REVISTA INTEGRACION
Departamento de Matemáticas - UIS
Volumen 3, No. 1, enero-junio de 1985

Integración en términos finitos: La Teoría de Liouville*

TONI KASPER**

«La búsqueda de antiderivadas elementales se extiende desde el análisis clásico por entre el álgebra moderna hasta la investigación contemporánea en algoritmos de computador».

Algunas veces se dice que el problema de la integración indefinida consiste en encontrar una función cuya derivada sea otra función dada. En tales términos esta descripción es un poco vaga, si no engañosa, puesto que ignora el hecho de que usualmente se desea que la derivada tenga cierta forma específica.

Continuando la antigua tradición griega que sólo aceptaba como legítimas aquellas curvas construibles con regla y compás (las llamadas curvas geométricas), Descartes prefirió las curvas que tuviesen expresiones algebraicas a las «curvas mecánicas», esto es, a aquellas presentables solamente en términos trascendentales. Compartiendo la predilección de Descartes por las funciones algebraicas, Newton afirmó que una cantidad tal como $1/(x-a)$ no podía ser integrada, puesto que el hacerlo involucraría una cantidad trascendental: el logaritmo. Para Newton, pues, la integración no podía ser realizada puesto que es imposible ejecutarla estrictamente en términos algebraicos.

* El presente artículo ha sido tomado de la Revista MATHEMATICS MAGAZINE, Vol. 53, No. 4, septiembre 1980. p. 195-201. La traducción fue realizada por ARTURO MARTINEZ, Profesor Asociado del Departamento de Matemáticas. Universidad Industrial de Santander. Bucaramanga, Colombia.

** City University of New York.

En lo posible Newton evitó las formas no algebraicas recurriendo a series infinitas. El sacrificio de la exprsión finita no representó para él una gran pérdida a cambio de evitar las aún no aceptadas cantidades trascendentales.

Leibniz, por otra parte, no compartió el prejuico de moda contra las funciones no algebraicas; su inconformidad fue con las expresiones no finitas, de manera que con gusto aceptó las entidades trascendentales en el cálculo, ampliando así el repertorio de integrales que podían ser dadas en forma compacta.

Se sabe que el problema de poder o no integrar una función dada depende de las funciones que se tengan a disposición y de la forma permitida para su expresión. Enunciar precisamente el problema de la integración indefinida requiere, según ésto, que se restrinjan tanto las clases de funciones como las formas de expresión a ser utilizadas. Si se supone, entonces, que $f(x)$ pertenece a una cierta categoría de funciones, puede preguntarse si su integral también pertenece a tal categoría o puede ser expresada en términos de funciones que le pertenezcan, de acuerdo con cierta forma de expresión preestablecida.

A medida que los matemáticos fueron adquiriendo más experiencia con las funciones que se les presentaban, terminaron aceptándolas y el concepto de función se hizo más amplio. Adicional a esto, la preferencia de Leibniz por las expresiones finitas prevaleció. Durante el siglo XIX el problema de la integración indefinida tomó la siguiente nueva forma clásica: «Determinar si una función elemental dada tiene una integral elemental o no, y en caso afirmativo calcularla». Este artículo se propone presentar un recuento del progreso obtenido por los matemáticos hacia la solución del problema de integración elemental finita. Se presentará un recorrido partiendo desde las raíces del problema hasta su solución final, como implicaciones para algunas aplicaciones encontradas frecuentemente.

El crédito por establecer la integración en términos elementales finitos como una disciplina matemática pertenece a Joseph Liouville (1809-1882), quien creó la teoría en una serie de artículos publicados entre 1833 y 1841. habiendo ya considerado el caso de cuándo una función algebraica tiene una integral algebraica [1], Liouville pasó a considerar el problema de cuándo una función algebraica tiene una integral elemental [2]. Para este caso desarrolló en 1834, lo que hoy se conoce como el «Teorema de Liouville: si y es una función algebraica de x, y $\int y \, dx$ es elemental, entonces $\int y \, dx = t + A \log u + B \log v + \ldots + C \log w$, en donde $A, B, \ldots, C$ son constantes, $t, u, v, \ldots, w$ son funciones algebraicas de x».

