Lema generalizado de Schur

HENRY LAMOS D.*
M.Sc. Universidad Patricio Lumunba

En el estudio de una representación irreducible de un grupo G, de una manera natural aparecen las llamadas «Algebras Transitivas». (Vèase [1]; [2]). En el caso de dimensión finita existen dos resultados fuertes conocidos como: El Teorema de Burnside y el Lema de Schur.

TEOREMA DE BURNSIDE

Sea E un espacio vectorial de dimensión finita sobre C y Q una álgebra transitiva en E. Entonces Q coincide con el Algebra compuesta por todos los endomorfismos en E. (Véase [2] o sea Q=End (E).

LEMA DE SCHUR

Sea T una representación irreducible de un grupo G en un espacio vectorial E de dimensión finita sobre C. Entonces cualquier operador lineal A en E que conmuta con los operadores T(g), $g \in G$ es escalar. (Vèase [1]).

* Profesor Departamento de Matemáticas. Universidad Industrial de Santander. Bucaramanga, Colombia.

En el caso de dimensión infinita para que estos resultados tengan lugar las álgebras transitivas deben ser de tipo compacto. Por lo general, la demostración del lema generalizado de Schur requiere de un complejo aparato matemático (Véase [3]).

El propósito del presente artículo es caracterizar las álgebras transitivas y presentar una demostración del Lema de Schur que en concepto del autor es más sencilla, basándose en uno de los resultados más recientes del análisis funcional como es el Teorema de Lomonosov.

Demos inicialmente ciertos conceptos, que nos serán útiles.

Sea H un espacio de Hilbert; Q una subálgebra contenida en B(H), donde B(H) es el álgebra compuesta por todos los operadores acotados que actúan en H.

Una subálgebra Q se llama transitiva si H no tiene subespacios cerrados no triviaales invariantes con respecto a cualquier operador A, de donde $A \in Q$.

Un subespacio H_o de H se denomina invariante con respecto a un operador $A \in B(H)$, si para cada vector $X_o \in H_o$ el vector $AX_o \in H_o$.

Los espacios H y (o) se denominan espacios triviales invariantes respecto a un operador A de B(H). La subálgebra Q se denomina álgebra de tipo compacto si Q contiene un operador compacto.

Se dice que Q actúa efectivamente en H si de la condición $AX = 0$ para todo A de Q se desprende que $X = 0$.

a partir de estos conceptos demos una caracterización de las álgebras transitivas.

LEMA

El álgebra Q que actúa efectivamente en H es transitiva si y solamente si para cualquier elemento X_o no nulo de H, el conjunto

$$Q X_o = \{ AX_o : A \in Q\} \text{ es denso en } H.$$

DEMOSTRACION

Sea Q transitiva. Fijemos un vector X_o de H no nulo y construyamos el conjunto QX_o. Podemos observar que QX_o es un subespacio de H ya que Q es una álgebra y a la vez dicho subespacio es invariante con respecto a Q; esto se desprende de la construcción de QX_o.

Veamos la clausura QX_o :

Cualquier elementos Z de $\overline{QX_o}$ se puede escribir de la forma $Z = \lim_{n\to\infty} Zn$; $Zn \in QX_o$: $n = 1,2,...$ ya que los operadores de Q son acotados y por lo tanto continuos,

$$A\,Z = A\lim_{n\to\infty} Zn = \lim_{n\to\infty} AZn$$

Los elementos $AZn \in QX_o$, por lo tanto $AZ \in \overline{QX_o}$.

Del anterior razonamiento se desprende que $\overline{QX_o}$ es un subespacio cerrado invariante respecto a Q. De la transitividad de Q se deduce que $\overline{QX_o} = (0)$ ó $\overline{QX_o} = H$; el primer caso no puede ser ya que Q actúa efectivo en H, entonces $\overline{QX_o} = H$.

Ahora supongamos que QX_o es denso en H, para cualquier elemento X_o no nulo de H.

Por reducción al absurdo: Supongamos que Q no es transitiva, entonces existe un subespacio cerrado no trivial H_o de H invariante con respecto a Q. Como $H_o \neq (0)$, existe un X_o de H_o no nulo. Construyamos $QX_o = \{ AX_o : A \in Q\}$. Observamos que QX_o está contenido en $\overline{H}_o = H_o$ (ya que H_o es cerrado).

QX_o es denso en H. Luego $\overline{QX_o} = H$, como conclusión Si $QX_o \subseteq H_o$ y $\overline{QX_o} = H$ entonces $H = H_o$ esto es contradictorio puesto que H_o es un subespacio no trivial de H.

TEOREMA DE LOMONOSOV

Sea Q un álgebra transitiva que actúa efectivamente en H y contiene un operador compacto; entonces Q contiene un operador compacto que tiene un vector fijo.

$$(\exists\, k_o \in Q, \exists\, X_o \in H : k_oX_o = X_o).$$

Véase demostración [3].

LEMA GENERALIZADO DE SCHUR

Sea Q un álgebra transitiva que actúa efectivamente en H y contiene un operador compacto, entonces el conmutante Q' de Q es escalar,

$$Q' = S = \{ A \in B(H) : A = \lambda I \}$$

I es el operador identidad en $B(H)$.

Se llama conmutante de Q al álgebra compuesta por todos los operadores M de $B(H)$ tales que $MA = AM$, $\forall\ A \in Q$.

DEMOSTRACION

Del teorema de Lomonosov se desprende que existe un operador compacto $K \in Q$ y un vector no nulo $X_o \in H : K X_o = X_o$.

Representemos como H_o el subespacio de H compuesto por todos los vectores fijos de K.

El subespacio H_o es de dimensión finita ya que K es un operador compacto. Sea M un elemento de Q' ; entonces para qualquier elemento X_o de H_o $MX = MKX = KMX$ observamos que $MX \in H_o$ de aquí se deduce que H_o es invariante con respecto a Q'.

Porque H_o es un subespacio de dimensión finita del álgebra lineal, se desprende que el operador M en H_o tiene un vector propio, luego existe un $'x_1 \neq 0$ de H_o tal que $MX_1 = \lambda X_1$; $\lambda \in \mathbb{C}$, QX_1 es denso en H ya que Q es transitiva. Luego cualquier elemento X de H se puede representar como:

$$X = \lim_{n \to \infty} An\, X_1 \,;\ An \in Q \quad n = 1,2,...$$

ya que M es continuo

$$MX = M \operatorname{Lim}_{n \to \infty} An\, X_1 = \operatorname{Lim}_{n \to \infty} MAn\, X_1 = \lim_{n \to \infty} An\, MX_1$$

$$= \operatorname{Lim}_{n \to \infty} An\, \lambda X_1 = \lambda \operatorname{Lim}_{n \to \infty} An\, X_1 = \lambda X_1$$

De aquí vemos que M es escalar en H.

BIBLIOGRAFIA

) NAIMAR, M.A. Anillos normados Springer, Verlag - Berlín, 1977.

) KASCH, F. Moduen und ringe. Stuttgart 1977.

) LOMONOSOV V.I. Trabajos del Seminario de Análisis Vectorial y Tensorial.