



Grafos pesados y aplicaciones estables de 3-variedades en \mathbb{R}^3

NELSON B. HUAMANÍ^a ✉, CATARINA MENDES DE JESUS^b,

^a Universidad Nacional de San Cristóbal de Huamanga, Departamento de
Matemática y Física, Ayacucho, Perú.

^b Universidade Federal de Juiz de Fora, Departamento de Matemática, Juiz de Fora,
Brasil.

Resumen. En el presente artículo se estudia el espacio de grafos con pesos, junto con dos operaciones entre estos grafos. Los resultados que se encuentran en este espacio son usados en el estudio de aplicaciones estables de 3-variedades en \mathbb{R}^3 , en particular cuando la 3-variedad es \mathcal{M}_n , donde esta variedad es la suma conexa de n -copias de $S^1 \times S^2$ con $\mathcal{M}_0 = S^3$. Además, se prueban resultados importantes para la construcción de este tipo de aplicaciones.

Palabras clave: Aplicaciones estables, conjunto singular, grafos pesados, 3-variedades, 3-esfera.

MSC2010: 58K15, 57R45, 57M15, 57R65

Weighted graphs and stable maps of 3-manifolds in \mathbb{R}^3

Abstract. In this paper we study the space of graphs with weights together with two operations between these graphs. The results found in this space are used in the study of stable maps of 3-manifolds in \mathbb{R}^3 , in particular when the 3-manifold is \mathcal{M}_n , where this manifold is the connected sum of n -copies of $S^1 \times S^2$ with $\mathcal{M}_0 = S^3$. In addition, important results are proven for the construction of this type of maps.

Keywords: Stable maps, singular set, weighted graphs, 3-manifolds, 3-sphere.

1. Introducción

Los grafos con pesos son una herramienta para el estudio de aplicaciones entre variedades usada por varios matemáticos [3], [4], [9], [11], [6]. En [9] introdujeron grafos con pesos en vértices y aristas, asociándolos a las aplicaciones estables de 3-variedades cerradas y orientadas en \mathbb{R}^3 , como invariantes topológicos globales. En [11] introdujeron las cirugías

E-mail: nelson.berrocal@unsch.edu.pe^a ✉, cmendes@ufv.br^b.

Recibido: 28 de julio de 2020, Aceptado: 25 de febrero de 2021.

Para citar este artículo: N. B. Huamaní and C. Mendes de Jesus, Grafos pesados y aplicaciones estables de 3-variedades en \mathbb{R}^3 , *Rev. Integr. temas mat.* 39 (2021), No. 1, 109-128.

doi: 10.18273/revint.v39n1-2021008

(operaciones) entre aplicaciones estables de 3-variedades en \mathbb{R}^3 , las cuales inducen cirugías entre los grafos asociados a estas aplicaciones. Tomando en cuenta estas cirugías en grafos con pesos, es posible estudiarlos y obtener resultados para el estudio de las aplicaciones estables.

El documento está organizado de la siguiente manera. En la Sección 2, se estudia el conjunto de los grafos bipartitos con pesos en vértices y aristas, e introducimos las cirugías en este tipo de grafos. Se estudia la estructura algebraica que tiene este espacio de grafos. Esta forma de estudiar grafos con pesos es un enfoque que nace de los grafos asociados a aplicaciones estables y sus cirugías, que se presenta en la primera sección.

En la Sección 3.1, presentamos una aplicación de los resultados que encontramos en la Sección 2. Para esto comenzamos presentando, de forma resumida, la definición, ejemplos y resultados de estos grafos para aplicaciones estables de las 3-variedades S^3 y $S^1 \times S^2$ en \mathbb{R}^3 . El objetivo es dar a conocer la construcción de estas aplicaciones asociadas a un grafo bipartito con pesos no negativos en los vértices y aristas, haciendo un paralelo a las construcciones de aplicaciones estables entre superficies introducidas por Hacon-Mendes-Romero en [4] y [3], usando para esto las cirugías entre aplicaciones estables que se presentan en la subsección 3.1. Además, se estudia los efectos de estas cirugías en los grafos asociados. Finalmente, presentamos resultados en torno a la construcción de aplicaciones estables de S^3 y $S^1 \times S^2$ en \mathbb{R}^3 , usando los resultados de la Sección 2; además, probamos de manera sencilla el Teorema 5.5 de [11].

Cabe indicar que en [11], [5] y [6] los autores estudiaron y presentaron otras técnicas para construir aplicaciones estables, usando las transiciones de codimensión 1, presentadas en [7] y [2].

2. Grafos bipartitos pesados

Definición 2.1. Un grafo \mathcal{G} es llamado *grafo pesado* si tiene asociado a cada vértice y a cada arista un entero no negativo. Un grafo es *bipartito* si todos los ciclos tienen un número par de aristas. Finalmente, un grafo es *vacío* si no tiene aristas.

Notación. Denotaremos por \mathbb{G} al conjunto de todos los grafos pesados, bipartitos, conexos y no vacíos.

Definición 2.2. Un grafo $\mathcal{G} \in \mathbb{G}$ será representado por la cuaterna $[V, E, W_v, W_e] = \mathcal{G}$ donde V y E son, respectivamente, el número de vértices y aristas; W_v y W_e son la suma de pesos en los vértices y suma de pesos en las arista, respectivamente. Puesto que \mathcal{G} es un grafo no vacío, tenemos que $V \geq 2$, $E \geq 1$, $W_v \geq 0$ y $W_e \geq 0$. Estos números son enteros no negativos.

2.1. Cirugías.

Cirugía es una operación que une dos grafos de \mathbb{G} o une dos vértices en un mismo grafo (ver Figura 1). Estas cirugías se definen exactamente de la siguientes dos maneras:

Definición 2.3. Dados $\mathcal{G} = [V, E, W_v, W_e]$, $\mathcal{H} = [V', E', W'_v, W'_e] \in \mathbb{G}$ la *cirugía horizontal* y *cirugía vertical* entre \mathcal{G} y \mathcal{H} denotada por $\mathcal{G} \oplus_h \mathcal{H}$ y $\mathcal{G} \oplus_v \mathcal{H}$ respectivamente, se definen como:

a) $\mathcal{G} \oplus_h \mathcal{H}$ se construye en tres etapas: (i) se elige una arista en cada grafo correspondiente; (ii) se identifican las aristas elegidas con sus vértices respectivos, uniéndose así los grafos \mathcal{G} y \mathcal{H} ; (iii) se suman los pesos de los vértices y aristas identificadas. El grafo obtenido por este proceso será denotado por $\mathcal{G} \oplus_h \mathcal{H}$. Una representación gráfica de esta cirugía está en la Figura 1(a). Si esta cirugía se hace en el mismo grafo \mathcal{G} , se escogen las aristas de forma que el nuevo grafo resultante al realizar la cirugía horizontal sea bipartito y será denotado por $\oplus_h(\mathcal{G})$, y cuya representación está dada por:

$$\mathcal{G} \oplus_h \mathcal{H} = [V + V' - 2, E + E' - 1, W_v + W'_v, W_e + W'_e],$$

$$\oplus_h(\mathcal{G}) = [V - 2, E - 1, W_v, W_e].$$

b) $\mathcal{G} \oplus_\nu \mathcal{H}$ también se construye en tres etapas: (i) se elige un vértice en cada grafo; (ii) se unen por una arista los vértices elegidos, uniéndose así los grafos \mathcal{G} y \mathcal{H} ; (iii) el peso en la arista que se creó para unir los vértices es en cero y los pesos en los vértices no cambian. Finalmente, el grafo obtenido de esta forma será denotado por $\mathcal{G} \oplus_\nu \mathcal{H}$. Si esta cirugía se hace en el mismo grafo \mathcal{G} , se escogen los vértices de forma que el nuevo grafo resultante al realizar la cirugía vertical sea bipartito y será denotado por $\oplus_\nu(\mathcal{G})$. Una representación gráfica de esta cirugía está en la Figura 1(b), y cuya representación está dada por:

$$\mathcal{G} \oplus_\nu \mathcal{H} = [V + V', E + E' + 1, W_v + W'_v, W_e + W'_e],$$

$$\oplus_\nu(\mathcal{G}) = [V, E + 1, W_v, W_e].$$

Note que el grafo $\oplus_\nu(\mathcal{G})$ tiene un ciclo a más que \mathcal{G} .

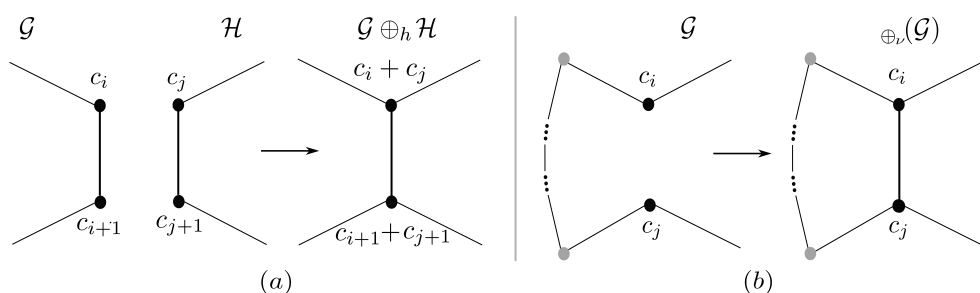


Figura 1. Operaciones entre grafos bipartitos.

Definición 2.4. El conjunto \mathbb{G} , junto con las cirugías horizontal y vertical definidas anteriormente, es llamado el *espacio de grafos pesados bipartitos* y será denotado por $(\mathbb{G}, \oplus_h, \oplus_\nu)$.

Definición 2.5. Los *grafos básicos* $\mathcal{G} = [V, E, W_v, W_e]$ en $(\mathbb{G}, \oplus_h, \oplus_\nu)$ son aquellos que no pueden ser obtenidos de otros grafos usando las cirugías vertical y horizontal de grafos.

Proposición 2.6. Los grafos básicos de \mathbb{G} son $\mathcal{I} = [2, 1, 0, 0]$, $\mathcal{J} = [2, 1, 0, 1]$, $\mathcal{K} = [3, 2, 0, 0]$ y $\mathcal{L} = [2, 1, 1, 0]$, y sus representaciones gráficas están en la Figura 2.

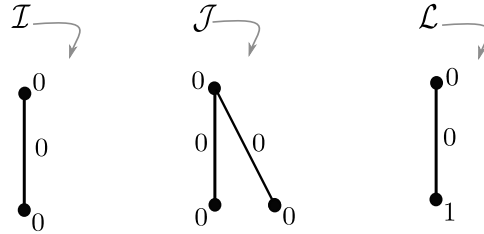


Figura 2. Grafos básicos.