Fue este teorema y las generalizaciones que inspiró, lo que suministró las bases para todo el futuro trabajo en el problema de la integración indefinida y sobre él reposan los cimientos de lo que vino a ser la solución final.

Como una aplicación de este resultado, Liouville pudo aclarar viejas dudas sobre integrales de la forma $\int R(x, P)\, dx$, donde R es racional en x y P, y P es un polinomio en x de tercero o cuarto grado. Uno de los más antiguos ejemplos de este tipo surge al intentar rectificar la elipse y es por esta razón que tales formas se llaman «Integrales elípticas». Tales integrales se presentan en muchas aplicaciones del cálculo y los intentos para expresarlas como combinación finita de las funciones elementales conocidas fallaron a menudo, quedando a cargo de investigadores (como Euler, por ejemplo) el usar series infinitas para evaluarlas [14]. Durante el siglo XVIII se sospechaba que, en general, las integrales elípticas no podían ser representadas por expresiones elementales finitas. En una demostración basada en su teorema de 1834, Liouville pudo mostrar que así es en efecto, adornando a la matemática con su primer caso probado de una integral no elemental.

Aclarar más las cosas requiere mirar más de cerca lo que Liouville entiende por función elemental. Su noción incluye las ya familiares formas simples conocidas por el estudiante principiante, concretamente los polinomios, las funciones algebraicas, las funciones logarítmicas y exponencial, y las funciones trigonométricas. Con la introducción de números imaginarios, las funciones trigonométricas (y las hiperbólicas) pueden ser definidas en términos de exponenciales y logarítmos, de manera que Liouville omite las primeras, admitiendo en la discusión solamente cantidades algebraicas, exponenciales y logarítmicas. La noción de Liouville de funciones elementales es, no obstante, bastante más amplia que lo que estos ejemplos sugieren. El empieza por definir lo que llama Función Finita, como una cantidad dada por una ecuación (o sistema de ecuaciones) en la cual las variables son sometidas a un número finito de operaciones algebraicas, exponenciales o logarítmicas. Dos ejemplos de tales funciones son dados por las siguentes ecuaciones

$$e^{x} y^{3} - y + \log(\log x) = 0 \qquad [1]$$

$$xy - e^{y} = 0 \qquad [2]$$

La función y definida por [1] presenta la ecuación algebraicamente (es así como se describe una cantidad sujeta solamente a operaciones algebraicas: adición, sustracción, multiplicación, división y extracción de raíces); esto es lo que Liouville llama una función finita explícita, y que ahora conocemos como Función Elemental. La cantidad dada por [2], por otra parte, presenta la ecuación trascendentalmente (quiere decir que está afectada por una exponencial o un logaritmo), y representa aquello a lo cual Liouville llamó una Función Finita Implícita. Mientras que Liouville pudo demostrar en 1834 que las integrales elípticas generalmente no son funciones finitas explícitas, no fue sino hasta 1923 que RITT [12] mostró que tales integrales ni siquiera representan funciones limitadas explícitas; en otras palabras, no son funciones finitas, sino entidades de algún orden trascendental mayor.

En cierta forma el uso que Liouville hace de la palabra «explícita» puede ser engañoso. El no quiere significar que y pueda ser despejada explícitamente en la ecuación, sino que y es una función algebraica de las otras cantidades en la ecuación. En efecto, puesto que la teoría algebraica ha establecido que $y^5 - y - x = 0$ no tiene raíces que sean funciones algebraicas explícitas de los coeficientes presentes en la ecuación, con certeza se sabe que es imposible resolver para y la ecuación [1].

