Los náufragos y los cocos

BERNARDO MAYORGA*

El 26 de abril de 1982, en la sección «Preguntas y Respuestas» de El Espectador, se invitaba a los lectores a resolver el siguiente problema: «Se trata de que un barco naufraga y se logran salvar en una isla desierta cinco hombres y un mico. Los náufragos dedican su primer día a recoger cocos para alimentarse y los dejan en una pila gigante antes de irse a dormir, para repartirlos al día siguiente. Pero uno de ellos despierta a media noche y como tiene miedo de que no le vayan a dar su justa parte, se levanta, hace cinco pilas iguales y le sobra un coco, que le regala al mico. Toma una de las pilas y se va a dormir. Al poco rato otro de los náufragos despierta, piensa lo mismo, divide los cocos que quedan en cinco pilas, le sobra un coco que también le regala al mico, esconde su parte y se va a dormir. En resumidas cuentas todos los cinco náufragos hicieron lo mismo, cada uno dividió lo que encontró en cinco pilas iguales y cada uno tuvo un coco sobrante para regalarle al mico. Al día siguiente repartieron los cocos en partes iguales, aunque ya no había necesidad porque un barco los había encontrado y los pudo rescatar. La pregunta es: ¿cuántos cocos había para comenzar?».

Unos días más tarde el autor del presente artículo envió al director de la sección una respuesta, que constituía la primera variante del mismo. Esa respuesta no fue publicada, y desde entonces no se ha vuelto a hablar en

* Profesor Asociado, Departamento de Matemáticas. Universidad Industrial de Santander. Bucaramanga, Colombia.

«Preguntas y Respuestas» de «problemas de tipo curioso y lógico», como se decía en la presentación del que nos ocupa.

Pero volvamos al problema en sí. Al leerlo surge inmediatemente la duda acerca de que el número cinco juegue en realidad algún papel importante en el planteo, y con esa duda surge igualmente el deseo de ensayar una solución para n náufragos. Así pues, replanteamos el problema de la siguiente manera: sucesivamente durante la noche cada uno de los n náufragos despierta, al trata de dividir en n partes iguales el montón de cocos que encuentra le sobra un coco y se lo da al mico, toma su parte y se va a dormir. A la mañana siguiente los cocos que quedan se distribuyen en partes iguales entre los náufragos (sin que sobre para el mico).

Sea C_o la cantidad total de cocos recogidos. Entonces $C_o - 1$ es dividible por n, el primer náufrago en despertar toma $\frac{1}{n}(C_o - 1)$ cocos y deja el resto, o sea $\frac{n-1}{n}(C_o - 1)$, cantidad que denotaremos C_1; el segundo náufrago encuentra C_1 cocos, toma para sí $\frac{1}{n}(C_1 - 1)$ y deja $\frac{n-1}{n}(C_1 - 1) = C_2$, etc., de tal suerte que el k-ésimo náufrago encuentra C_{k-1} cocos, toma $\frac{1}{n}(C_{k-1} - 1)$ y deja $C_k = \frac{n-1}{n}(C_{k-1} - 1)$. El último, n-ésimo náufrago, dejará $C_n = \frac{n-1}{n}(C_{n-1} - 1)$ cocos, cantidad que debe ser divisible por n, es decir,

$$C_n = m\,n \qquad [1]$$

para algún entero positivo m, que será **la cantidad de cocos que le corresponde a cada náufrago** cuando hagan la repartición estando todos presentes. De lo dicho tenemos

$$C_n = \frac{n-1}{n}\left[C_{n-1} - 1\right] = \frac{n-1}{n}\left[\frac{n-1}{n}(C_{n-2} - 1) - 1\right] =$$

$$= \left(\frac{n-1}{n}\right) C_{n-2} - \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 - \left(\frac{n-1}{n}\right) =$$

$$= \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \left[\frac{n-1}{n}(C_{n-3} - 1)\right] \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 - \left(\frac{n-1}{n}\right) =$$

$$= \left(\frac{n-1}{n}\right)^3 C_{n-3} - \left(\frac{n-1}{n}\right)^3 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 - \left(\frac{n-1}{n}\right) = \ldots =$$

$$= \left(\frac{n-1}{n}\right)^n C_o - \left(\frac{n-1}{n}\right)^n - \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} - \ldots - \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 - \left(\frac{n-1}{n}\right) =$$

$$= \left(\frac{n-1}{n}\right)^n C_o - \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{n-1}{n}\right)^k,$$

o sea

$$C_n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n C_o - \sum_{k=1} \left(\frac{n-1}{n}\right)^k . \qquad [2]$$

La sumatoria del miembro derecho de [2] la podemos calcular por medio de la fórmula para la suma de progresiones geométricas,

$$a + a^2 + a^3 + \ldots + a^n = a \cdot \frac{1-a^n}{1-a} \quad ,$$

con $a = \dfrac{n-1}{n}$. Así pues,

$$C_n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n C_o - (n-1) \left[1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^n\right] . \qquad [2']$$

Comparando [2'] con [1] tenemos

$$m\,n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n C_o - (n-1) \left[1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^n\right] ,$$

de donde

$$C_o = m\,n \left(\frac{n}{n-1}\right)^n + (n-1) \left[\left(\frac{n}{n-1}\right)^n - 1 \right], \qquad [3]$$

$$C_o + n - 1 = [\,(m+1)\,n - 1]\left(\frac{n}{n-1}\right)^n . \qquad [3']$$

El problema se reduce entonces a determinar si existen números naturales C_o y m, dependientes de n, que hagan válida la igualdad [3] (o la [3'], que es lo mismo).