Demostración. Como todos los grafos con ciclos en $(\mathbb{G}, \oplus_h, \oplus_\nu)$ pueden ser construidos de grafos árboles con la operación \oplus_ν , entonces los grafos básicos son árboles. Así, basta buscar en el espacio (\mathbb{A}, \oplus_h) , donde \mathbb{A} es el conjunto de todos los grafos árboles con pesos no negativos en los vértices y aristas; por tanto $\mathbb{A} \subset \mathbb{G}$. Ahora consideremos el conjunto $\mathbb{N}^* = \{(x, x, y, z) \in \mathbb{N}_0^4 : x, y, z \in \mathbb{N}_0\}$, donde \mathbb{N}_0 representa el conjunto de números naturales incluido el cero. Mostremos que $(\mathbb{N}^*, +)$ es isomorfo a (\mathbb{A}, \oplus_h) . Para esto, verificamos que la siguiente aplicación φ es un morfismo y, aún más, es un isomorfismo.

$$\begin{aligned} \varphi : (\mathbb{N}^*, +) &\longrightarrow (\mathbb{A}, \oplus_h) \\ (x, x, y, z) &\longmapsto \varphi[(x, x, y, z)] = [x + 2, x + 1, y, z]. \end{aligned}$$

En primer lugar, notemos que dado $[V, E, W_v, W_e] \in \mathbb{A}$, se cumple que $1 - V + E = 0$ ya que $[V, E, W_v, W_e]$ es un árbol. Entonces, como $\varphi[(x, x, y, z)] = [x + 2, x + 1, y, z]$, se tiene que $x, y, z \geq 0$; lo que implica que $x + 2 \geq 2$, $x + 1 \geq 1$, $y \geq 0$, $z \geq 0$. Además, $1 - V + E = 1 - (x + 2) + (x + 1) = 0$, entonces $\varphi[(x, x, y, z)] = [x + 2, x + 1, y, z] \in \mathbb{A}$. Ahora mostremos $\varphi[(x, x, y, z) + (x', x', y', z')] = \varphi[(x, x, y, z)] \oplus_h \varphi[(x', x', y', z')]$.

$$\begin{aligned} \varphi[(x, x, y, z) + (x', x', y', z')] &= \varphi[(x + x', x + x', y + y', z + z')], \\ &= [x + x' + 2, x + x' + 1, y + y', z + z'], \\ &= [(x + 2) + (x' + 2) - 2, (x + 2) + (x' + 1) - 1, y + y', z + z'], \\ &= [x + 2, x + 1, y, z] \oplus_h [x' + 2, x' + 1, y', z'] \\ &= \varphi[(x, x, y, z)] \oplus_h \varphi[(x', x', y', z')]. \end{aligned}$$

Esto implica que φ es un morfismo. Seguidamente mostremos que φ^{-1} dado por

$$\begin{aligned} \varphi^{-1} : (\mathbb{A}, \oplus_h) &\longrightarrow (\mathbb{N}^*, +), \\ [a, b, c, d] &\longmapsto \varphi^{-1}([a, b, c, d]) = (a - 2, b - 1, c, d) \end{aligned}$$

es el morfismo inverso de φ . En efecto, como $a \geq 2$, $b \geq 2$, $c \geq 0$ y $d \geq 0$, tenemos que $\varphi^{-1}([a, b, c, d]) = (a - 2, b - 1, c, d) \in \mathbb{N}^*$. Se verifica de manera natural que $\varphi^{-1}([a, b, c, d] \oplus_h [a', b', c', d']) = \varphi^{-1}([a, b, c, d]) + \varphi^{-1}([a', b', c', d'])$. Como

$$\varphi^{-1}(\varphi[(x, x, y, z)]) = \varphi^{-1}([x + 2, x + 1, y, z]) = (x, x, y, z), \quad y$$

$$\varphi(\varphi^{-1}([a, b, c, d])) = \varphi([a - 2, b - 1, c, d]) = (a, b, c, d),$$

concluimos que $(\mathbb{N}^*, +) \cong (\mathbb{A}, \oplus_h)$. Ahora notemos que $(\mathbb{N}^*, +)$ es generado por el conjunto $\{(0, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$. El elemento $(0, 0, 0, 0)$ está en este conjunto pues no puede ser generado en función de los otros. Luego, usando el isomorfismo tenemos que (\mathbb{A}, \oplus_h) es generado por los grafos $\{[2, 1, 0, 0], [2, 1, 0, 1], [3, 2, 0, 0], [2, 1, 1, 0]\} = \{\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K}, \mathcal{L}\}$. Finalmente, como todo grafo con ciclo puede ser construido a partir de un árbol, se tiene que $(\mathbb{A}, \oplus_h, \oplus_\nu)$ es generado por los grafos $\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K}$ y \mathcal{L} . \square

Note que los grafos básicos tienen representación única como grafos con pesos.

Observación 2.7. De la demostración de la Proposición 2.6, tenemos que el monoide (\mathbb{A}, \oplus_h) (aún por demostrar) es generado por los grafos básicos $\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K}$ y \mathcal{L} , es decir, $(\mathbb{A}, \oplus_h) = \langle \{\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K}, \mathcal{L}\} \rangle$.

Observación 2.8. Denotamos por $\mathcal{G}^{\oplus_h k}$ a la suma horizontal de k -copias de \mathcal{G} , así $\underbrace{\mathcal{G} \oplus_h \cdots \oplus_h \mathcal{G}}_{k\text{-veces}} = \mathcal{G}^{\oplus_h k}$.

Proposición 2.9. Si $\mathcal{G} = [V, E, W_v, W_e] \in \mathbb{G}$, entonces se cumplen las siguientes propiedades:

1. $\mathcal{G}^{\oplus_h k} = [kV - 2k + 2, kE - k + 1, kW_v, kW_e]$,
2. $\mathcal{I} \oplus_h \mathcal{G} = \mathcal{G} = \mathcal{G} \oplus_h \mathcal{I}$,
3. $\mathcal{G}^{\oplus_h k} \oplus_h \mathcal{G}^{\oplus_h \tau} = \mathcal{G}^{\oplus_h (k+\tau)}$ y por convención $\mathcal{G}^{\oplus_h k} = \mathcal{I}$, si $k = 0$.

Demostración. Para la Propiedad 1 se tiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^{\oplus_h k} &= \underbrace{[V, E, W_v, W_e] \oplus_h \cdots \oplus_h [V, E, W_v, W_e]}_{k\text{-veces}} \\ &= [V + (k-1)(V-2), E + (k-1)(E-1), kW_v, kW_e], \\ &= [kV - 2k + 2, kE - k + 1, kW_v, kW_e]. \end{aligned}$$

Ahora, para la Propiedad 2 se tiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{I} \oplus_h \mathcal{G} &= [2, 1, 0, 0] \oplus_h [V, E, W_v, W_e] = [V + 2 - 2, E + 1 - 1, W_v, W_e], \\ &= [V, E, W_v, W_e], \\ &= \mathcal{G}, \text{ así tenemos } \mathcal{I} \oplus_h \mathcal{G} = \mathcal{G}. \end{aligned}$$

De igual forma se muestra que $\mathcal{G} = \mathcal{G} \oplus_h \mathcal{I}$. La Propiedad 3 es evidente. \square

En particular se tiene que: $\mathcal{I}^{\oplus_h k} = [2, 1, 0, 0]$, $\mathcal{J}^{\oplus_h k} = [2, 1, 0, k]$, $\mathcal{K}^{\oplus_h k} = [k+2, k+1, 0, 0]$ y $\mathcal{L}^{\oplus_h k} = [2, 1, k, 0]$.

Proposición 2.10. El espacio (\mathbb{G}, \oplus_h) es un monoide abeliano y en particular (\mathbb{A}, \oplus_h) es un monoide abeliano finitamente generado.

Demostración. Para mostrar que (\mathbb{G}, \oplus_h) es un monoide abeliano basta verificar tres condiciones.

- *Asociativa:* $\mathcal{G} \oplus_h (\mathcal{H} \oplus_h \mathcal{T}) = (\mathcal{G} \oplus_h \mathcal{H}) \oplus_h \mathcal{T}$, para todo $\mathcal{G}, \mathcal{H}, \mathcal{T} \in \mathbb{G}$. (Se verifica de manera fácil de la definición de cirugía horizontal).
- *Elemento identidad:* Hay un elemento $\mathcal{E} \in \mathbb{G}$ tal que $\mathcal{G} \oplus_h \mathcal{E} = \mathcal{G} = \mathcal{E} \oplus_h \mathcal{G}$, para todo $\mathcal{G} \in \mathbb{G}$. (Basta tomar $\mathcal{E} = \mathcal{I} = [2, 1, 0, 0]$ y considerar la Propiedad 2 de la Proposición 2.9).
- *Conmutativo:* $\mathcal{G} \oplus_h \mathcal{H} = \mathcal{H} \oplus_h \mathcal{G}$, para todo $\mathcal{G}, \mathcal{H} \in \mathbb{G}$. (Se verifica de manera natural de la definición de cirugía horizontal).

Finalmente, (\mathbb{A}, \oplus_h) es un submonoide de (\mathbb{G}, \oplus_h) pues la suma horizontal de grafos árbol sigue siendo árbol. Ahora, considerando la Observación 2.7, se tiene que (\mathbb{A}, \oplus_h) es generado por los grafos básicos $\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K}$ y \mathcal{L} , por tanto, (\mathbb{A}, \oplus_h) es finitamente generado. \checkmark

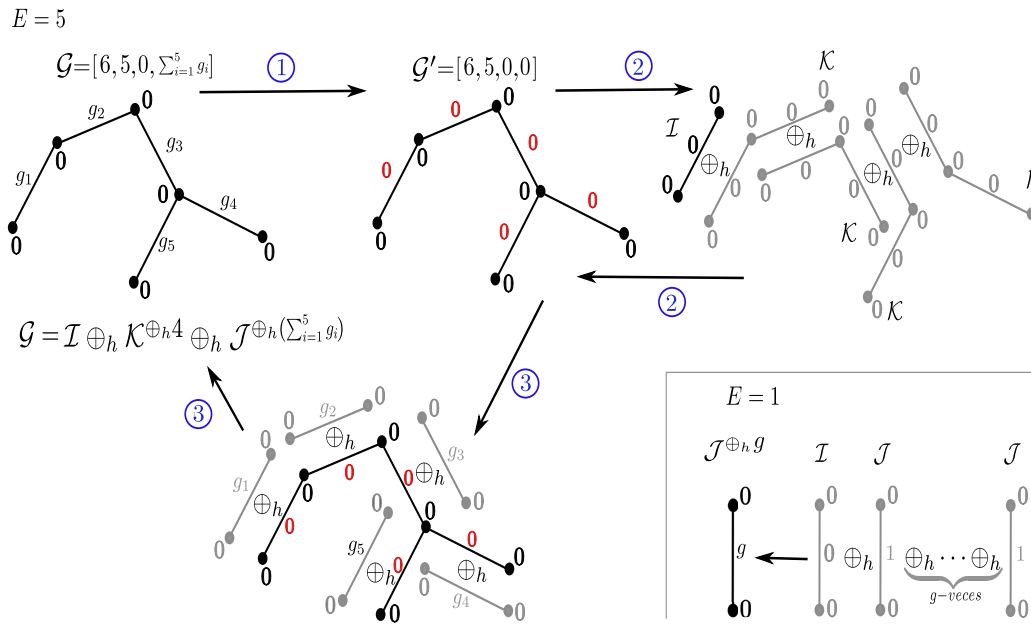


Figura 3. Esquema de demostración de la Proposición 2.11, caso $E = 1, E = 5$.