Puesto que una función elemental es aquella que satisface una relación algebraica, se ve que «algebraica» es la propiedad fundamental. Tal como el lector puede recordar, afirmar que y es una función algebraica de las variables $x_1, x_2, \ldots, x_k$ equivale a decir que y satisface una ecuación de la forma

$$P_0(x_1,x_2,\ldots,x_k)y^n + P_1(x_1,x_2,\ldots x_k)y^{n-1} + \quad + P_n(x_1,x_2,\ldots x_k) = 0$$

El miembro izquierdo de esta ecuación puede considerarse como un polinomio irreducible en y cuyos coeficientes, los P_j, son polinomios en x con coeficientes constantes.

Ahora bien, en términos precisos de la definición de Liouville, y es una función finita explícita de x si y puede ser expresada como una función algebraica de las variables $u, u_1, u_2, \ldots, u_k$ de acuerdo con el siguiente esquema:

1) u es una función algebraica de x.
2) u_1 es una función exponencial o logarítmica de x; esto es, u_1 tiene la forma e^u o $\log u$. El término u_1 se llama monomio de primera clase.

   Con u y u_1 se forma una función trascendental de primer orden, la cual es una función algebraica de x y de monomios de primera clase como u_1.
3) u_2 Es una función exponencial o logarítmica de una función trascendental de primer orden. El término u_2 se llama monomio de segunda clase.

Con términos como u, u_1 y u_2 pueden ahora construirse funciones trascendentales de segundo orden que son funciones algebraicas de x y de monomios de primera y segunda clase.

El esquema continúa, construyendo una jerarquía de monomios de n-ésima clase (más simplemente «n-monomios») y sus funciones trascendentales de n-ésimo orden, hasta el punto que se desee. De acuerdo con ésto, F es una función finita explícita de orden n (abreviadamente, una función de orden n) si F puede expresarse como una función algebraica de n-monomios (y, posiblemente, monomios de menor clase).

Así pues, el orden de F está dado por la mayor de las clases de los monomios que figuren en la expresión de F. Más aún, si otra función G es una combinación algebraica de F y ciertos monomios, entonces G es una función algebraica de tales monomios y por tanto también es una función finita explícita. En otras palabras, una función algebraica de monomios y de una función finita explícita es también una función finita explícita. Como ejemplo simple, considérese la función G definida por la ecuación $FG^3 - G - F^2 e^x = 0$, donde F está definida por la relación $F^7 + F - \log(\log x) = 0$. Aquí F es una función algebraica del monomio $\log(\log x)$, y G es una función algebraica de F y el monomio e^x. Así, G es una combinación algebraica de monomios y por tanto una función finita explícita.

Liouville reconoció que esta forma de clasificar las funciones trascendentales implicaba complicaciones y artificios. En primer término, es difícil, en muchos casos, determinar el verdadero orden de una función finita explícita. Segunda, aún cuando se conozca el orden exacto n, hay incertidumbre con respecto a cuántos n-monomios se requieren (esto es, el mínimo número) para representar la función.

Para ilustrar la naturaleza del primer problema, nótese que el monomio $\mathrm{Log}(xe^x)$ aparece como una función de orden 2, pero al ser escrito en la forma equivalente $x + \log x$, tiene la apariencia de una función de primer orden. Similarmente, el monomio $e^{\log x^2}$ aparece como una función de segundo orden, pero al ser escrito en la forma x^2, se ve que es una función algebraica. Aunque el mismo Liouville no especificó un orden para las funciones algebraicas per se, contentándose con empezar el ordenamiento en $n = 1$, es bien claro, sin embargo, que él consideró que las funciones de primera clase poseen un orden mayor que las funciones estrictamente algebraicas.

Así, una función expresada de cierta forma dada en términos de monomios y por tanto teniendo un cierto orden, podría ser representada en otra forma, teniendo aparentemente un orden menor. Para que el esquema de clasificación de Liouville sirva para los propósitos que él pretendió, se debe tomar el orden de una función finita explícita como el menor orden requerido para representar la función particular del caso. Con este enfoque el orden es un entero preciso, aunque no siempre es fácil ver qué número es.

