Normas que definen un producto escalar

EDILBERTO J. REYES G.*
Matemático. Universidad Nacional
Bogotá, Colombia

Generalmente la **NORMA** de los espacios que se mencionan en los primeros cursos en que se trata este concepto se obtiene de un **PRODUCTO ESCALAR** en el mismo espacio quedando la sensación de que siempre es así, lo que no es cierto.

En este artículo divulgativo se dan ejemplos de normas en un espacio X que no se obtienen de ningún producto escalar en X, y se establecen las condiciones necesarias y suficientes para que una norma se obtenga de un tal producto.

Comenzamos por recordar la noción de producto escalar y la norma inducida por él en el espacio $\mathbb{R}^n$ (caso conocido particularmente en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$).

En efecto, si $x = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $y = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ son elementos de $\mathbb{R}^n$, el número real

---

* Departamento de Matemáticas. Universidad Industrial de Santander. Bucaramanga, Colombia

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

Se denomina producto escalar de x por y, que notamos x.y. Para cada x,y,z en $\mathbb{R}^n$ y cada real α, este producto tiene las siguientes propiedades básicas

1. $x.x \geqslant 0$
   $x.x = 0$ si y solo si $x = 0$
2. $\alpha x. y = \alpha(x.y) = x.\alpha y$
3. $x.y = y.x$
4. $(x + y) z = x.z + y.z$

Además si se define norma de x notada $\|x\|$ por

$$\| x \| = (x.x)^{1/2} \quad (\| x \|^2 = x.x)$$

Se puede como ejercicio mostrar usando las propiedades mencionadas del producto escalar y la famosa desigualdad de Schwartz* que la función que a cada x de $\mathbb{R}^n$ envía en $\| x \|$ efectivamente define una norma en $\mathbb{R}^n$. Tomando como básicas las propiedades del producto escalar en $\mathbb{R}^n$ generalizamos el concepto a cualquier espacio vectorial real**.

---

* La desigualdad de Schwartz puede enunciarse así:
Si $a_1, a_2, \dots a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ son 2n reales cualquiera entonces

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)$$

o más brevemente

$|x.y| \leqslant \|x\| \ \|y\|$ donde

$x = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ $y = (b_1, \dots, b_n)$

** En este artículo consideramos solamentes espacios vectoriales reales, si X es un Espacio Vectorial Complejo, «x escalarmente y» es un númer complejo y la condición P_2 se cambia por

$$P_2^1 : \langle x,y \rangle = \overline{\langle y,x \rangle} \quad \text{(conjugado de } \langle y,x \rangle)$$

Se puede verificar que si x,y son números complejos $\langle x,y \rangle = x.\bar{y}$ define un producto escalar en el conjunto de los números complejos.

Definición 1

Sea X un espacio vectorial real. Un producto escalar en X es una función que a cada par x,y de elementos de X le asigna un único número real notado $< x,x > \geqslant$

do $< x,x >$ y tal que para cada x,y,z en X y cada real α, se cumplen las siguientes propiedades:

$P_1 : < x,x > \geqslant 0$
$< x,x > = 0$ si y solo si $x = 0$

$P_2 : < x,y > = < y,x >$

$P_3 : < \alpha x,y > = \alpha < x,y >$

$P_4 : < x+y, z > = < x,z > + < y,z >$

$< x,y >$ lo leemos «x escalarmente y» o «x interiormente y» expresión que es usada en muchos textos ya que el producto escalr en X también se denomina producto interior o producto interno en el espacio vectorial X, para diferenciarlo del producto por un escalar (producto externo) que hay en X.

Además se llama Espacio Euclídeo o Espacio con producto escalar al par $(X, < , >)$ donde X es un espacio vectorial y $< , >$, un producto escalar en X. Más brevemente se habla del Espacio Euclídeo X cuando no hay confusión respecto al producto escalar definido en él.

De la definición se cumplen también las siguientes propiedades válidas para cada x,y,z en un Espacio Euclídeo X y cada real α

$P'_3 : < x, \alpha y > = \alpha < x,y >$

$P'_4 : < x, y+z > = < x,y > + < x,z >$

Las propiedades P_3 , P'_3 , P_4 , y P'_4 expresan abusando un poco del lenguaje que el producto escalar en un espacio vectorial real X, es lineal respecto a ambas componentes.

Igual que en $\mathbb{R}^n$ tenemos ahora la siguiente definición:

Definición 2:

Si X es un Espacio Euclídeo, para cada x en X, definimos Norma de x por

$$\|x\| = (< x,x >)^{1/2} \quad (\|x\|^2 = < x,x >)$$

Con la definición 2 todo espacio euclídeo es también un espacio Normado y por tanto un espacio métrico. Para verificarlo necesitamos mostrar que la desigualdad de Schwartz es válida en cualquier Espacio Euclídeo.

