Un procedimiento para resolver algunas ecuaciones de quinto grado

EDUARDO MORENO BLANCO

Ingeniero Civil

Sea la función algebráica de grado n.

$$f(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + p_3 x^3 \; ... + p_n x_n = \sum_{r=0}^{n} p_r x^r \qquad [1]$$

En donde los coeficientes p_r son números reales conocidos.

Si hacemos dicha función nula decimos que es una ecuación y resolverla es hallar los valores de x que la satisfacen.

Revisando los procedimientos conocidos para resolver ecuaciones algebraicas hasta del 4°. grado, expresando las soluciones en función de los coeficientes pr, encontramos que el primer paso es la supresión del término de grado (n-1) mediante el cambio de variable $x = y + k$, en donde k es una constante que cumpla esta condición. Efectuando la sustitución indicada en la función general [1], es fácil comprobar que queda en esta forma:

$$F(y) = \sum_{r=0}^{n} \frac{f^r(k)}{r!} \cdot y^r = \sum_{r=0}^{n} Fr(k) \cdot y^r = 0 \qquad [2]$$

en donde $Fr(k) = \dfrac{f^r(k)}{r!}$, siendo $f^r(k)$ la erésima derivada de la función [1], reemplazando en ella a x por k. De la función [2] podemos suprimir cualquier término que queramos, asignándole a k el valor correspondiente para ello. El siguiente paso en las soluciones conocidas consiste en resolver, mediante algún artificio la ecuación [2] modificada, la cual llamaremos «auxiliar» y los de la ecuación original se obtiene simplemente de la ecuación $x = y + k$.

Apliquemos este procedimiento a la ecuación general de 5°. grado. Sea esta

$$f(x) = p_0 + p_1x + p_2x^2 + p_3x^3 + p_4x^4 + p_5x^5 = 0 \qquad [3]$$

lo cual sin perder generalidad, se puede dividir por $p_5 \neq 0$ y mediante el el cambio de variable indicado se transforma en:

$$F(y) = y^5 + py^3 + qy^2 + ry + s = 0 \qquad [4]$$

donde

$$k = \frac{p_4}{5!\,p_5},\; p = \frac{f'''(k)}{3!\,p_5},\; q = \frac{f''(k)}{2!\,p_5},\; r = \frac{f'(k)}{1!\,p_5},\; s = \frac{f(k)}{0!\,p_5}$$

La ecuación [4] se puede descomponer teóricamente en los factores

$$F(y) = (y^3 + ay^2 + by + c)(y^2 - ay + d) = 0 \qquad [5]$$

Por tanto, si logramos determinar los coeficientes a, b, c, d, el problema se reducirá a resolver ecuaciones de tercero y segundo grados, por los procedimientos conocidos y las soluciones de la ecuación [3] son las de la ecuación [5], agregándoles la constante $k = -\frac{p_4}{5!\,p_5}$:

Desarrollando el producto planteado en la ecuación [5] e igualando los coeficientes resultantes a los de la ecuación [4] se obtienen las siguientes relaciones:

$$b + d - a^2 = p \Rightarrow b + d = a^2+p \qquad [6]$$

$$c - a(b-d) = q \Rightarrow b - d = \frac{c-q}{a} \qquad [7]$$

$$bd - ac = r \Rightarrow bd = ac + r \qquad [8]$$

$$cd = s \qquad [9]$$

De [6] y [7] se consiguen

$$b = 1/2 \left[a^2 + p + \frac{c-q}{a}\right],\ d = 1/2 \left[a^2 + p - \frac{c-q}{a}\right] \qquad [10]$$

De las ecuaciones [8] y [9] obtenemos

$$b = \frac{a\,c + r}{s}\,.\,c \quad y \quad d = \frac{s}{c} \qquad [11]$$

Igualando [10] con [11] obtenemos las siguientes ecuaciones cuadráticas en c:

$$c^2 + \frac{2\,a\,r - s}{2a^2}\,c - \frac{s}{2a^2}\left[a\,(a^2 + p) - q\right] = 0 \qquad [12]$$

$$c^2 - [\,a(a^2 + p) + q]\,c + 2a\,s = 0$$

Igualando los coeficientes de estas dos ecuaciones se obtienen las siguientes relaciones:

$$5a^3 + pa - q = 0 \qquad [14]$$

$$a^5 + pa^3 + qa^2 + ra - 1/2\,s = 0 => F(a) = 1.5s \qquad [15]$$

La ecuación [14] nos permite hallar tres valores de a y la [15] sirve para verificar si alguno de estos valores permite hallar la solución de la ecuación auxiliar [4].