¿Cómo se sabe que una función F, presentada en forma de combinación algebraica de monomios, no puede ser escrita equivalentemente empleando monomios todos de menor orden que el mayor utilizado en la expresión dada de F?.

Más aún, funciones como x^x y x^α (donde α es un número imaginario o irracional real) ni siquiera están escritas en términos de monomios; ¿Cómo se determina el orden de funciones como éstas, o al menos que son funciones finitaas explícitas? Aunque Liouville no tuvo un procedimiento regular para resolver lo relativo al orden trascendental, él sí trató de sugerir, desarrollando algunos casos, cómo puede procederse en ocasiones específicas [3,pp.86 - 104]. Por ejemplo, escribiendo x^α como $e^{\alpha \log x}$, Liouville muestra que el orden de x^α es a lo más 2. Luego muestra que x^α no puede ser representada por medio de una función de primer orden. Habiéndose ya demostrado que x^α no es algebraica, se sigue que su orden es exactamente 2.

Para clarificar el segundo problema conectado con el esquema de Liouville, aquel de determinar no el orden sino el número mínimo de monomios de tal orden que se requieren para representar la función, considérese $F(x) = e^{x^2}$.

Como Liouville demostró que e^p no es algebraica para ninguna función p, [3,p.86], F es ciertamente de orden 1. Pero F también puede ser expresada como $e^{-x} e^{x^2+x}$, lo cual es una combinación algebraica de monomios de primer orden. La diferencia importante entre estas dos expresiones para F es que la segunda utiliza dos monomios de primer orden, mientras que la primera utiliza sólo uno. Como lo muestra este ejemplo, lo acordado por Liouville permite a una función finita explícita de n-ésimo orden ser expresada en varias formas, unas utilizando menos n-monomios que otras. Así, afirmar que F es una función finita explícita de orden n significa exactamente lo siguiente -y nada más-:

1) F satisface una ecuación algebraica (denotada * por brevedad) cuyos coeficientes son polinomios en x y monomios (en x).

2) En * aparece un n-monomio (posiblemente junto con monomios de menor orden).

3) No hay forma de expresar a F utilizando monomios todos los cuales tengan orden menor que n.

Como ya se indicó, estas estipulaciones, aunque restrictivas, no determinan el número mínimo de n-monomios necesarios para expresar a F. Sin embargo, las investigaciones de Liouville no dependen de que se conozca este número mínimo sino solamente de las consecuencias de asumir (lo cual siempre es permitido) que la función en cuestión está siendo representada en una forma que utiliza el mínimo requerido.

Teorema General de Liouville: Integración de funciones elementales

El mismo Liouville un año después, 1835, dio la primera generalización a su teorema. Definiendo cierto tipo de función elemental en términos algebraicos de varias variables, Liouville fue capaz de extender la teoría desde la integración de funciones algebraicas hasta la de una clase especial de funciones elementales. Más específicamente, el teorema general de Liouville afirma que si y, z son funciones de x cuyas derivadas, dy/dx, dz/dx son funciones algebraicas de x,y,z y si P es una función algebraica de x,y,z tal que $\int P\,dx$ es una función finita, entonces

$$\int P\,dx = t + A \log u + B \log v + \ldots + C \log w$$

donde A,B,C son constantes y t,u,v,...,w son funciones algebraicas de x,y,z. Liouville señala que si P y las dos derivadas no son simplemente algebraicas sino además racionales en x,y,z, entonces también lo son las funciones t,u,v, ... w.

El utiliza este resultado para demostrr que, si y es algebraica en x y $\int e^x y\,dx$ es elemental, entonces la integral puede ser expresada por $e^x(\alpha + \beta y + \gamma y^2 + \ldots + \lambda y^{n-1})$ + constante, donde $\alpha,\beta,\gamma,\ldots,\lambda$ son funciones racionales de x que siempre pueden ser calculadas cuando existen. En otras palabras, siempre se puede determinar, bajo las condiciones dadas, si $\int e^x y\,dx$ es elemental. Como una aplicación, Liouville demostró que tanto $\int (e^x/x)\,dx$ como $\int [\text{sen}\,\alpha x/(1 + \alpha^2)]\,dx$, considerando esta última como función de la variable positiva x, no son elementales. Finalmente, Liouville demostró que siempre es posible determinar, para funciones algebraicas P,Q,...,T y funciones algebraicas no constantes p,q,...,t, si la integral $\int (Pe^p + Qe^q + \ldots + Te^t)\,dx$ es o no elemental y obtener la integral en el caso afirmativo.