Proposición 2.11. Sea $\mathcal{G} = [V, E, 0, W_e] \in \mathbb{G}$ un grafo árbol ($1 - V + E = 0$), con peso cero en sus vértices. Entonces \mathcal{G} puede escribirse como combinación lineal de los grafos básicos $\mathcal{I} = [2, 1, 0, 0]$, $\mathcal{J} = [2, 1, 0, 1]$ y $\mathcal{K} = [3, 2, 0, 0]$ y usando la cirugía horizontal \oplus_h . Además, \mathcal{G} puede escribirse como:

$$\mathcal{G} = \mathcal{I} \oplus_h \mathcal{K}^{\oplus_h (E-1)} \oplus_h \mathcal{J}^{\oplus_h W_e}.$$

Demostración. Daremos una prueba por inducción sobre el número de aristas. Sea \mathcal{G} un grafo árbol con una sola arista (es decir $E = 1$) y cualquier peso g en esta arista. Si $g = 0$, entonces $\mathcal{G} = \mathcal{I} = [2, 1, 0, 0]$. En el caso general, si $g > 0$, este grafo lo construimos

sumando horizontalmente g veces los grafos $\mathcal{J} = [2, 1, 0, 1]$; dado un grafo árbol \mathcal{G} con $E > 1$ aristas y con pesos g_i en sus aristas $g_i \in \mathbb{N} \forall i = 1, \dots, E$, haremos esto en tres pasos:

- (1) Comencemos retirando todos los pesos g_i de cada i -ésima arista (note que $W_e = \sum_{i=1}^E g_i$) de \mathcal{G} , así obtenemos un nuevo grafo \mathcal{G}' que tiene E aristas con pesos nulos (ver Figura 3).
- (2) Hacemos cirugía horizontal de $\mathcal{I} = [2, 1, 0, 0]$ con $E - 1$ grafos básicos $\mathcal{K} = [3, 3, 0, 0]$ de forma que al final obtenemos el grafo \mathcal{G}' .
- (3) Hacemos cirugía horizontal del grafo \mathcal{G}' con W_e grafos básicos $\mathcal{J} = [2, 1, 0, 1]$ de forma que restituimos todos los pesos en las aristas hasta obtener el grafo \mathcal{G} (ver Figura 3).

Así, $\mathcal{G} = [V, E, 0, W_e]$ puede escribirse como:

$$\begin{aligned} \mathcal{I} \oplus_h \mathcal{K}^{\oplus_h(E-1)} \oplus_h \mathcal{J}^{\oplus_h W_e} &= [2, 1, 0, 0] \oplus_h [(E-1) + 2, (E-1) + 1, 0, 0] \oplus_h [2, 1, 0, W_e], \\ &= [2, 1, 0, 0] \oplus_h [E+1, E, 0, 0] \oplus_h [2, 1, 0, W_e], \\ &= [E+1, E, 0, 0] \oplus_h [2, 1, 0, W_e], \\ &= [E+1+2-2, E+1-1, 0, W_e], \\ &= [E+1, E, 0, W_e], \quad \text{y como } V = E+1, \\ &= [V, E, 0, W_e] = \mathcal{G}. \end{aligned}$$

Por tanto, los grafos \mathcal{G} y $\mathcal{I} \oplus_h \mathcal{K}^{\oplus_h(E-1)} \oplus_h \mathcal{J}^{\oplus_h W_e}$ tienen el mismo número de vértices, aristas y pesos en sus aristas. \square

Notación. Denotemos por $\oplus_\nu^k(\mathcal{G})$ a la cirugía k -veces realizada en un mismo grafo \mathcal{G} , es decir: $\oplus_\nu^k(\mathcal{G}) = \underbrace{\oplus_\nu(\dots \oplus_\nu(\mathcal{G}))}_{k\text{-veces}}$, y por convención, si $k = 0$, se tiene que

$$\oplus_\nu^0(\mathcal{G}) = \mathcal{G}.$$

Proposición 2.12. Sea $\mathcal{G} = [V, E, W_v, W_e] \in \mathbb{G}$, entonces este grafo puede escribirse como combinación lineal de los grafos básicos $\mathcal{I} = [2, 1, 0, 0]$, $\mathcal{J} = [2, 1, 0, 1]$, $\mathcal{K} = [3, 2, 0, 0]$, y $\mathcal{L} = [2, 1, 1, 0]$ usando la cirugía horizontal \oplus_h y cirugía vertical \oplus_ν en el mismo grafo. Además, \mathcal{G} puede escribirse como:

$$\mathcal{G} = \oplus_\nu^{1-V+E} (\mathcal{I} \oplus_h \mathcal{K}^{\oplus_h(V-2)} \oplus_h \mathcal{J}^{\oplus_h(W_e-\eta)}) \oplus_h \mathcal{J}^{\oplus_h \eta} \oplus_h \mathcal{L}^{\oplus_h W_v},$$

donde $\eta = \sum_{k=1}^{1-V+E} g_k$, y g_k es el peso de una arista en \mathcal{G} de forma que si se retiran esas aristas el nuevo grafo obtenido es un árbol.

Demostración. Mostraremos por construcción, dividiéndolo en siete pasos (ver Figura 4 para un esquema de la demostración):

- (1) Retiramos todos los pesos (W_v) de los vértices del grafo \mathcal{G} ; obtenemos así un nuevo grafo $\hat{\mathcal{G}}$.

- (2) Del grafo $\dot{\mathcal{G}}$, identificamos un número mínimo de aristas E' en $\dot{\mathcal{G}}$ (de forma que si las retiramos obtendríamos un árbol conexo). Este número coincide con $E' = b_1(\dot{\mathcal{G}}) = 1 - V + E$, retirando todos los pesos g_k de estas aristas identificadas (sea $\eta = \sum_{k=1}^{1-V+E} g_k$ la suma de todos los peso de las arista identificadas), obtenemos el grafo $\ddot{\mathcal{G}}$, con peso 0 en todas sus aristas identificadas.
- (3) Luego del grafo $\ddot{\mathcal{G}}$, retiramos las $1 - V + E$ aristas identificadas, así, obtenemos el grafo $\check{\mathcal{G}}$, que es un árbol con peso cero en sus vértices y sus respectivos pesos en sus aristas.

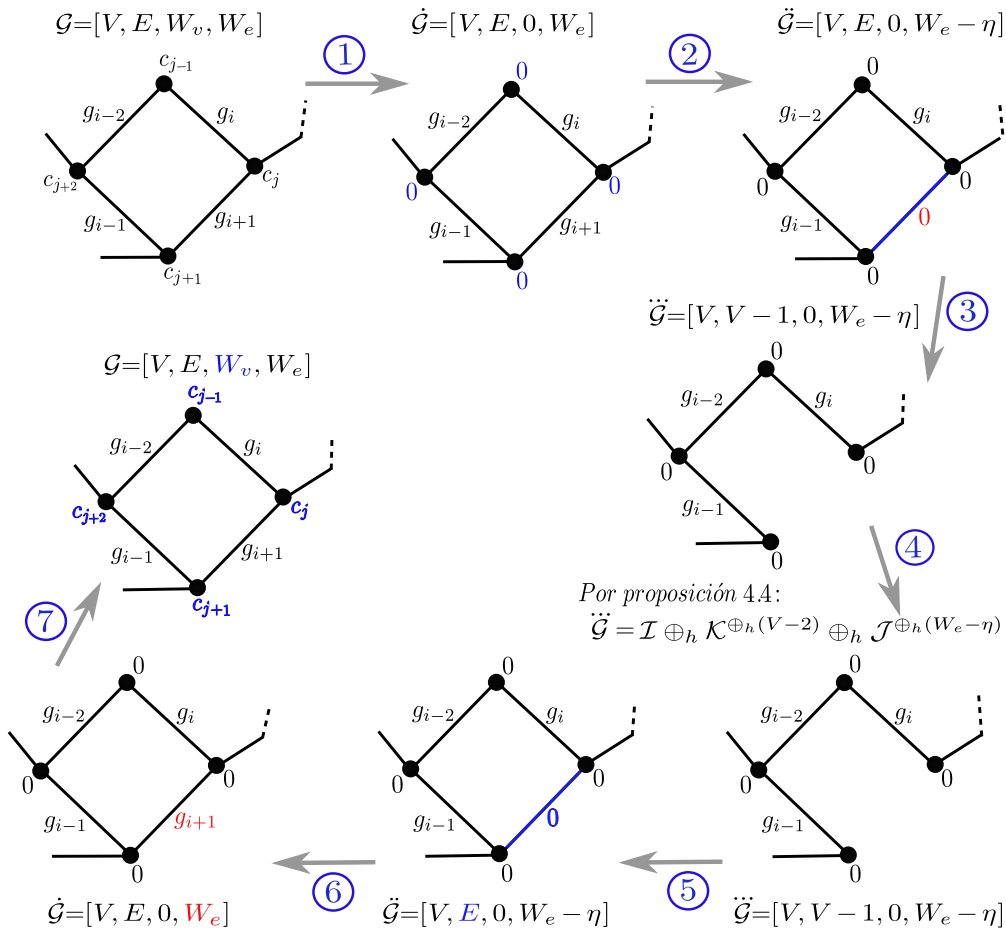


Figura 4. Esquema de demostración de la Proposición 2.12.

- (4) Por la Proposición 2.11, $\check{\check{\mathcal{G}}}$ puede expresarse en términos de los grafos básicos usando las cirugías entre grafos y está dado por:

$$\begin{aligned} \check{\check{\mathcal{G}}} &= \mathcal{I} \oplus_h \mathcal{K}^{\oplus_h(E-1-(1-V+E))} \oplus_h \mathcal{J}^{\oplus_h(W_e-\eta)} = [V, E - (1 - V + E), 0, W_e - \eta], \\ &= \mathcal{I} \oplus_h \mathcal{K}^{\oplus_h(V-2)} \oplus_h \mathcal{J}^{\oplus_h(W_e-\eta)} = [V, V - 1, 0, W_e - \eta]. \end{aligned} \tag{1}$$

- (5) Ahora, haciendo $1 - V + E$ sumas verticales en el mismo grafo $\check{\mathcal{G}}$ entre los dos vértices incidentes en cada una de las $1 - V + E$ aristas retiradas, obtenemos el grafo $\check{\check{\mathcal{G}}}$.
- (6) Haciendo sumas horizontales convenientemente entre $\check{\check{\mathcal{G}}}$ con η grafos básicos $\mathcal{J} = [2, 1, 0, 1]$ que aumentan los pesos g_k de las aristas identificadas en $\check{\check{\mathcal{G}}}$, obtenemos el grafo $\check{\check{\check{\mathcal{G}}}}$.
- (7) Por último, haciendo sumas horizontales convenientemente entre $\check{\check{\check{\mathcal{G}}}}$ y W_v grafos básicos $\mathcal{L} = [2, 1, 1, 0]$, obtenemos el grafo \mathcal{G} , con sus pesos originales.

