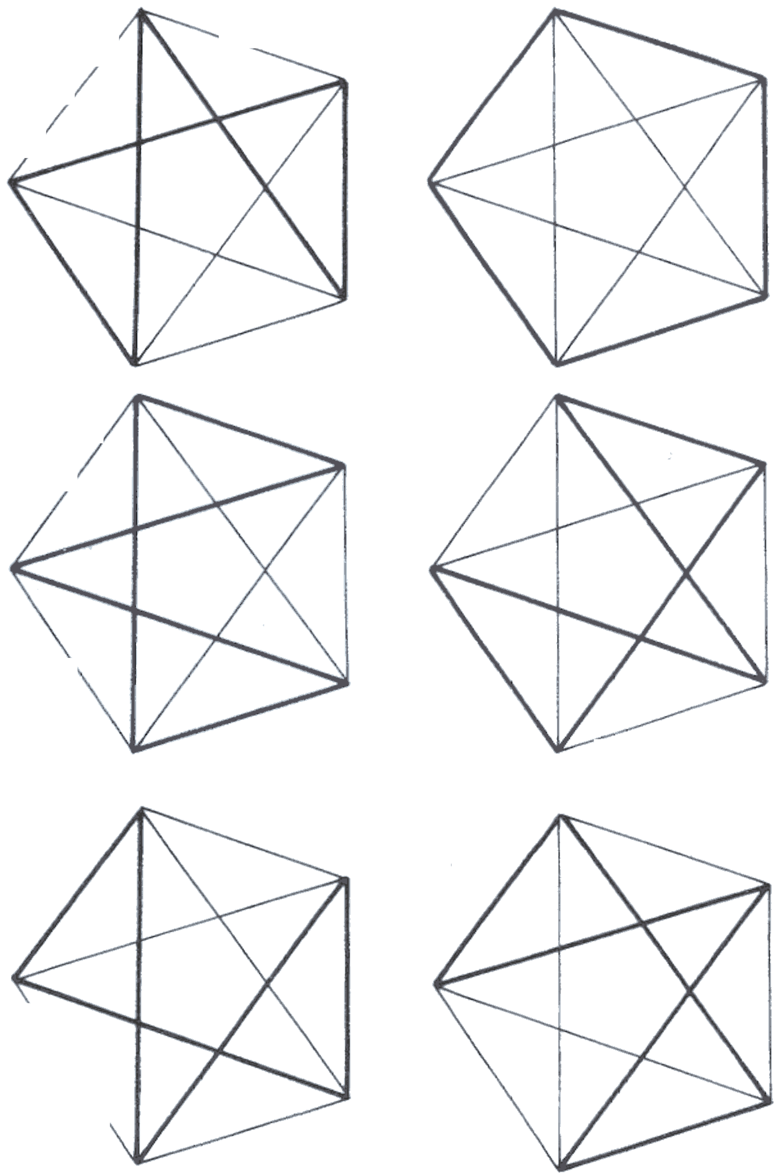


LOS VECINOS CAPRICHOSOS



GRAFO COMPLETO CON 5 VERTICES

Figura



Figura

la 2-esfera S^2 (4). Poincaré conjeturó a plincipios de este siglo que se verificaba un resultado análogo para 3-variedades, a saber: que toda 3-variedad compacta simplemente conexa es homeomorfa a la 3-esfera S^3 (5). A pesar de los grandes esfuerzos de muchos destacados matemáticos desde los años de Poincaré, no se sabe aún si esta conjetura es cierta o no.

¿Por qué es la conjetura de Poincaré equivalente a conjetura 1? El concepto que las une es el de «vecindad regular»; para una exposición véase (8), capítulo 3. ¿Cuál conjetura es más fácil de resolver? La esperanza es que los 2-complejos son más fáciles de analizar que las 3-variedades.

Un «casi» contraejemplo lo fue dado por Poincaré mismo en 1904 (6). Se llama una «3-esfera de homología». En lugar de describir una 3-variedad, examinaremos la construcción desde el punto de vista de la conjetura 1. En este sitio, el ejemplo es un 2-complejo finito K^2 que puede sumergirse en una 3-variedad, pero no en $\mathbb{R}^3$. El 2-complejo K^2 no es contráctil (trivial en su homotopía), pero es trivial en su homología. Para construir K^2, se empieza con el Grafo Completo con cinco vértices; después se agregan seis discos, con bordes atados según Figura 4.

Hasta que el problema de Poincaré sea resuelto, una clasificación de las 3-variedades parece imposible. Parece que nuestro universo es una 3-variedad, y por eso el problema es fundamental en topología.

Para más información sobre la conjetura de Poincaré, véase (2), (3) y (7)

BIBLIOGRAFIA

1) BERGE, C. The Tehory of Graphs and its applications, New York, Wiley, 1962

2) BING, R.H. Some aspects of the topology of 3-manifolds related to the Poincaré conjecture Lectures in modern mathematics. Vol. II, 93-128, Wiley.

3) GONZALEZ-ACUÑA, F. Dehn's construction of knots, Boletin Soc. Mat. Mexicana 15 (1970), 58-79.

4) KURATOWSKI, K. Sur le probleme des courbes gauches en Topologie, Fund. Math. 15 (1930) 278-283.

5) POINCARE, H. Second complément à l'analysis situs, Proc. Lond. Math. Soc. (32) 277-302

6) POINCARE, H. Cinquième complément à l'analysis situs, Rend. Circ. Mat. Palermo (18) 45-110.

7) PAPAKIRIAKOPOULOS, C.D. A reduction of the Poincaré conjecture to group theoretic conjectures, ann. of Math 77 (1963), 250-303.

8) ROURKE, C.P., SANDERSON, B.J. Introduction to Piecewise-Linear Topology, Ergebnesse der Mathematik 69, Springer-Verlag.