Durante el resto del siglo XIX muy poco se hizo como continuación directa del trabajo de Liouville. Luego, a principios del siglo XX, la actividad se reanudó. En 1906 el matemático ruso D.D. Mordujài-Boltovskói (1876-1952) comenzó a escribir sobre la tvoría de Liouville y contribuyó mucho al respecto. Entre 1923 y 1927 Joseph Fels Ritt publicó sus primeras discusiones sobre el tema (y material relativo), y en 1936 Gino Loria hizo un breve recuento del trabajo de Liouville haciendo énfasis en su teoría de integración.

La generalización de Ostrowski: El método de las extensiones del compás

La siguiente mayor adición a la teoría de Liouville llegó en 1946 cuando A. Ostrowski amplió el teorema general de Liouville (el de 1835) y lo extendió a la más vasta clase de las funciones meromórficas (mono-valuadas y analíticas, excepto posiblemente en los polos) en regiones del plano complejo [11]. Lo más importante aquí es que mientras los trabajos previos se basaron esencialmente en la técnica de Liouville, Ostrowski alcanzó su generalización desarrollando una nueva idea, el así llamado método de las extensiones de campos, el cual permite un enunciado del teorema muy preciso y general, al tiempo que simplifica la demostración. La técnica de Ostrowski se basa en la noción de un campo diferencial (nombre dado por Ritt), el cual es un campo (algebraico) dotado de una aplicación en sí mismo, la cual obedece las reglas de la diferenciación para la adición y la multiplicación. Aunque Ostrowski se preocupó por las propiedades analíticas de las funciones pertenecientes al campo, en su método proporcionó el germen del enfoque algebraico que evolucionó cuando posteriores investigadores extrajeron los ingredientes de su tratamiento para proporcionar una exposición del tema aún más simple y general, y en términos de la cual el problema de la integración indefinida fue eventualmente resuelto.

Formulación de Ritt: Extensión a funciones multivaluadas

En 1948, Joseph Fels Ritt (1893-1951) publicó lo que ha venido a ser llamado el tratado clásico de la integración en términos finitos [13]. En este trabajo, el autor resumió la teoría conocida hasta la fecha y modificó un poco la presentación para acomodar la naturaleza multivalente de las funciones elementales. Sin profundizar en los detalles, para no empantanar el desarrollo del tema, una función elemental puede considerarse como una función algebraica de una o más variables; es decir, es una raíz de un polinomio con coeficientes en un campo. El carácter multivalente de tales funciones se desprende del hecho de que los polinomios suelen tener más de una raíz. Ritt logró su extensión hasta este caso mediante la técnica de continuación analítica a lo largo de curvas sobre una superficie de Riemann (una serie de láminas superpuestas una sobre otra) de la función, procedimiento éste que permite que una función multivalente, restringiendo adecuadamente el dominio, sea tratada como univalente. Igual que sus predecesores, para la mayor parte de su trabajo Ritt se basó en consideraciones analíticas.