Así $\mathcal{G} = [V, E, W_v, W_e]$ puede escribirse como:

$$\begin{aligned} & \oplus_{\nu}^{1-V+E} (\mathcal{I} \oplus_h \mathcal{K}^{\oplus_h(V-2)} \oplus_h \mathcal{J}^{\oplus_h(W_e-\eta)}) \oplus_h \mathcal{J}^{\oplus_h\eta} \oplus_h \mathcal{L}^{\oplus_h W_v} = \\ & \oplus_{\nu}^{1-V+E} ([V, V-1, 0, W_e-\eta]) \oplus_h [2, 1, 0, \eta] \oplus_h [2, 1, W_v, 0] = \\ & [V, E, 0, W_e-\eta] \oplus_h [2, 1, 0, \eta] \oplus_h [2, 1, W_v, 0] = \\ & [V, E, 0, W_e] \oplus_h [2, 1, W_v, 0] = [V, E, W_v, W_e] = \\ & \mathcal{G}. \end{aligned}$$

Así los grafos \mathcal{G} y $\oplus_{\nu}^{1-V+E} (\mathcal{I} \oplus_h \mathcal{K}^{\oplus_h(V-2)} \oplus_h \mathcal{J}^{\oplus_h(W_e-\eta)}) \oplus_h \mathcal{J}^{\oplus_h\eta} \oplus_h \mathcal{L}^{\oplus_h W_v}$, tienen el mismo número de vértices, aristas y pesos en sus aristas como en los vértices. \square

3. Una aplicación

3.1. Construcción de aplicaciones estables

Sea M una 3-variedad y $C^\infty(M, \mathbb{R}^3)$ el conjunto de aplicaciones suaves de M en \mathbb{R}^3 . Dos aplicaciones $f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R}^3)$ son *A-equivalentes*, cuando existen dos difeomorfismos $\phi : M \rightarrow M$ y $\psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tales que $g = \psi \circ f \circ \phi^{-1}$. Una aplicación $f \in C^\infty(M, \mathbb{R}^3)$ es *estable*, si todas las aplicaciones suficientemente próximas a f (en la C^∞ -topología de Whitney) son equivalentes a f . Según J. Mather [8], el conjunto de todas las aplicaciones estables, denotado por $\mathcal{E}(M, \mathbb{R}^3)$, es abierto y denso en $C^\infty(M, \mathbb{R}^3)$. El complemento del conjunto $\mathcal{E}(M, \mathbb{R}^3)$ en el conjunto $C^\infty(M, \mathbb{R}^3)$ es llamado *conjunto discriminante*.

Sea $f \in C^\infty(M, \mathbb{R}^3)$ una aplicación de forma genérica (esto es, una aplicación general). El conjunto singular de f tiene dimensión dos y está formado por subvariedades de dimensiones cero, uno y dos [10], [2]. Ahora, si $f \in \mathcal{E}(M, \mathbb{R}^3)$ es una aplicación estable, un punto x en M es llamado punto *regular* de f , si la aplicación f es un difeomorfismo local en la vecindad del punto x ; caso contrario, diremos que x es un *Dpunto singular*. De [1] se tiene que la forma normal de los gérmenes de los puntos singulares de f son:

- a) A_1 : *punto pliegue*, $(x, y, z) \mapsto (x^2, y, z)$;
- b) A_2 : *punto cúspide*, $(x, y, z) \mapsto (x^3 + yx, y, z)$;
- c) A_3 : *punto cola de golondrina*, $(x, y, z) \mapsto (x^4 + yx^2 + zx, y, z)$.

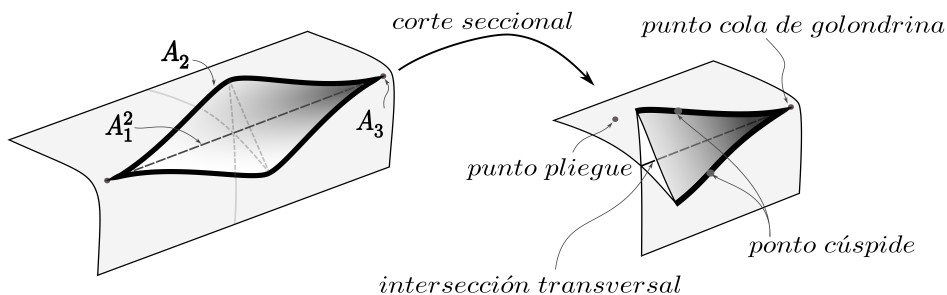


Figura 5. Ejemplos de puntos de curva cuspidal y cola de golondrina.

Si M es una 3-variedad compacta y orientada, el conjunto singular de f , denotado por Σf , está formado por los siguientes: (i) la unión disjunta de superficies compactas, orientadas, inmersas en M ; (ii) curvas formadas de puntos de cúspide, en la cual puede haber punto de cola de golondrina aislados si existen; y (iii) puntos pliegue.

Las superficies en (i) separan las componentes regulares de f y en cuyos bordes están contenidos Σf . El conjunto de ramificación de f es la imagen $f(\Sigma f)$ del conjunto singular y está formado por una colección de superficies cerradas, orientadas e inmersas en \mathbb{R}^3 , posiblemente con intersecciones transversales y singularidades correspondientes a una cantidad finita de aristas cuspidales y puntos de cola de golondrina aislados (ver Figura 5). El conjunto de ramificación de f tiene las siguientes auto intersecciones (ver Figura 6):

1. A_1^2 : intersección transversal de dos superficies de pliegue;
2. $A_2 A_1$: intersección transversal de arista cuspidal con una superficie de pliegue;
3. A_1^3 : puntos triples aislados, obtenidos por la intersección de superficies de pliegue.

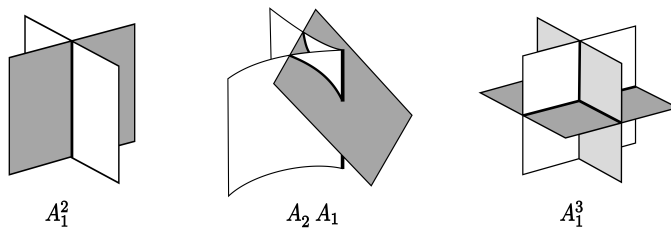


Figura 6. Puntos del tipo A_1^2 , $A_2 A_1$ y A_1^3 .

Cabe indicar que los conjuntos de ramificación formados por superficies que presentamos en las figuras, tienen un corte seccional para visualizar mejor las superficies (para ver si hay otra dentro o no).

3.2. Grafos de aplicaciones estables de 3-variedades en \mathbb{R}^3

Sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ una aplicación estable, donde M es una 3-variedad cerrada y orientada. Como el conjunto singular de f es un conjunto de superficies cerradas, en [11] los autores

definieron el grafo pesado asociado a la aplicación f de la siguiente forma: a cada superficie S_i en Σf asociaron una arista y a cada componente regular M_j de $M \setminus \Sigma f$ un vértice. A cada vértice v_j (correspondiente a la región M_j), se define su peso como $c_j = b_2(M_j) - s_j + 1$, donde s_j es el número de componentes conexas del borde de M_j . Intuitivamente, c_j puede ser visto como el número de generadores del segundo grupo de homología $H_2(M)$ en M_j , que no son determinados por el borde de M_j . A cada arista asociamos el peso dado por el género g_i de la superficie S_i que él representa. Como cada región del complemento $M - \Sigma f$ recibe un signo \pm , pueden ser atribuidos signos a los vértices de \mathcal{G}_f , donde cada vértice recibe el signo y la región correspondiente. Como Σf separa regiones de signos opuestos, cada arista de \mathcal{G}_f conecta vértices de signos opuestos. Así, el grafo asociado es *bipartito*.

Definición 3.1. El grafo asociado a una aplicación estable será denotado por $\mathcal{G} = (V, E, W_v, W_e)$, donde V y E son, respectivamente, el número de vértices y aristas; W_v y W_e son la suma de pesos en los vértices y suma de pesos en las arista, respectivamente. Diremos que un grafo bipartito pesado \mathcal{G} es *realizable por una aplicación estable* de una 3-variedad compacta y orientada M en \mathbb{R}^3 , si existe una aplicación $f \in \mathcal{E}(M, \mathbb{R}^3)$ tal que el grafo asociado a f es \mathcal{G} . Además, M será llamado *la variedad de \mathcal{G}* y será denotado por $\mathcal{V}(\mathcal{G}) = M$.

Notemos que el primer número de Betti de $\mathcal{G} = (V, E, W_v, W_e)$ está denotado por $b_1(\mathcal{G})$ y dado por $b_1(\mathcal{G}) = 1 - V + E$. Ahora, si denotamos por \mathcal{M}_n a la suma conexa de n copias de $S^1 \times S^2$, con $\mathcal{M}_0 = S^3$ por convención, entonces tenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.2 ([11]). *Cualquier grafo bipartito $\mathcal{G} = (V, E, W_v, W_e)$ es realizable por una aplicación $f \in \mathcal{E}(\mathcal{M}_n, \mathbb{R}^3)$ si, y solo si,*

$$W_v + 1 - V + E \leq b_2(\mathcal{M}_n) \leq W_v + W_e + 1 - V + E,$$

donde $b_2(\mathcal{M}_n)$ es el segundo número de Betti de \mathcal{M}_n . Además, la igualdad se alcanza cuando $W_e = 0$.

En la Figura 7 presentamos dos ejemplos del conjunto de ramificación de las aplicaciones estables f_1 y f_2 de S^3 en \mathbb{R}^3 y dos ejemplos de aplicaciones estables g_1 y g_2 de $S^1 \times S^2$ en \mathbb{R}^3 con sus respectivos grafos asociados, donde f_1 corresponde a una aplicación con un conjunto de ramificación homeomorfa a tres esferas formada solo por puntos de pliegue. Así, su grafo asociado tiene tres aristas con todos los pesos igual a cero en aristas y vértices. En f_2 tenemos una aplicación con un conjunto de ramificación homeomorfa a tres esferas, dos de ellas con una curva cúspidal envuelta por la tercera formada solo por puntos de pliegue; así, su grafo asociado tiene tres aristas con todos los pesos igual a cero en aristas y vértices, pero distinta a la de f_1 . En g_1 tenemos una aplicación con un conjunto de ramificación formada por dos superficies, una de ellas homeomorfa a un toro y la otra que está por dentro es homeomorfa a una esfera. Así, su grafo asociado formado por dos aristas, una arista con peso 1 y los demás pesos igual a cero. Finalmente, en g_2 tenemos una aplicación con un conjunto de ramificación formado por tres superficies una de ellas homeomorfa a un toro y las otras dos homeomorfas a una esfera. Así, su grafo asociado tiene tres arista con peso 1 y los demás pesos igual a cero.

