Una visión algebraica de los filtros

RAFAEL ISAACS G.*

Los filtros son entes interesantes que nos sirven tanto para introducirnos en el estudio de la continuidad, así como para definir los números no convencionales 1/. Nos interesa observarlos como una noción puramente algebraica a saber, los ideales de cierto anillo que se construirá.

Sea A un anillo con las operaciones + y . , I cualquier conjunto, A^I lo definimos como el conjunto de todas las funciones de I en A es decir

$$A^I = \{ f : I \rightarrow A \mid f \text{ es función} \}$$

además notaremos τ_i la imagen de $i \in I$ por medio de $\tau \in A^I$.

En A^I podemos definir una estructura de anillo con las siguientes operaciones heredadas de las de A. Si $\tau, \omega \in A^I$ definimos

* Profesor Asistente Departamento de Matemáticas. Universidad Industrial de Santander. Bucaramanga, Colombia.

$$(\tau + \omega)_i = \tau_i + \omega_i$$

$$(\tau \,.\, \omega)_i = \tau_i \,.\, \omega_i$$

Para el caso particular en que $A = \{ 0,1 \}$ con las operaciones corrientes es decir:

+	0	1
0	0	1
1	1	0

•	0	1
0	0	0
1	0	1

A^I está en correspondencia biunívoca con el conjunto $\mathcal{P}$ (I) de todos los subconjuntos de I. En efecto, hacemos:

$$\psi : A^I \to \mathcal{P}(I)$$

$$\tau \to \psi(\tau) \{ i \in I \,|\tau_i = 0 \,|$$

es fácil ver que ψ es una biyección con inversa ψ^{-1} definida así para todo $J \subseteq I$:

$$\psi^{-1}(J)_i = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i \notin J \\ 0 & \text{si} \quad i \in J \end{cases}$$

para todo $i \in I$.

Ahora bien, esta función nos sirve para asociar a P (I) una estructura de anillo isomoría a A^I. Si K y J son subconjuntos de I definimos

$$K + J = \psi(\psi^{-1}(K) + \psi^{-1}(J))$$

$$K \,.\, J = \psi(\psi^{-1}(K) \,.\, \psi^{-1}(J))$$

y estas operaciones definidas ahora en P (I) hacen que este conjunto tenga estructura de anillo. Pero, qué significan + y . en términos de las operaciones entre conjuntos? Veamos la siguiente proposición:

Proposición: Si K y J son subconjunto de I:

i) $K + J = (K \cap J) \cup (K^c \cup J^c)$

II) $K \,.\, J = K \cup J$

donde K^c es el complemento de K.

Demostración:

i) $K + J = \psi(\psi^{-1}(K) + \psi^{-1}(J)) = \{ i \in I \mid (\psi^{-1}(K) + \psi^{-1}(J))_i = 0 \}$
o sea que para que $i \in K+J$ se necesita y es suficiente que

$\psi^{-1}(K)_i + \psi^{-1}(J)_i = 0$

lo que significa que ambos sumandos deben ser 0, o ambos 1.

Si ambos son ceros:

$\psi^{-1}(K)_i = 0$ y $\psi^{-1}(J)_i = 0$

y por lo tanto $i \in K$ y $i \in J$ o sea $i \in J \cap K$

Si ambos son unos:

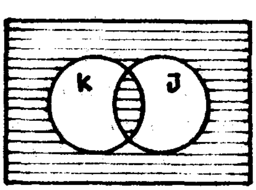
$\psi^{-1}(K)_i = 1$ y $\psi^{-1}(J)_i = 1$

se tiene que $i \notin J$ y $i \notin K$ por lo tanto $i \in K^c \cap J^c$

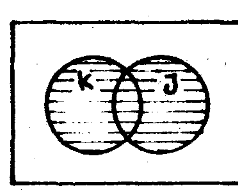
Como que $i \in K + J$ significaba que ambos sumandos o bien fueran 0, o bien fueran 1, esto significa que se debe tener que $i \in K \cap J$ o que $i \in K^c \cap J^c$ lo que hace que se tenga la igualdad i).

ii) $K . J = \{ i \in I \mid \psi^{-1}(J)_i = 0 \}$

lo que significa que para que $i \in K.J$ es necesario y suficiente que se cumpla $\psi^{-1}(K)_i = 0$, o bien, $\psi^{-1}(J)_i = 0$ incluyendo ambas o sea que i esté en la unión de J y K, por lo tanto se tiene ii).