Proposición 1 (Desigualdad de Schwartz)

Si X es un Espacio Euclídeo, y $\|x\| = (< x,x >)^{1/2}$ entonces para cada x,y en X, se tiene que:

$$|< x,y >| \leqslant \|x\| \, \|y\|$$

Además la igualdad se cumple si y sólo sí x,y son linealmente dependientes.

En efecto, si α es un número real cualquiera, de las propiedades del producto escalar se tiene

$$0 \leqslant \|x - \alpha y\|^2 = < x - \alpha y , x - \alpha y >$$

$$= \|x\|^2 - 2 \alpha < x,y > + \alpha^2 \|y\|^2$$

$$\text{es decir } \|y\|^2 \alpha^2 - 2 < x,y > \alpha + \|x\|^2 \geqslant 0$$

que es una ecuación de segundo grado en α, no negativa para cualquier valor de α, lo que equivale a decir que su discriminante será menor o igual a cero, o sea

$$(2 < x,y >^2 - 4 \|x\|^2 \|y\|^2 \leqslant 0$$

ó

$$(< x,y >)^2 \leqslant (\|x\| \, \|y\|)^2$$

es decir

$$|< x,y >| \leqslant \|x\| \, \|y\|$$

De (1) la igualdad se cumple sí y sólo sí $x - \alpha y = 0$ o es decir si y sólo si x,y son linealmente dependientes.

El lector interesado puede ahora sí verificar las dos proposiciones siguientes:

Proposición 2:

Si X es un espacio Euclídeo $\|x\| = (< x,x >)^{1/2}$ define efectivamente una norma en X y por lo tanto una noción de distancia en el mismo.

Proposición 3:

Si X es un espacio Euclídeo entonces

$$\|x + y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\,\|x\|^2 + 2\,\|y\|^2$$

para cada x,y en X.

La última igualdad se conoce con el nombre de identidad del Paralelogramo por su interpretación geométrica en $\mathbb{R}^2$ y la proposición 3 dice que es condición necesaria para que una norma en X se obtenga de un producto escalar o equivalentemente si una norma en un espacio X no cumple la identidad del paralelogramo no se puede obtener de un producto escalar en X.

Consideramos ahora algunos ejemplos:

Ejemplo 1:

Como anotamos al comienzo

Si $x = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ $y = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$

$< x,y > = \sum_{k=1}^{n} a_k\, b_k$, define un producto escalar en $\mathbb{R}^n$ y de la proposición 2

$$\|x\| = (< x,x >)^{1/2} = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{1/2}$$

define una norma en $\mathbb{R}^n$ que coincide con la conocida norma Euclidiana del mismo espacio.

Ejemplo 2:

Con la suma usual entre funciones y el producto usual de un real por una función el conjunto de todas las funciones contínuas de valor real definidas en un intervalo cerrado [a,b] es un espacio vectorial que notamos X.

Si f, g son elementos de X

$$< f,g > = \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx$$

define un producto escalar en X, de nuevo de la proposicion 2

$$\|f\| = (< f,f >)^{1/2} = \left(\int_a^b (f(x))^2 \, dx \right)^{1/2}$$

es una norma en X.

Ejemplo 3:

Usamos ahora la notación clásica del espacio vectorial real del ejemplo 2. Notamos C[0,1] al espacio vectorial de las funciones contínuas de [0,1] en $\mathbb{R}$ con la norma

$$\|f\| = \max_{x \in [0,1]} |f(x)|$$

Esta norma no se obtiene de ningún producto escalar en dicho espacio ya que si tomamos $f(x) = 1$, $g(x) = x$ que son elementos de C[0,1] tenemos

$$\|f\| = 1 \qquad \|g\| = 1$$
$$\|f + g\| = 2, \qquad \|f - g\| = 1$$
$$\|f + g\|^2 + \|f - g\|^2 = 5$$
$$2\|f\|^2 + 2\|g\|^2 = 4$$

es decir que la norma en C[0,1] no satisface la identidad del paralelogramo.

Los ejemplos 2 y 3 muestran que en un mismo espacio se pueden definir diferentes normas, algunas de las cuales no se obtienen de un producto escalar.

El siguiente ejemplo muestra un número infinito de normas que tampoco satisfacen la identidad del paralelogramo.

Ejemplo 4:

Notamos ℓp (p real, $p > 1$) al conjunto de todas las sucesiones $(x_n)_{n \in N}$ de números reales tales que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |xn|^p$ converge.