En adelante, cada vez que hablemos de grafos estaremos haciendo referencia a los grafos con pesos no negativos en los vértices y aristas.

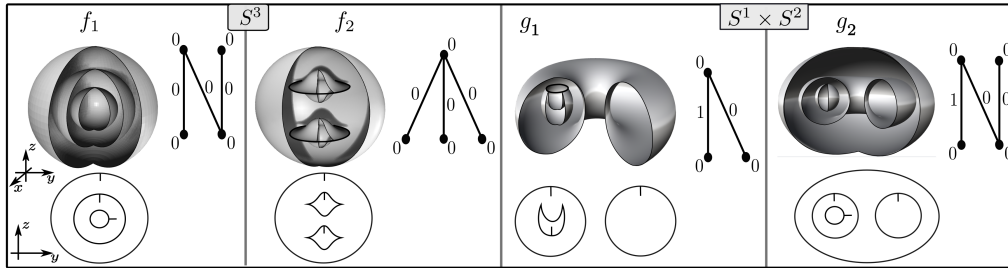


Figura 7. Ejemplos de grafos de aplicaciones estables.

3.3. Cirugía entre aplicaciones estables con \mathcal{G} -grafo

Presentamos aquí dos tipos de cirugía entre aplicaciones de 3-variedades en \mathbb{R}^3 y sus efectos en su grafo asociado \mathcal{G} , que denominaremos *cirugía horizontal* y *cirugía vertical*, para más detalles revisar [10], [11].

Cirugía horizontal entre aplicaciones:

Dadas dos aplicaciones estables $f \in \mathcal{E}(M, \mathbb{R}^3)$ y $f' \in \mathcal{E}(M', \mathbb{R}^3)$, donde M y M' son 3-variedades, llamaremos *cirugía horizontal* entre las aplicaciones f y f' , a la aplicación $f_{\mathbb{S}_h} f' : M \# M' \rightarrow \mathbb{R}^3$, construida como sigue: comenzamos removiendo dos 3-bolas B_1 y B_2 en M y M' , respectivamente, tales que sus intersecciones con el conjunto singular de f y f' son dos discos D_1 y D_2 de puntos de pliegue (no interceptan curvas cuspidales o curvas de pliegues dobles). Después, conectamos las variedades M y M' en ∂B_1 y ∂B_2 por un tubo $S^2 \times I$ (donde D_1 y D_2 son unidos por un tubo $S^1 \times I$). La proyección en \mathbb{R}^3 de este tubo no interseca parte alguna del conjunto de ramificación. El conjunto de ramificación de la aplicación resultante es la suma conexa de los conjuntos de ramificación de f y f' .

Si la cirugía horizontal se realiza en la misma aplicación f , entonces se realiza de manera similar como fue definida $f_{\mathbb{S}_h} f'$ (con la diferencia que las 3-bolas B_1 y B_2 removidas pertenecen solo a M) y el resultado de esta cirugía está denotado y dado por la aplicación $\mathbb{S}_h(f) : M \# (S^1 \times S^2) \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Además, el grafo asociado a $f_{\mathbb{S}_h} f'$ y $\mathbb{S}_h(f)$ será denotado por $\mathcal{G}_{\mathbb{S}_v} \mathcal{G}'$ y $\mathbb{S}_h(\mathcal{G})$ respectivamente, donde \mathcal{G} y \mathcal{G}' son los grafos asociados a las aplicaciones f y f' .

Observación 3.3. Consideremos \mathcal{G} y \mathcal{G}' los grafos asociados a las aplicaciones f y f' , respectivamente. El efecto de esta cirugía sobre estos grafos es como en la Figura 8(a). Observemos que la cirugía horizontal entre aplicaciones induce una cirugía entre los conjuntos singulares (que no es nada más que la suma conexa de superficies) la cual resulta una superficie con género igual a la suma de las dos superficies involucradas; lo que implica que, si la cirugía se realiza en las superficies S_i y S_j asociadas a la i -ésima y j -ésima aristas de \mathcal{G} y \mathcal{G}' , cuyos pesos son p_i y p_j , se tiene que $p_i \# p_j = p_i + p_j$ (puesto que $g(S_i \# S_j) = g(S_i) + g(S_j)$). Esto significa que, cuando se realiza la cirugía horizontal, el peso en las aristas se suman.

Por otro lado, el peso de los vértices también se suman pues, si M_i y M_j son las regiones correspondientes a dichos vértices cuyos pesos son c_i y c_j , siendo M_k la región resultante, tenemos $c_k = b_2(M_k) - s_k + 1 = b_2(M_i) + b_2(M_j) - (s_i + s_j - 1) + 1 = c_i + c_j$.

Cirugía vertical en aplicaciones:

Sea $f \in \mathcal{E}(M, \mathbb{R}^3)$ una aplicación, donde M es una 3-variedad. Remueva dos 3-bolas B_1 y B_2 en M en las regiones U_1 y U_2 , correspondientes a los vértices v_1 y v_2 , sin intersecar el conjunto singular Σf y tales que tengan la misma imagen en \mathbb{R}^3 , una de las regiones preservando orientación y la otra aplicada revertiendo orientación. Después, una los bordes $M \setminus B_1 \cup B_2$ por un tubo $S^2 \times I$, de forma que tengan una superficie S^2 como una superficie singular, que divide en dos partes iguales el tubo, cuyas imágenes coinciden cuando la aplicación es extendida sobre los mismos. Esta cirugía aumenta una esfera S^2 al conjunto singular, adyacente a las dos componentes del conjunto singular de la aplicación original, de donde las dos 3-bolas fueron retiradas aumentadas con parte del tubo. En el grafo corresponde a conectar una arista en los vértices v_1 y v_2 , llamaremos a la aplicación resultante de este proceso como la *cirugía vertical* de f y denotada por $\mathbb{S}_\nu(f)$, que está definida en la 3-variedad $(M)_\nu \simeq M \# (S^1 \times S^2)$. Las dos regiones involucradas (correspondientes a los vértices v_1 y v_2), después de la cirugía, tienen un nuevo generador del segundo grupo de homología H_2 , que es la S^2 adicionado al conjunto singular. Más los componentes regulares correspondientes, tienen una nueva superficie en el borde (la misma S^2); entonces, el peso no varía. Ahora, si \mathcal{G} es el grafo asociado a la aplicación f , entonces $\mathbb{S}_\nu(\mathcal{G})$ es el grafo asociado a las aplicación $\mathbb{S}_\nu(f)$. En la Figura 8 tenemos un esquema de esta cirugía.

Si $f' \in \mathcal{E}(M', \mathbb{R}^3)$, entonces la cirugía vertical entre dos aplicaciones se realiza de manera similar a como fue definida $\mathbb{S}_\nu(f)$ (con la diferencia que las 3-bolas B_1 y B_2 removidas pertenecen a M y a M' respectivamente) y el resultado de esta cirugía está denotada y dada por la aplicación $f_{\mathbb{S}_\nu} f' : M \# M' \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Además, el grafo asociado a $f_{\mathbb{S}_\nu} f'$ y $\mathbb{S}_\nu(f)$ será denotado por $\mathcal{G}_{\mathbb{S}_\nu} \mathcal{G}'$ y $\mathbb{S}_\nu(\mathcal{G})$ respectivamente, donde \mathcal{G} y \mathcal{G}' son los grafos asociados a las aplicaciones f y f' .

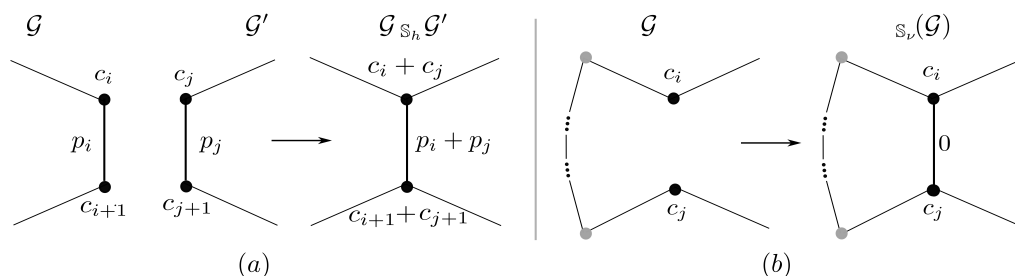


Figura 8. Cirugía $\mathcal{G}_{\mathbb{S}_\nu} \mathcal{G}'$ y $\mathbb{S}_\nu(\mathcal{G})$ de grafos.

La proposición siguiente se deduce inmediatamente de la definición de las cirugías en aplicaciones estables.

Proposición 3.4. *La aplicación resultante de una cirugía horizontal o cirugía vertical entre dos aplicaciones estables es otra aplicación estable, lo mismo ocurre para una cirugía horizontal y vertical sobre una misma aplicación estable.*

Ejemplo 3.5. En la Figura 9(a) se ilustra la cirugía horizontal entre dos aplicaciones idénticas $f \in \mathcal{E}(\mathcal{M}_1, \mathbb{R}^3)$ cuyo conjunto singular es homeomorfo a un toro formado solo por puntos de pliegue. Al realizar la cirugía obtenemos la aplicación $f_{\mathbb{S}_h} f \in \mathcal{E}(\mathcal{M}_2, \mathbb{R}^3)$ cuyo conjunto singular es homeomorfo a un bitoro, donde su grafo asociado tiene una arista y peso 0 en sus vértices y peso 2 en su arista, el cual es resultado de la cirugía horizontal realizada. Por otra parte, en la Figura 9(b) se ilustra la cirugía vertical en la misma aplicación $g \in \mathcal{E}(S^3, \mathbb{R}^3)$ cuyo conjunto singular es homeomorfo a una esfera formada solo por puntos de pliegue. Al realizar la cirugía obtenemos la aplicación $\mathbb{S}_\nu(g) \in \mathcal{E}(\mathcal{M}_1, \mathbb{R}^3)$ cuyo conjunto singular está formado por dos superficies homeomorfas a una esfera, donde su grafo asociado es un ciclo con dos aristas y pesos cero en vértices y aristas.