A medida que el enfoque de Ritt tiene en cuenta algunos detalles ignorados en trabajos anteriores, el tema puede ser tratado desde un punto de vista algebraico que hace innecesario tener en cuenta aspectos tales como los mencionados caracteres analítico o multivalente de una función. Como ya se indicó atrás, una función elemental, digamos y, satisface una ecuación algebraica cuyos coeficientes pertenecen a un cierto campo K. Todas las propiedades algebraicas de y pueden deducirse de la ecuación al estudiar a y como un elemento de $K(y)$, la extensión algebraica obtenida al adjuntar y al campo K, y en realidad no hay necesidad de considerar las propiedades analíticas

de la función, como tales. (Como algo de interés, los escritos de Liouville en las décadas de 1830 y 40 fueron los primeros trabajos de importancia que trataron las características algebraicas de las funciones elementales, mientras que Risch [19] presenta una discusión moderna). En cuanto al aspecto de la multivalencia, es suficiente tratar apenas una de las raíces de la ecuación algebraica asociada, puesto que dos raíces cualesquiera, y_1 y y_2, tienen básicamente el mismo comportamiento, en el sentido de que sus respectivas extensiones del campo son isomórficas (con y_1 correspondiendo a y_2, y cada elemento de K correspondiéndose a sí mismo). Un ejemplo sencillo lo ofrece la ecuación algebraica $t^2(1-x^2)(1-C^2x^2) - 1 = 0$. Si se adjunta una raíz cualquiera t al campo $K = R$ de las funciones racionales, se forma $R(t)$ que es una extensión algebraica de R. Al estudiar a t como elemento de $R(t)$, llamado el campo de función algebraica, no hay necesidad de recurrir a una superficie de Riemann para t. Más aún las propiedades algebraicas de t son compartidas por cualquier otra raíz de la ecuación dada. En el caso del ejemplo dado, $R(t)$ es llamado un «campo de función elíptica» por ser generado por el integrando de una integral elíptica, más exactamente la integral elíptica de primera clase. La monografía de Ritt también actualizó el tema; contiene una bibliografía y resúmenes de los más importantes desarrollos hasta esa fecha y simplificó la presentación. Más aún, aunque su principal enfoque fue analítico, estimuló una perspectiva algebraica, especialmente el promover el método de las extensiones de campos de Ostrowski. La importancia de la contribución de Ritt a la formulación algebraica de temas analíticos puede vislumbrarse en el prefacio del libro de E.R. Kolchin, «Differential Algebra and Algebraic Groups (Academic Press, 1973): «... el álgebra... históricamente creció fuera del estudio de las ecuaciones algebraicas con coeficientes numéricos. En forma muy parecida, el álgebra diferencial surgió del clásico estudio de las ecuaciones diferenciales algebraicas cuyos coeficientes son funciones meromórficas en una región de algún espacio complejo... Vale la pena destacar que un tema tan substancial como lo es el álgebra diferencial debe su origen a una persona, J.F. Ritt (1893-1951) quien fue no solamente su padre fundador, sino además su principal profeta y practicante. (Hasta la fecha) la mayoría de los resultados y los más profundos, se deben a él y, aparte de nuevas apariencias, hoy las principales líneas del tema son las mismas de 1951. Ya ha llegado a ser claro que el álgebra diferencial es álgebra pura y, aunque la sangre de la vida de Ritt fue el análisis clásico, en su segundo libro sobre el tema (Differential Algebra, AMS Colloq., Publ., 33, 1950) hizo un gran esfuerzo por encontrar la senda algebraista».

Solución del problema: La formulación algebraica

La teoría de la integración en términos finitos creada por Liouville a principios de 1800 y resumida por Ritt en 1948, ha experimentado un interés renovado en los tiempos recientes, específicamente en los trabajos de Rosenlicht y Risch.

En 1968, Maxwell Rosenlicht publicó la primera exposición netamente algebraica del teorema de Liouville (el de 1835) y su generalización por Ostrowski [15].