Si existen esos números el miembro derecho de [3'] es un natural. Como n y n-1 son primos entre sí, el factor (m+1) n-1 debe ser un múltiplo entero de $(n-1)^n$, es decir, debe existir un $M \in \mathbb{N}$ tal que

$$(m+1)\,n - 1 = M(n-1)^n \qquad [4]$$

El desarrollo por la fórmula de Newton del binomio de la derecha nos da:

$$(n-1)^n = n^n - nn^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}n^{n-2} - \ldots + (-1)^{n-2}\frac{n(n-1)\,n^2}{2!} + (-1)^{n-1}n^2 + (-1)^n =$$

$$= \frac{1}{2}n^{n-1}(n-1) - \frac{1}{3!}n^{n-2}(n-1)(n-2) + \ldots + \frac{1}{2}(-1)^{n-2}n^3(n-1) + (-1)^{n-1}n^2 + (-1)^n .$$

Sustituyendo en [4] el valor calculado para $(n-1)^n$ obtenemos

$$(m+1)n-1 = M\left[\frac{1}{2}n^{n-1}(n-1) - \frac{1}{3!}n^{n-2}(n-1)(n-2) + \ldots + (-1)^{n-1}n^2 + (-1)^n\right],$$

y de aquí

$$(m+1)n = M\left[\frac{1}{2}n^{n-1}(n-1) - \frac{1}{3!}n^{n-2}(n-1)(n-2) + \ldots + (-1)^{n-1}n^2\right] + \left\{(-1)^n M + 1\right\} \qquad [4']$$

Todos los términos dentro del paréntisis cuadrado son números enteros (por ser términos del desarrollo binomial) y además múlti plos de n, así que el primer término del miembro derecho de [4'] también lo es. Para que m sea entero se necesitará entonces que el segundo término del miembro derecho de [4'] sea también un múltiplo de n:

$$\left\{(-1)^n M+1\right\} = k\,n\,,$$

donde

$$M = (-1)^n (k\,n - 1)\,. \qquad [5]$$

Substituyendo este último valor en [4] tenemos

$$(m+1)\,n-1 = (-1)^n (kn - 1)\,(n-1)^n\,,$$

y de aquí

$$m = \frac{(-1)^n (kn-1)\,(n-1)^n - n+1}{n}\,. \qquad [6]$$

Pero m debe ser positivo, así que

$$(-1)^n (kn-1)\,(n-1)^n - n + 1 > 0\,,$$

que conduce a

$$(-1)^n (kn-1) > 0\,. \qquad [7]$$

Así pues, si n es par (n = 2, 4, 6, ...), podemos tomar k = 1, 2, 3, ... , y en tal caso [6] será de la forma

$$m = \frac{(kn-1)\,(n-1)^n - n+1}{n}\,, \; n \text{ par}, \; k \geqslant 1\,; \qquad [6']$$

y si n es impar (n = 3, 5, 7, ...), en [7] debemos tomar k = 0, -1, -2, -3, ... , lo que aplicado en [6] llevará a

$$m = \frac{(-kn+1)\,(n-1)^n - n+1}{n}\,, \; n \text{ impar}, \; k \leqslant 0\,,$$

o lo que es lo mismo,

$$m = \frac{(kn+1)\,(n-1)^n - n + 1}{n}\,, \quad n \quad \text{impar}, \quad k \geqslant 0\,. \qquad [6'']$$

Sólo queda ahora substituir los valores de m en [3], lo cual da:

$C_o = (kn-1)n^n - n + 1$, n par, $k \geqslant 1$,	[3'']
$C_o = (kn+1)n^n - n + 1$, n impar, $k \geqslant 0$.	[3''']

La respuesta concreta a la pregunta aparecida en El Espectador la obtenemos tomando en la fórmula [3'''] n=5 y k=0, lo cual da 3 121 cocos, que será la mínima cantidad que resuelve el problema. En calidad de ilustración -y verificación- veamos la tercera solución (k=3) para el caso de 8 náufragos, que según la fórmula [3''] será 385 875 961. A partir de esta cifra podemos construir la siguiente tabla:

Náufrago	Encuentra	Toma	Deja
1	385 875 961	48 234 495	337 641 465
2	337 641 465	42 205 183	295 436 281
3	295 436 281	36 929 535	258 506 745
4	258 506 745	32 313 343	226 193 401
5	226 193 401	28 274 175	197 919 225
6	197 919 225	24 739 903	173 179 321
7	173 179 321	21 647 415	151 531 905
8	151 531 905	18 941 488	132 590 416
En la repartición final cada uno		16 573 802	

El último renglón de la tabla corresponde al valor de m en la fórmula (6') con n = 8 y k = 3.