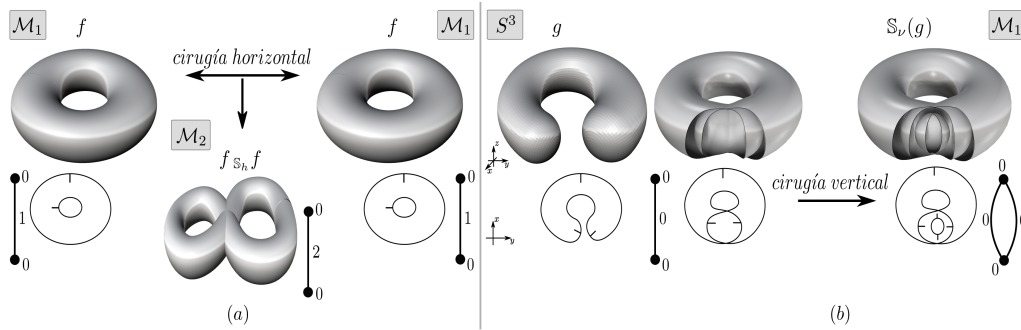


Figura 9. Ejemplo de cirugía vertical en el \mathcal{G} -grafo de $f \in \mathcal{E}(S^3, \mathbb{R}^3)$.

Observación 3.6. Sean $\mathcal{G} = (V, E, W_v, W_e)$ y $\mathcal{G}' = (V', E', W_{v'}, W_{e'})$ los grafos asociados a las aplicaciones $f \in \mathcal{E}(M, \mathbb{R}^3)$ y $f' \in \mathcal{E}(M', \mathbb{R}^3)$, respectivamente. Entonces la cirugía horizontal y vertical entre estas dos aplicaciones inducen cirugías entre sus grafos asociados como en la Figura 8(a) y cuyos efectos en la notación del grafo es como sigue:

- $\mathcal{G}_{\mathbb{S}_h} \mathcal{G}' = (V + V' - 2, E + E' - 1, W_v + W_{v'}, W_e + W_{e'})$,
- $\mathcal{G}_{\mathbb{S}_\nu} \mathcal{G}' = (V + V', E + E' + 1, W_v + W_{v'}, W_e + W_{e'})$.

Las cirugías vertical y horizontal realizadas en una misma aplicación inducen cirugías en su grafo asociado como en la Figura 8(b) y cuyos efectos en la notación del grafo es como sigue:

- $\mathbb{S}_h(\mathcal{G}) = (V - 2, E - 1, W_v + W_{v'}, W_e + W_{e'})$,
- $\mathbb{S}_\nu(\mathcal{G}) = (V, E + 1, W_v + W_{v'}, W_e + W_{e'})$.

Ejemplo 3.7. Sean $i_0, j_0, k_0 \in \mathcal{E}(S^3, \mathbb{R}^3)$ y $j_1, \ell_1 \in \mathcal{E}(S^1 \times S^2, \mathbb{R}^3)$, cuyas superficies en la Figura 10 son sus conjuntos de ramificación, junto con sus respectivo grafos asociados. Mas precisamente:

- i_0 : Es una aplicación con un conjunto de ramificación que es una superficie homeomorfa a una esfera, formada por puntos pliegue; así, su grafo asociado es $\mathcal{I}_0 = (2, 1, 0, 0)$.
- j_0 : Es una aplicación con un conjunto de ramificación dado por una superficie homeomorfa a un toro que tiene tres curvas cuspidales; así, su grafo asociado es $\mathcal{J}_0 = (2, 1, 0, 1)$.
- κ_0 : Es una aplicación con un conjunto de ramificación dado por dos superficies homeomorfas a una esfera y una de ellas tiene una curva cuspidal; así, su grafo asociado es $\mathcal{K}_0 = (3, 2, 0, 0)$.
- j_1 : Es una aplicación con un conjunto de ramificación dado por una una superficie homeomorfa a un toro formada solo por puntos pliegue; así, su grafo asociado es $\mathcal{J}_1 = (2, 1, 0, 1)$.
- ℓ_1 : Es una aplicación con un conjunto de ramificación dado por una superficie homeomorfa a una esfera la cual tiene un eje cuspidal; así, su grafo asociado es $\mathcal{L}_1 = (2, 1, 1, 0)$.

Notemos que los grafos \mathcal{J}_0 son idénticos a \mathcal{J}_1 como grafos, lo único que les diferencia es que están asociados a aplicaciones donde sus dominios son distintos. De esta forma los sub-índices en cada grafo representa el número de Betti de su 3-variedad asociada, pues $b_2(\mathcal{V}(\mathcal{I}_0)) = b_2(\mathcal{V}(\mathcal{J}_0)) = b_2(\mathcal{V}(\mathcal{K}_0)) = b_2(S^3) = 0$ y $b_2(\mathcal{V}(\mathcal{J}_1)) = b_2(\mathcal{V}(\mathcal{L}_1)) = b_2(S^1 \times S^2) = 1$.

También tenemos que $\mathcal{I}_0, \mathcal{J}_0, \mathcal{K}_0, \mathcal{J}_1$ y \mathcal{L}_1 representan a un único grafo.

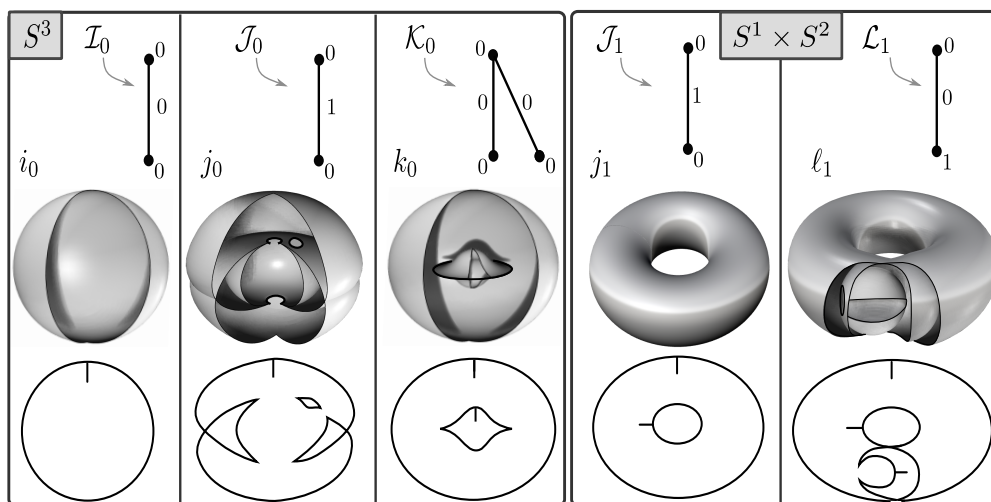


Figura 10. Grafos básicos de las aplicaciones en $\mathcal{E}(\mathcal{M}_n, \mathbb{R}^3)$.

Definición 3.8. Las aplicaciones $i_0, j_0, k_0 \in \mathcal{E}(S^3, \mathbb{R}^3)$ y $j_1, \ell_1 \in \mathcal{E}(S^1 \times S^2, \mathbb{R}^3)$ serán llamados *aplicaciones básicas* de $\mathcal{E}(\mathcal{M}_n, \mathbb{R}^3)$ y sus grafos asociados $\mathcal{I}_0, \mathcal{J}_0, \mathcal{K}_0, \mathcal{J}_1$ y \mathcal{L}_1 del Ejemplo 3.7, serán llamados *grafos básicos* para las aplicaciones de $\mathcal{E}(\mathcal{M}_n, \mathbb{R}^3)$, para n entero no negativo.

Observación 3.9. Observe que la aplicación f_1 de la Figura 7 es el resultado de la cirugía vertical de dos aplicaciones i_0 . Por tanto, f_1 puede ser expresado como: $f_1 = i_0 \mathfrak{s}_\nu i_0$. Así, las demás aplicaciones f_2, h_1 y h_2 de la Figura 7 también se pueden expresar como: $f_2 = \kappa_0 \mathfrak{s}_h \kappa_0$, $g_1 = j_0 \mathfrak{s}_h j_1$ y $g_2 = i_0 \mathfrak{s}_\nu j_1$; sus grafos asociados se obtienen naturalmente usando las cirugías ya introducidas. Por tanto, construir aplicaciones a partir de otras aplicaciones es equivalente a construir grafos a partir de los grafos asociados a las aplicaciones usando las cirugías respectivas. Esta última observación será fundamental para probar resultados no triviales.

De esta forma es posible construir aplicaciones estables usando las aplicaciones básicas; equivalentemente, podemos construir aplicaciones usando solo los grafos básicos. Esto será útil para responder a la siguiente pregunta.

Pregunta: *¿Será posible que dado un grafo bipartito pesado cualesquiera, podemos construir una aplicación estable de una \mathcal{M}_n en \mathbb{R}^3 , tal que su grafo asociado sea exactamente el grafo dado, usando cirugías entre los grafos básicos y por ende las aplicaciones básicas?*

Esta pregunta será respondida afirmativamente más adelante, entre otras cuestiones, y además, solo serán necesarias la cirugía horizontal entre dos aplicaciones y la cirugía vertical en una misma aplicación. Por tal motivo en la siguiente sección usaremos los resultados introducidos en la primera sección; para ello consideremos lo siguiente:

Sea \mathbb{G}_F el conjunto de todos los grafos que son asociados a aplicaciones estables de \mathcal{M}_n a \mathbb{R}^3 , así tenemos que:

$$\mathbb{G}_F(\mathcal{M}_n, \mathbb{R}^3) := \{\mathcal{G}_f : f \in \mathcal{E}(\mathcal{M}_n, \mathbb{R}^3), n \in \mathbb{N}_0\}.$$

Ahora, podemos notar que el espacio $(\mathbb{G}, \oplus_h, \oplus_\nu)$ estudiado en la primera sección de este trabajo y el espacio $(\mathbb{G}_F(\mathcal{M}_n, \mathbb{R}^3), \mathfrak{s}_h, \mathfrak{s}_\nu)$ tienen mucho en común. Por ejemplo, las sumas horizontal y vertical en ambos espacios son iguales (esto es evidente pues basta ver como fueron construidos), así $\oplus_h = \mathfrak{s}_h$ y $\oplus_\nu = \mathfrak{s}_\nu$. De aquí en adelante, para reducir la notación, escribiremos $\mathbb{G} = (\mathbb{G}, \oplus_h, \oplus_\nu)$ y $\mathbb{G}_F(\mathcal{M}_n, \mathbb{R}^3) = (\mathbb{G}_F(\mathcal{M}_n, \mathbb{R}^3), \mathfrak{s}_h, \mathfrak{s}_\nu)$. Así, el siguiente teorema nos muestra la igualdad de ambos espacios.

