REVISTA INTEGRACION
Departamento de Matemáticas - UIS
Volumen 3, No. 1, enero-junio de 1985

Cálculo de raíces reales en polinomios de tercer grado
Un programa para calculadoras CASIO fx-3600P y fx-2700P

LUIS EDUARDO IBAÑEZ*

Sea dado el polinomio

$$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Se trata de hallar las raíces reales de p utilizando el algoritmo de Newton:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{ax_n^3 + bx_n^2 + cx_n + d}{3ax_n^2 + 2bx_n + c} \qquad [1]$$

Los valores de los coeficientes a, b, c, y d se introducen en las memorias constantes K1, K2, K3 y K4 respectivamente. La memoria independiente se carga con un x_0 que se sepa cercano de la raíz buscada. El proceso de búsqueda se puede detener cuando los datos exhibidos en la pantalla (no los internos) para x_n y x_{n+1} sean iguales. Si se programa directamente la fórmula [1] se superarán los 38 pasos que permite la calculadora. No obstante, esa igualdad se puede escribir como:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{[ax_n^2 + bx_n + c]\, x_n + d}{3ax_n^2 + 2bx_n + c} \qquad [2]$$

* Estudiante de segundo semestre de Ingeniería de Sistemas. Universidad Industrial de Santander. Bucaramanga, Colombia.

y como los términos de la expresión $ax_n^2 + bx_n + c$ del numerador se repiten en el denominador modificados por coeficientes constantes, se pueden acumular los sumandos de dicha expresión en una de las dos memorias libres mientras se calcula el denominador. Así pues, tenemos [2] en la forma:

$$x_{n+1} = x_n - [3ax_n^2 + 2bx_n + c]^{-1} \cdot [(ax_n^2 + bx_n + c)\, x_n + d] \qquad [3]$$

y tomando MR como x_n podemos escribir el siguiente programa en 32 pasos:

```
MOD   O   P1
Kout 1   X   MR   INV x²   X   Kin5   3   +
Kout 2   X   MR   X   Kin + 5   2   +
Kout 3   Kin + 4   =   INV 1/x   X
[Kont 5   X   MR   +   Kont 4]   =   INV M-
INV RND   INV 1/x   INV   RTN
MOD   •
```

La operación Kin + 5 (que se cuenta como un solo paso) suma el número en pantalla a la memoria K5 sin interrumpir la secuencia de operaciones dentro de la cual se encuentra.

Generalmente las raíces se buscan con una determinada cantidad de decimales dada de antemano. En la calculadora tal cantidad varía entre 0 y 9, ya que la cantidad de dígitos de la parte entera de la raíz puede estar entre 1 y 10 (aunque en la práctica serán apenas 1 ó 2). Esa cantidad de decimales puede fijarse antes de correr el programa por medio de la orden.

MOD 7 N

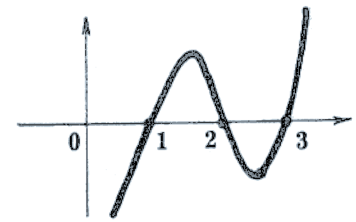
donde N es el número de decimales deseado.

Con el programa aquí propuesto *siempre es necesario fijar la cantidad de decimales.* La razón es que la orden INV 1/x del último renglón del programa está incluida con el propósito de que si lo que hay en la pantalla es cero la calculadora no pueda computar el recíproco y se detenga el programa indicando error (E).

La orden anterior, INV RND, Iguala el registro interno de la calculadora con el que aparece en la pantalla, siempre que éste último no sea en valor absoluto menor que 10^{-9}, caso en el cual la orden de redondeo queda sin efecto, la operación INV 1/x se efectúa y el programa regresa al primer paso por la orden INV RTN. Así que, si por ejemplo, las raíces que se están buscando tienen un dígito en su parte entera y se quiere trabajar con todos los nueve decimales posibles, es indispensable poner la calculadora en MOD 7 9 antes de correr el programa.

Ejemplo de uso

Ecuación $x^3 - 6x^2\ 11x - 6 = 0$, cuyas raíces son .2 y 3.



1) Se limitan las cifras decimales a 6, por ejemplo:

MODE 7 6

2) Se coloca un número en la memoria independiente; la elección de ese número se hace dividiendo la curva en sectores crecientes y decrecientes. Si se introduce un número del sector en donde está la raíz $x=1$, ésta será la que la calculadora presentará como respuesta; para hallar las otras raíces, se usan números de sus sectores.

En caso de desconocer los sectores se puede comenzar con un nuḿero muy grande, positivo o negativo, y hallar así las raíces de los extremos, para luego probar el punto medio de las raíces. Por ejemplo,

50 INV Min.

3) Se colocan los coeficientes en las memorias constantes:

1 Kin 1   6 +/ Kin 2   11 Kin 3   6 +/- Kin 4.

4) Se inicia el programa oprimiendo P1. Cuando aparezca en pantalla

ON	M	
		E_{P_1}

Se ha encontrado una raíz; se borra la pantalla (AC) y se saca la memoria independiente, para ver la raíz:

MR	ON M 3.000000

Probamos ahora un número grande negativo: -50 INV Min P1; esperamos el signo de error y se saca la memoria:

AC MR	ON M 1.000000

Por último se prueba un número entre las dos raíces:

1.7 INV MR P1, Y al detenerse extraemos la raíz de la memoria

AC MR	ON M 2.000000

Es posible que la calculadora se detenga en un número que no sea raíz, sino un punto máximo o mínimo, lo cual anula la derivada, y al tratar de dividir entre ella, resulte una operación imposible. Por esto las raíces deben probarse introduciendo un número muy cercano, al lado opuesto del que se probó primero.

En el ejemplo anterior el punto 1.422649731 es maximal. Si se introduce este número en la calculadora se detendrá, aunque no sea una raíz.

El programa se puede usar para probar puntos máximos o mínimos pero no sirve para buscarlos.

Para comprobar la necesidad de fijar el número de decimales, puede intentarse calcular la raíz cúbica de cinco como cero del polinomio $p(x) = X^3 - 5$ dejando libre la cantidad de decimales (por medio del comando MOD 9).