Esta presentación de Rosenlicht sigue a Ostrowski (y a Ritt) en cuanto al uso del concepto de campo diferencial, llamado derivación a la aplicación asociada. Más aún, exponenciales y logaritmos aparecen definidos sólo en términos de las propiedades algebraicas de sus imágenes (derivadas) bajo la derivación. Así, si u,v son elementos del campo diferencial en cuestión, y si u , v , son sus respectivas imágenes, entonces u es un logaritmo de v (o v un exponencial de u) si $u = \frac{v'}{v}$, con $v \neq 0$. El enunciado que da Rosenlicht al teorema de Liouville, que se presenta más adelante, marca un cambio mayor de estilo por cuanto está escrito únicamente en términos de elementos de un campo y sus imágenes: al contrario de todas las versiones anteriores, no se hace mención de integrales o logaritmos per se. Se tiene así, en la presentación de Rosenlicht, una formulación más abstracta, con la diferenciación suplantada por la idea más general de una aplicación y la naturaleza específica de las funciones reemplazada por la pertenencia de los elementos a un campo. La generalización abstracta dada por Rosenlicht al resultado clásico de Liouville dice que «si α pertenece a algún campo diferencial F de características cero, y si la ecuación $y = \alpha$ tiene una solución en alguna extensión elemental del campo F que tenga el mismo subcampo de constantes, entonces existen constantes $c_1,\ldots,c_n$ en F y elementos $u_1,\ldots,u_n$, v en F tales que

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} (c_i u'_i/u_i) + v'$$

Como una aplicación, Rosenlicht establece el carácter no elemental de las clásicas integrales $\int e^{z^2} dz$; $\int (e^z/z)\, dz$; $\int e^{e^z} dz$; $\int (1/\log z)\, dz$; $\int \log(\log z) dz$; $\int (\mathrm{sen}\, z/z)\, dz$.

Mientras Rosenlicht dio la demostración algebraica del teorema de Liouville sobre funciones con integrales elementales, R.H. Risch ha establecido un logaritmo para el teorema. Por su propia cuenta, Risch se introdujo en el tema de la integración finita a través de la monografía de Ritt (la de 1948). Con un artículo de 1966 (publicado en 1969, [20], Risch presenta un algoritmo para aquella clase especial de funciones elementales que pueden ser expresadas sin utilizar operaciones irracionales. En otras palabras, la función debe ser construida solamente por medio de operaciones racionales, exponentes y logaritmos; el algoritmo no es aplicable si los exponentes y logaritmos pueden ser reemplazados agregando constantes y realizando operaciones algebraicas; luego, en [18] y [19], se permiten las operaciones algebraicas y Risch muestra que el problema general de la integración elemental finita se reduce a algo decidible en la teoría de las funciones algebraicas. Aunque el algoritmo de Risch -para decidir cuándo una función elemental tiene una integral elemental y obtener ésta cuando exista- no ha sido publicado en forma completa, el autor sí describió (en 1970) algunas de las técnicas e ideas involucradas [21]; el procedimiento como un todo resulta de la combinación de lo contenido en [18], [19] y [21]. Risch ha indicado que, mientras el caso algebraico sigue fácilmente las líneas de [21], el caso general es algo más complicado de llevar a cabo y que es deseable un enfoque más simple (un enfoque que pueda ubicarse dentro del dominio de la geometría algebraica).

Hoy varios escritores han publicado material sobre el tema de la integración finita (y temas relacionados), algunos de los cuales incluyen aspectos del resultado de Risch (ver [27], por ejemplo).

Quizás el mayor interés -debido a la naturaleza algorítmica de la solución- está entre aquellos conocedores de la ciencia de la computación. Risch hace la interesante sugerencia de que algunos aspectos de su algoritmo son apropiados para darlos a conocer al estudiante de cálculo.

Hasta la fecha ningún texto de tal materia incluye material al respecto, lo cual es una omisión que no sólo deja incompleto el cuento de la integración elemental finita, sino que priva al estudiante de cálculo de algunas visiones valiosas.

BIBLIOGRAFIA

(1) JOSEPH LIOUVILLE. Mémoire sur la détermination des Integrales dont la valeur est algèbrique, J. Ecole Polytechnique, Vol. 14, cahier 22, pp.124-193, Paris, 1933.

(2) ——. Mémoire sur les Trascendantes Elliptiques de premiére et de seconde espece considérés comme fonctions de leur amplitude, J. Ecole Polytechnique, Vol. 14, pp.37-83, París, 1834.