Teorema 3.10. *El espacio $(\mathbb{G}, \oplus_h, \oplus_\nu)$ es igual a $(\mathbb{G}_F(\mathcal{M}_n, \mathbb{R}^3), \mathfrak{s}_h, \mathfrak{s}_\nu)$. Además, si $\mathcal{G} = (V, E, W_v, W_e) \in \mathbb{G}_F(\mathcal{M}_n, \mathbb{R}^3)$ e $\mathcal{I}_0, \mathcal{J}_0, \mathcal{K}_0, \mathcal{J}_1$ y \mathcal{L}_1 son los grafos básicos para las aplicaciones de $\mathcal{E}(\mathcal{M}_n, \mathbb{R}^3)$, $n \in \mathbb{N}_0$, entonces \mathcal{G} puede ser expresado*

$$\mathcal{G} = \oplus_\nu^{1-v+E} (\mathcal{I}_0 \oplus_h \mathcal{K}_0^{\oplus_h(V-2)} \oplus_h \mathcal{J}_i^{\oplus_h(W_e-\eta)} \oplus_h \mathcal{J}_i^{\oplus_h \eta} \oplus_h \mathcal{L}_1^{\oplus_h W_v}), \quad (2)$$

donde i puede tomar $i = 0, 1$ pues $\mathcal{J}_0 = \mathcal{J}_1$ como grafos y considerar $\oplus_h = \mathfrak{s}_h$ y $\oplus_\nu = \mathfrak{s}_\nu$.

Demostración. Mostremos que $\mathbb{G}_F(\mathcal{M}_n, \mathbb{R}^3) \subset \mathbb{G}$. Así, dado $\mathcal{G} \in \mathbb{G}_F(\mathcal{M}_n, \mathbb{R}^3)$, entonces por construcción \mathcal{G} es bipartito y con peso en las aristas y vértices por tanto $\mathcal{G} \in \mathbb{G}$. Ahora, para que $\mathbb{G} \subset \mathbb{G}_F(\mathcal{M}_n, \mathbb{R}^3)$, tomemos $\mathcal{G} = (V, E, W_v, W_e) \in \mathbb{G}$. Entonces mostremos que este grafo es un grafo realizable por una aplicación $f \in \mathcal{E}(\mathcal{M}_n, \mathbb{R}^3)$, luego $\mathcal{G} \in \mathbb{G}_F(\mathcal{M}_n, \mathbb{R}^3)$, y por la Proposición 2.12 tenemos que:

$$\mathcal{G} = \oplus_\nu^{1-v+E} (\mathcal{I} \oplus_h \mathcal{K}^{\oplus_h(V-2)} \oplus_h \mathcal{J}^{\oplus_h(W_e-\eta)} \oplus_h \mathcal{J}^{\oplus_h \eta} \oplus_h \mathcal{L}^{\oplus_h W_v}), \quad (3)$$

donde $\eta = \sum_{k=1}^{1-V+E} g_k$ y g_k es el peso de una arista en \mathcal{G} , de forma que si se retiran esas aristas el nuevo grafo obtenido es un árbol.

Como $\mathcal{I} = \mathcal{I}_0$, $\mathcal{J} = \mathcal{J}_0 = \mathcal{J}_1$, $\mathcal{K} = \mathcal{K}_0$ y $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1$, reemplazando estos grafos en 3 se tiene que:

$$\mathcal{G} = \oplus_{\nu}^{1-V+E} (\mathcal{I}_0 \oplus_h \mathcal{K}_0^{\oplus_h(V-2)} \oplus_h \mathcal{J}_i^{\oplus_h(W_e-\eta)} \oplus_h \mathcal{J}_i^{\oplus_h\eta} \oplus_h \mathcal{L}_1^{\oplus_h W_v}),$$

donde $i = 0$ ó $i = 1$.

✓

Corolario 3.11. Si $\mathcal{G} = (V, E, W_v, W_e) \in \mathbb{G}$, entonces existe una aplicación estable de \mathcal{M}_n en \mathbb{R}^3 tal que su grafo asociado coincide con \mathcal{G} , y una representación para el grafo esta dado por

$$\mathcal{G} = \oplus_{\nu}^{1-V+E} (\mathcal{I}_0 \oplus_h \mathcal{K}_0^{\oplus_h(V-2)} \oplus_h \mathcal{J}_i^{\oplus_h(W_e-\eta)} \oplus_h \mathcal{J}_i^{\oplus_h\eta} \oplus_h \mathcal{L}_1^{\oplus_h W_v}), \quad (4)$$

donde $i = 1, 0$ e $\mathcal{I}_0, \mathcal{J}_0, \mathcal{K}_0, \mathcal{J}_1$ y \mathcal{L}_1 son los grafos básicos para $\mathcal{E}(\mathcal{M}_n, \mathbb{R}^3)$.

Demostración. Es una consecuencia directa de la Proposición 2.12.

✓

Corolario 3.12. Si $\mathcal{G} = (V, E, 0, W_e) \in \mathbb{G}$ es un grafo árbol, entonces existe una aplicación estable de S^3 en \mathbb{R}^3 tal que su grafo asociado coincide con \mathcal{G} , y una representación para el grafo esta dado por

$$\mathcal{G} = \mathcal{I}_0 \oplus_h \mathcal{K}_0^{\oplus_h(E-1)} \oplus_h \mathcal{J}_0^{\oplus_h W_e},$$

donde $\mathcal{I}_0, \mathcal{J}_0$ y \mathcal{K}_0 son los grafos básicos para $\mathcal{E}(\mathcal{M}_n, \mathbb{R}^3)$.

Demostración. En general dado $\mathcal{G} = (V, E, W_v, W_e) \in \mathbb{G}$ por la ecuación (4) de la Proposición 2.12 se tiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &= \oplus_{\nu}^{1-V+E} (\mathcal{I}_0 \oplus_h \mathcal{K}_0^{\oplus_h(V-2)} \oplus_h \mathcal{J}_i^{\oplus_h(W_e-\eta)} \oplus_h \mathcal{J}_i^{\oplus_h\eta} \oplus_h \mathcal{L}_1^{\oplus_h W_v}) = (V, E, W_v, W_e), \\ &\text{Ahora, por hipótesis } W_v = 0, \text{ y } 1 - V + E = 0, \text{ ya que } \mathcal{G} \text{ es un árbol, así,} \\ &= \oplus_{\nu}^0 (\mathcal{I}_0 \oplus_h \mathcal{K}_0^{\oplus_h(V-2)} \oplus_h \mathcal{J}_i^{\oplus_h(W_e-\eta)} \oplus_h \mathcal{J}_i^{\oplus_h\eta} \oplus_h \mathcal{L}_1^{\oplus_h 0}), \\ &= \mathcal{I}_0 \oplus_h \mathcal{K}_0^{\oplus_h(V-2)} \oplus_h \mathcal{J}_i^{\oplus_h(W_e-\eta)} \oplus_h \mathcal{J}_i^{\oplus_h\eta} \oplus_h \mathcal{I}_0, \\ &= \mathcal{I}_0^{\oplus_h 2} \oplus_h \mathcal{K}_0^{\oplus_h(V-2)} \oplus_h \mathcal{J}_i^{\oplus_h(W_e-\eta+\eta)}, \text{ y como } 1 - V + E = 0 \text{ tenemos,} \\ &= \mathcal{I}_0 \oplus_h \mathcal{K}_0^{\oplus_h(E-1)} \oplus_h \mathcal{J}_i^{\oplus_h W_e}, \end{aligned}$$

donde $i = 1, 0$. Así, de la Proposición 3.4, se tiene que $\mathcal{G} = \mathcal{I}_0 \oplus_h \mathcal{K}_0^{\oplus_h(E-1)} \oplus_h \mathcal{J}_i^{\oplus_h W_e}$ es el grafo de una aplicación estable de S^3 en \mathbb{R}^3 , puesto que $\mathcal{I}_0, \mathcal{J}_i$ (cuando $i = 0$) y \mathcal{K}_0 son grafos de aplicaciones en $\mathcal{E}(S^3, \mathbb{R}^3)$.

✓

Observación 3.13. Sea \mathcal{G} el grafo asociado a la aplicación $f \in \mathcal{E}(M, \mathbb{R}^3)$. Recordemos que M es la 3-variedad asociada de \mathcal{G} y la denotamos por $\mathcal{V}(\mathcal{G}) = M$, y su relación con la suma horizontal y vertical entre grafos está dada por

$$\mathcal{V}(\mathcal{G} \oplus_h \mathcal{H}) = \mathcal{V}(\mathcal{G}) \# \mathcal{V}(\mathcal{H}) = M \# N, \quad \text{y} \quad \mathcal{V}(\oplus_{\nu}^k(\mathcal{G})) = \mathcal{V}(\mathcal{G}) \# \mathcal{M}_k,$$

donde $\#$ es la suma conexa entre dos variedades. Considerando los grafos básicos de $\mathcal{E}(\mathcal{M}_n, \mathbb{R}^3)$ dados por $\mathcal{I}_0, \mathcal{J}_0, \mathcal{K}_0, \mathcal{J}_1$ y \mathcal{L}_1 , con k entero no negativo, entonces

- $\mathcal{V}(\mathcal{I}_0^{\oplus_h k}) = \underbrace{\mathcal{V}(\mathcal{I}_0) \# \cdots \# \mathcal{V}(\mathcal{I}_0)}_{k\text{-veces}} = \underbrace{S^3 \# \cdots \# S^3}_{k\text{-veces}} = S^3.$
- $\mathcal{V}(\mathcal{J}_0^{\oplus_h k}) = \underbrace{\mathcal{V}(\mathcal{J}_0) \# \cdots \# \mathcal{V}(\mathcal{J}_0)}_{k\text{-veces}} = \underbrace{S^3 \# \cdots \# S^3}_{k\text{-veces}} = S^3.$
- $\mathcal{V}(\mathcal{K}_0^{\oplus_h k}) = \underbrace{\mathcal{V}(\mathcal{K}_0) \# \cdots \# \mathcal{V}(\mathcal{K}_0)}_{k\text{-veces}} = \underbrace{S^3 \# \cdots \# S^3}_{k\text{-veces}} = S^3.$
- $\mathcal{V}(\mathcal{J}_1^{\oplus_h k}) = \underbrace{\mathcal{V}(\mathcal{J}_1) \# \cdots \# \mathcal{V}(\mathcal{J}_1)}_{k\text{-veces}} = \underbrace{(S^1 \times S^2) \# \cdots \# (S^1 \times S^2)}_{k\text{-veces}} = \mathcal{M}_k.$
- $\mathcal{V}(\mathcal{L}_1^{\oplus_h k}) = \underbrace{\mathcal{V}(\mathcal{L}_1) \# \cdots \# \mathcal{V}(\mathcal{L}_1)}_{k\text{-veces}} = \underbrace{(S^1 \times S^2) \# \cdots \# (S^1 \times S^2)}_{k\text{-veces}} = \mathcal{M}_k.$
- $\mathcal{V}(\oplus_\nu^k(\mathcal{I}_0)) = \mathcal{V}(\oplus_\nu^k(\mathcal{J}_0)) = \mathcal{V}(\oplus_\nu^k(\mathcal{K}_0)) = \mathcal{M}_k, \quad \mathcal{V}(\oplus_\nu^k(\mathcal{J}_1)) = \mathcal{V}(\oplus_\nu^k(\mathcal{L}_1)) = \mathcal{M}_{k+1}.$