En resumen, el procedimiento antes descrito es el siguiente:

1) Dada para resolver la ecuación.

$$f(x) = p_0 + p_1x + p_2x^2 + p_3x^3 + p_4x^4 + p_5x^5 = 0$$

la transformamos en una ecuación auxiliar de la forma

$$F(y) = y^5 + py^3 + qy^2 + ry + s = 0$$

mediante el cambio de variable $x = y + k$, en donde

$$k = -\frac{p_4}{5\ p_5},\quad p = \frac{f'''(k)}{3!\ p_5},\quad g = \frac{f''(k)}{2!\ p_5},\quad r = \frac{f'(k)}{p_5},\quad s = \frac{f(k)}{p_5}$$

2) Para hallar las soluciones de la ecuación auxiliar resolvemos la ecuación

$$5a^3 + pa - q = 0$$

y vemos cual de estas soluciones satisface la condición

$$F(a) = 1.5\ s.$$

NOTA: Si ningún valor de a satisface, no es posible resolver la ecuación dada por este procedimiento.

Encontrando el valor de a que satisface las condiciones anteriores se resuelve la ecuación cuadrática

$$c^2 - [\,a(a^2 + p) + q]\ c + 2\,as = 0$$

y para cada una de estas soluciones hallamos

$$b = 1/2\left[a^2 + p + \frac{c - q}{a}\right]$$

$$d = 1/2\left[a^2 + p - \frac{c - q}{a}\right]$$

3) Con cada conjunto de valores (a, b, c, d) resolvemos las ecuaciones auxiliares

$$y^3 + ay^2 + by + c = 0$$

$$y^2 - ay + d = 0$$

4) Las soluciones de la ecuación dada se consigue con

$$x = y + k$$

EJEMPLO No. 1

Resolver $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 25x^2 + 6x - 30$

$$k = 1,\ s = -48,\ r = -44,\ q = -30,\ p = -5$$

Ecuación auxiliar $= F(y) = y^5 - 5y^3 - 30y^2 - 44y - 48 = 0$

Resolvemos: $5a^3 - 5a + 30 = 0$ $(a = -2,\ 1 \pm 2i)$

Aplicamos: $F(a) = -72$ y encontramos $a^2 = -2$

Resolvemos:

$$c^2 + 28c + 192 = 0$$

	$c = -16$	$c = -12$
	$b = -4$	$d = -5$
	$d = 3$	$d = 4$
Cúbica:	$y^3 - 2y^2 - 4y - 16 = 0$	$y^3 - 2y - 5y - 12 = 0$
Cuadrada:	$y^2 + 2y + 3 = 0$	$y^2 + 2y + 4 = 0$

SOLUCIONES

$y = 4; -1 \pm 3i$ $\quad$ $y = 4; -1 \pm 2i$

$y = -1 \pm 2i$ $\quad$ $y = -1 \pm 3i$

En ambos casos obtenemos de $x = y + 1$

$x = 5; \pm 3i; \pm 2i$ **(cuatro complejas, una real)**

EJEMPLO No. 2:

Resolver $\quad f(x) = x^5 - x^3 + 4x^2 - 3x + 2 = 0$

$k = 0, s = 2, r = -3, q = 4, p = -1$

Ecuación auxiliar: $F(y) = y^5 - y^3 + 4y^2 - 3y + 2 = 0$

Resolvamos: $5a^3 - a - 4 = 0$ $(a = 1; -\frac{1}{2} \pm 1.483297i; -\frac{1}{2} \pm 2{,}2i)$

Aplicamos $F(a) = 3$ y $a = 1$ la satisface.

Resolvemos: $c^2 - 4c + 4 = 0$ con solución repetida $c = 2, b = -1, d = 1$

Cúbica: $y^3 + y^2 - y + 2 = 0$ $(y = -2; \frac{1}{2}(1 \pm 3i)$

$y^2 - y + 1 = 0$ $\qquad$ $(y = \frac{1}{2}(1 \pm 3i)$

Como $k = 0$ estas son las soluciones de la ecuación dada (UNA REAL Y DOS COMPLEJAS REPETIDAS).

BIBLIOGRAFIA

Algebra Superior - HALL and KNICGT - McMillan Co.

Monographs and Topics of Modern Mathematics - J. W. Jones - DOVER Publis.

Higher Algebra - BARNAD and child - McMILLAN Co.