ℓp es un espacio vectorial con las operaciones suma y multiplicación por un real definidas como sigue:

Si $X = (x_n)_{n \in N}$ $Y = (y_n)_{n \in N}$ son elementos de ℓp y α es un real cualquiera

$$X + Y = (x_n + y_n)_{n \quad N} \text{ (definición suma)}$$

$$\alpha \,.\, X = (\alpha\, x_n)_{n \quad N} \text{ (multiplicación por el real } \alpha)$$

También ℓp $(p > 1)$ es un espacio normado con

$$\|X\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|_p \right)^{1/p}$$

Para p diferente de 2, la norma en ℓp no se obtiene de ningún producto escalar en el mismo ya que para

$$X = (1, 0,0 ,..., 0 ,...)$$
$$Y = (0, 1 ,..., 0 , ...)$$

que son elementos de ℓp tenemos:

$$\|X\| = , \quad \|Y\| = 1$$
$$\|X + Y\| = \|X - Y\| = 2^{1/p}$$

de donde

$$\|X + Y\|^2 + \|X - Y\|^2 = 2(2^{1/P})^2 = 2(4^{1/P})$$

$$2\,\|X\|^2 + 2\,\|Y\|^2 = 4$$

es decir para P diferente de 2 tenemos que

$$\|X + Y\|^2 + \|X - Y\|^2 \text{ es diferentes de } 2(\|X\|^2 + \|Y\|^2)$$

lo que queríamos ■

Por último mostramos que la condición necesaria de la proposición 3 también es condición suficiente para que la norma se obtenga de un producto escalar con lo que tenemos el siguiente resultado

TEOREMA. Si X es un espacio normado entonces X es un espacio Euclídeo sí y sólo sí para cada x,y en X

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \qquad (1)$$

Demostración

La condición (1) es necesaria según la proposición 3.

Como la demostración de que la condición dada es suficiente es laboriosa y un poco extensa indicamos a continuación solamente los pasos fundamentales que se deben seguir para lograrla.

Para cada x,y en X se define la función F por

$$F(x,y) = 1/4\ (\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$$

Debe mostrarse que la función F satisface las condiciones dadas en la definición del producto escalar verificando que tiene las siguientes propiedades

1) $F(x,x) \geqslant 0$ para cada x en X
2) $F(x,x) = 0$ sí y sólo sí $x = 0$
3) $F(x,y) = F(y,x)$ para cada x,y en X
4) $F(x+z,y) = F(x,y) + F(z,y)$ para cada x,y,z en X

Esta propiedad se demuestra de la definición de F y las propiedades de la norma verificando que para cada x,y,z en X la expresión

$$U(x,y.z) = 4\ [F(x + z,y) - F(x,y) - F(z,y)\ ]$$

es idénticamente nula.

5) $F(ax,y) = F(x,y)$ para cada x,y en X y cada real a.

Esta última propiedad se demuestra mediante un proceso constructivo (inductivo) usando la propiedad 3) y la definición de F misma, mostrando sucesivamente que para cada x,y en X, F satisface:

a) $F(0,y) = 0$
b) $F(nx,y) = n\ F(x,y)$ para cada natural n.
c) $F(-x,y) = -\ F(x,y)$
d) $F(nx,y) = n\ F(x,y)$ para cada entero n
e) $F(n/m\ x,y) = n/m\ F(x,y)$ para cada par de enteros n, m con m diferente de cero, es decir
   $F(rx,y) = r\ F(x,y)$ para cada número racional r.

Por último de la continuidad de F (por definición de F y la continuidad de la norma) y el hecho de que todo número real es el límite de una sucesión de números racionales debe verse que

f) $F(ax,y) = a\, F(x,y)$ para todo real a, con lo que termina la demostración. ●

Las propiedades 1), 2), 3) y 4f) muestran que F define un producto escalar en el espacio normado X, luego podemos escribir en términos de la norma que

$$< x,y > = F(x,y) = 1/4\, (\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) \qquad (*)$$

y concluir finalmente que: Toda norma en un espacio vectorial real que satisface la ley del paralelogramo induce (define) por (*) un producto escalar en el espacio X

BIBLIOGRAFIA

1) APOSTOL, T.M. Análisis Matemático. Editorial Reverté.

2) KREYSZIG, E. Introductory Funcional Analysis with Applications. Wiley International Editions.

3) KOLMONGOROV, A.N., FOMIN, S.V. Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcional. Editorial MIR, Moscú.

4) REYES EDILBERTO. Métricas que pueden inducirse por una Norma. Rev Integración, Vol. 2 No. 1, 1983.

Por último de la continuidad de F (por definición de F y la continuidad de la norma) y el hecho de que todo número real es el límite de una sucesión de números racionales debe verse que

f) $F(ax,y) = a\,F(x,y)$ para todo real a, con lo que termina la demostración.

●

Las propiedades 1), 2), 3) y 4f) muestran que F define un producto escalar en el espacio normado X, luego podemos escribir en términos de la norma que

$$< x,y > = F(x,y) = 1/4\,(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) \qquad (*)$$

y concluir finalmente que: Toda norma en un espacio vectorial real que satisface la ley del paralelogramo induce (define) por (*) un producto escalar en el espacio X

BIBLIOGRAFIA

1) APOSTOL, T.M. Análisis Matemático. Editorial Reverté.

2) KREYSZIG, E. Introductory Funcional Analysis with Applications. Wiley International Editions.

3) KOLMONGOROV, A.N., FOMIN, S.V. Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcional. Editorial MIR, Moscú.

4) REYES EDILBERTO. Métricas que pueden inducirse por una Norma. Rev Integración, Vol. 2 No. 1, 1983.