(3) ——. Mémoire sur la classification des transcendantes et sur l'impossibilité d'exprimer les racines de certaines equations en fonctions ffnie explicite des coefficients, J. Math. Pures Appl., Vol. 2, pp.56-104, París, 1837.

(4) ——. Suite du Mémoire sur la classification des transcendantes et sur l' impossibilité d' exprimer les racines de certaines edquiations en fonction finie explicite des coefficients, ibid., Vol. 3, pp. 523-546, París, 1838.

(5) — sur les Transcendantes Elliptiques de premiére et de seconde espece considerees comme fonctions de leur module, ibid., Vol. 5, pp.441-464, París, 1840.

(6) D.D. MORDUKHAI—Boltovskoi, Researches on the integration in finite terms of diferential equiations of the first order, Communications de la societe mathematique de Kharkov, X. pp.34-64, 231-269 (Russian), 1906-09

(7) ——. On the Integration in Finite Terms of Linear Differential Equations, Warsaw, (Russian) 1913.

(8) ——. On the Integration of Transcendental Functions, Warsaw, (Russian), 1913.

(9) ——. Sur la resolution des equiations differentielles du premier ordre en fome finie, Rend. Circ. Mat. Palermo, LXI, pp. 49-72, 1937.

(10) G.H. HARDY. The Integration of Functions of a Single Variable, 2nd ed., Cambridge Univ. Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, No. 2, Cambridge. England, 1916.

(11) A. OSTROWSKI. Sur l integrabilite elementaire de quelques classes d exporessions, Comment. Math. Helv., Vol. 18, pp.283-308, 1946

(12) J.F. RITT. On the integrals of elementary functions, Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 25, pp.211-222, 1923.

(13) ——. Integration in Finite Terms: Liouville s Theory of Elementary Models, Columbia Univ. Press, New York, 1948.

(14) MORRIS KLINE. Mathematical Thought from Ancient to Modern Times, Oxford Univ. Press, pp. 411-422, New York, 1972.

(15) MARWELL ROSENLICHT. Liouville s theorem on functions with elementary integrals, Pacific J. Math. Vol. 24, No. 1, pp. 153-161, 1968.

(16) ——. Integration in finite terms, Amer. Math Monthly. Vol. 79, No. 9, pp. 963, November. 1972.

(17) ROBERT H. RISCH. On Real Elementary Functions, SDC document SP-2801/001/00,22, May, 1967.

(18) ——. On the Integration of Elementary Function which are Built Up Using Algebraic Operations, SDC document SP-2801/ 022/00, 26 June, 1968.

(19)—— Further Results on Elementary Functions. IBM RC 2402 (No. 11698), 11 March, 1969

(20) — The problem of integration in finite terms. Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 139, pp. 167-189, 1969.

(21) —. The solution of the problem of integration in finite terms, Bull. Amer. Math Soc., Vol.76, pp. 605-608, 1970.

(22) —. Implicitly elementary integrals, Proc. Amer. Math. Soc., Vol. 57, No. 1, pp. 68-90, May, 1976.

(23) ——. Algebraic properties of the elementary functions of analysis, amer. J. Math, Vol. 101, No. 4, pp. 743-759, August 1979.

(24) MICHAEL SINGER. Functions satisfyng elementary relatins, Berkeley dissertation, 1974.

(25) M. ROSENLICHT and M. SINGER. On Elementary, Generalized and Liouvillian Extension Fields, Contributions to Algebra, Hyman Bass, Phyllis J. Cassidy, and Jerald Kovacie (Editors), Academic Press, pp. 329-342, New York, 1977.

(26) MICHIHIKO MATSUDA. Liouville s theorem on a trascendental equation logy=y/x, J. Math. Kyoto Univ., Vol. 16, No. 3, pp. 545-554, 1976.

(27) F. BALDASSARRI and B. DWORK. On second order linear differential equiations with algebraic solutions, Amer. J. Math., Vol. 101, No. 1, pp.42-76, February, 1979.