K + J



K . J

Entendiendo estas «traducciones» para las operaciones en $P(I)$ nos queda fácil ver que:

1) El módulo de $+$ en P(I) es I.

2) Para cualquier $K \subseteq I$ se tiene $-K = K$

3) Todos los elementos de P(I) diferentes de ϕ tienen divisores de 0 (es decir de I) ya que
$J^c \leqslant K \Longrightarrow k \,.\, J = I$

4) Como cada elemento $K \in P(I)$ cumple $K^2 = K$, decimos que P(I) es un anillo de Boole.

5) ϕ es elemento unidad de la multiplicación para cualquier $J \in P(I)$

6) Si F es ideal de P(I) y $\phi \in F$ se tiene que $F = P(I)$

Con estos elementos podemos ver que los ideales del anillo construido P(I), diferentes del mismo P(I), coinciden exactamente con los posibles filtros de I según la definición clásica.

Proposición: Para que $\mathbb{F}$ sea ideal de P(I), diferente del mismo P(I) es necesario y suficiente que se cumpla las tres proposiciones:

1) $\phi \in \mathbb{F}$

2) $J, K \in \mathbb{F} \rightarrow \quad J \cap K \in\in \mathbb{F}$

3) $J \in \mathbb{F}\ K_{\varepsilon}\ P(I) \quad J \cup K \in \mathbb{F}$.

Demostración:

i) Necesidad. Si $\mathbb{F}$ es ideal de P(I) debe cumplir que i) si $J \in \mathbb{F}$ y $K \in \mathbb{F}$, entonces $J + K \in \mathbb{F}$ y; ii) Si $J \in \mathbb{F}$ y $K \in P(I)$ entonces $J \cup K \in \mathbb{F}$. La condición 3) está pues asegurada por ii). Ahora bien, si J y K son elementos de $\mathbb{F}, K^c$ será un elemento de P(I) y por ii) $J \cup K^c$ estará en $\mathbb{F}$ obligando a que

$$K + (J \cup K^c) = K \cap J$$

también esté en $\mathbb{F}$, obteniendo la condición 2).

La condición 1) la obtenemos al observar la 6) anterior a esta proposición.

ii) Suficiencia

Suponiendo que $\mathcal{F}$ cumple 1), 2) y 3) para ver que $\mathcal{F}$ es ideal basta ver que «Si K y J son elementos de $\mathcal{F}$, K+J también lo es; pero en estas condiciones $K^c \cap J^c$ es elemento de P(I) y aplicando 2) y 3) tenemos que

$$(K \cap J) \cup (K^c \cap J^c) = J+K$$

también pertenece a $\mathcal{F}$.

Que se cumpla 1) nos asegura que $\mathcal{F}$ es diferente de P(I), completando la demostración.

Por medio de esta proposición quedan entonces identificados los filtros de I con los ideales del anillo P(I), diferentes del propio P(I). Queda por resolver varias preguntas referentes al nuevo anillo cociente $P(I)/\mathcal{F}$ cuando $\mathcal{F}$ es un filtro.

REFERENCIAS

1) TAKEUCHI, YU. Representación de números no convencionantes mediante comportamientos asintóticos de funciones reales. Boletín de Matemáticas. Soc. Col. Mat., Vol. XII pág. 17.

2) KELLEY, JOHN. Topología general. Buenos Aires. Eudeba, 1962.

3) TAKEUCHI YU. una noción de filtros. Boletín de Matemáticas. Soc. Col. de Mat. y U. Nal. Vol. XII. pág. 223-233.

4) ASMAR ABRAHAM. Un tema de Algebra Elemental. Matemática Enseñanza Universitaria. No. 14. Bogotá, marzo 1980.