Proposición 3.14. *Sea $\mathcal{G}(V, E, W_v, W_e)$ un grafo en $\mathbb{G}_F(\mathcal{M}_n, \mathbb{R}^3)$. Entonces el mínimo y máximo valor que puede tomar $b_2(\mathcal{M}_n)$ es:*

$$\text{mín}\{b_2(\mathcal{M}_n)\} = W_v + 1 - V + E \quad y \quad \text{máx}\{b_2(\mathcal{M}_n)\} \leq W_v + W_e + 1 - V + E.$$

Demostración. Por el Teorema 3.10 tenemos que

$$\mathcal{G} = \oplus_\nu^{1-V+E} (\mathcal{I}_0 \oplus_h \mathcal{K}_0^{\oplus_h(V-2)} \oplus_h \mathcal{J}_i^{\oplus_h(W_e-\eta)} \oplus_h \mathcal{J}_i^{\oplus_h\eta} \oplus_h \mathcal{L}_1^{\oplus_h W_v}), \quad i = 0, 1.$$

Luego, si \mathcal{M}_n es la 3-variedad del dominio de la aplicación cuyo grafo es \mathcal{G} , entonces $b_2(\mathcal{V}(\mathcal{G})) = b_2(\mathcal{M}_n)$. Primero calculemos quien es \mathcal{M}_n por tanto:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_n &= \mathcal{V}(\mathcal{G}) = \mathcal{V}\left(\oplus_\nu^{1-V+E} (\mathcal{I}_0 \oplus_h \mathcal{K}_0^{\oplus_h(V-2)} \oplus_h \mathcal{J}_i^{\oplus_h(W_e-\eta)} \oplus_h \mathcal{J}_i^{\oplus_h\eta} \oplus_h \mathcal{L}_1^{\oplus_h W_v})\right), \\ &= \mathcal{V}(\mathcal{I}_0 \oplus_h \mathcal{K}_0^{\oplus_h(V-2)} \oplus_h \mathcal{J}_i^{\oplus_h(W_e-\eta)}) \# \mathcal{M}_{1-V+E} \# \mathcal{V}(\mathcal{J}_i^{\oplus_h\eta}) \# \mathcal{V}(\mathcal{L}_1^{\oplus_h W_v}), \\ &= \mathcal{V}(\mathcal{I}_0 \oplus_h \mathcal{K}_0^{\oplus_h(V-2)} \oplus_h \mathcal{J}_i^{\oplus_h(W_e-\eta)}) \# \mathcal{V}(\mathcal{J}_i^{\oplus_h\eta}) \# \mathcal{V}(\mathcal{L}_1^{\oplus_h W_v}) \# \mathcal{M}_{1-V+E}, \\ &= \mathcal{V}(\mathcal{I}_0) \# \mathcal{V}(\mathcal{K}_0^{\oplus_h(V-2)}) \# \mathcal{V}(\mathcal{J}_i^{\oplus_h(W_e-\eta)}) \# \mathcal{V}(\mathcal{J}_i^{\oplus_h\eta}) \# \mathcal{V}(\mathcal{L}_1^{\oplus_h W_v}) \# \mathcal{M}_{1-V+E}, \\ &= S^3 \# S^3 \# \mathcal{V}(\mathcal{J}_i^{\oplus_h(W_e-\eta+\eta)}) \# \mathcal{M}_{W_v} \# \mathcal{M}_{1-V+E}, \\ &= \mathcal{V}(\mathcal{J}_i^{\oplus_h W_e}) \# \mathcal{M}_{W_v+1-V+E}, \quad i = 0, 1. \end{aligned}$$

Por tanto, $b_2(\mathcal{M}_n) = b_2(\mathcal{V}(\mathcal{J}_i^{\oplus_h W_e}) \# \mathcal{M}_{W_v+1-V+E})$ y vemos que el mínimo valor de $b_2(\mathcal{M}_n)$ se da cuando $i = 0$ pues es cuando $\mathcal{J}_i = \mathcal{J}_0$ y no aporta en nada al número de Betti de \mathcal{M}_n pues $\mathcal{V}(\mathcal{J}_0) = S^3$. Así,

$$\text{mín}\{b_2(\mathcal{M}_n)\} = b_2(\mathcal{V}(\mathcal{J}_0^{\oplus_h W_e}) \# \mathcal{M}_{W_v+1-V+E}) = b_2(S^3 \# \mathcal{M}_{W_v+1-V+E}) = W_v + 1 - V + E.$$

De manera análoga, el valor más alto que puede tomar $b_2(\mathcal{M}_n)$ está acotado por

$$b_2(\mathcal{M}_n) = b_2(\mathcal{V}(\mathcal{J}_i^{\oplus_h W_e}) \# \mathcal{M}_{W_v+1-V+E}), \quad \text{cuando } i = 1, \text{ luego}$$

$$\begin{aligned} \max(b_2(\mathcal{M}_n)) &\leq b_2(\mathcal{V}(\mathcal{J}_1^{\oplus h} W_e) \# \mathcal{M}_{W_v+1-V+E}), \\ &= b_2(\mathcal{M}_{W_e} \# \mathcal{M}_{W_v+1-V+E}), \\ &= b_2(\mathcal{M}_{W_e+W_v+1-V+E}) = W_e + W_v + 1 - V + E, \end{aligned}$$

con lo cual terminamos la demostración. \square

Corolario 3.15. *Sea $\mathcal{G}(V, E, W_v, W_e)$ un grafo árbol en $\mathbb{G}_F(\mathcal{M}_n, \mathbb{R}^3)$. Entonces el mínimo y máximo valor que puede tomar $b_2(\mathcal{M}_n)$ está dado por:*

$$\min\{b_2(\mathcal{M}_n)\} = W_v \quad \text{y} \quad \max\{b_2(\mathcal{M}_n)\} \leq W_v + W_e.$$

Demostración. Es inmediato de la Proposición 3.14 y teniendo en cuenta que en un grafo árbol se verifica que $1 - V + E = 0$. \square

Como aplicación de la construcción de aplicaciones estables en $\mathcal{E}(\mathcal{M}_n, \mathbb{R}^3)$ usando cirugías y grafos básicos introducidos en este trabajo daremos otra demostración al Teorema 5.1 de [11].

Teorema 3.16. [11] *Cualquier grafo bipartito $\mathcal{G}(V, E, W_v, W_e)$ es realizable por una aplicación $f \in \mathcal{E}(\mathcal{M}_n, \mathbb{R}^3)$ si, y solo si,*

$$W_v + 1 - V + E \leq b_2(\mathcal{M}_n) \leq W_v + W_e + 1 - V + E, \tag{5}$$

donde $b_2(\mathcal{M}_n)$ es el segundo número de Betti de \mathcal{M}_n . Además, la igualdad se alcanza cuando $W_e = 0$.

Demostración. Como $\min\{b_2(\mathcal{M}_n)\} \leq b_2(\mathcal{M}_n) \leq \max\{b_2(\mathcal{M}_n)\}$, la necesidad viene directamente de la Proposición 3.14, y la suficiencia viene del Teorema 3.10. \square

4. Conclusiones

El estudio del espacio de los grafos pesados, junto con operaciones entre ellas, se puede hacer de forma independiente, los resultados obtenidos pueden ayudar a comprender mejor ciertas estructuras matemáticas.

Se puede estudiar los grafos pesados analizando los grafos asociados a aplicaciones estables de 3-variedades en \mathbb{R}^3 . La intención de este trabajo es presentar de forma independiente el estudio de estos grafos.

Este trabajo puede ayudar al lector en la construcción de aplicaciones estables de 3-variedades en \mathbb{R}^3 , con un conjunto singular predeterminado, que en general no es trivial.

El Teorema 3.16 está enunciado y probado en [11]. La prueba que presentan los autores en dicho artículo hace uso de resultados de Topología Algebraica, Homología, entre otros. En este trabajo sólo usamos las cirugías entre aplicaciones estables, que introducen los mismos autores en su artículo.

Es posible establecer la igualdad en la ecuación (5) del Teorema 3.16 sin que W_e sea necesariamente cero. Este importante resultado está siendo estudiado por los autores.

Referencias

- [1] Gibson C.G., *Singular points of smooth mappings*, Research Notes in Mathematics, vol. 25, Boston, 1978.
- [2] Goryunov V., “Local invariants of maps between 3-manifolds”, *J. Topol.*, 6 (2013), No. 3, 1-20. doi: 10.1112/jtopol/jtt015
- [3] Hacon D., Mendes de Jesus C. and Romero Fuster M.C., “Stable maps from surfaces to the plane with prescribed branching data”, *Topology Appl.*, 154 (2007), No. 1, 166-175. doi: 10.1016/j.topol.2006.04.005
- [4] Hacon D., Mendes de Jesus C. and Romero Fuster M.C., “Topological invariants of stable maps from a surface to the plane from a global viewpoint”, in *Real and complex singularities*, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 232 (2003), 227-235, Dekker, New York.
- [5] Huamaní N.B., *Grafos asociados às aplicações estáveis de 3-variedades fechadas e orientadas no \mathbb{R}^3* , Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, 2016.
- [6] Huamaní N.B., Mendes de Jesus C. and Palacios J., “Invariants of stable maps from the 3-sphere to the Euclidean 3-space.”, *Bull. Braz. Math. Soc.*, New Series, 50 (2019), No. 4, 913-932. doi: 10.1007/s00574-019-00133-4
- [7] Marar W.L. and Tari F., “ On the geometry of simple germs of co-rank 1 maps from \mathbb{R}^3 to \mathbb{R}^3 ”, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 119 (1996), No. 3, 469-481. doi: 10.1017/S030500410007434X
- [8] Mather J.N., *Stability of C^∞ mappings. VI: The nice dimensions*, in *Proceedings of Liverpool Singularities-Symposium, I*, 192 (1969/70), 207-253, Lecture Notes in Math., Springer, Berlin.
- [9] Mendes de Jesus C., Oset Sinha R. and Romero Fuster M.C., “Global topological invariants of stable maps from 3-manifolds to \mathbb{R}^3 ”, *Proc. Steklov Inst. Math.* , 267 (2009), 205-216. doi: 10.1134/S0081543809040178
- [10] Oset Sinha R., *Topological invariants of stable maps from 3-manifolds to three-space.*, PhD Dissertation, Universidad de Valencia, Valencia, 2009.
- [11] Oset Sinha R. and Romero Fuster M.C., “Graphs of stable maps from 3-manifolds to 3-space”, *Mediterr. J. Math.*, 10 (2013), No. 2, 1107-1126. doi: 10.1007/s00009-012-0224-2