Desenvolvimiento cronológico de las diferentes teorías para buscar solución al «Problema de los cuatro colores»

LUIS ARIAS C*

INTRODUCCION

Todos hemos tenido la oportunidad de colorear mapas ya sea de un país o de todo un continente. Intentemos colorear un mapa una vez más, considerando que disponemos sólo de cuatro colores y distribuyéndolos de tal manera que dos regiones o países vecinos no coincidan en color, además si existe mar como frontera, este se convierte en una región más que debe cumplir todas las condiciones.

Sin proponernoslo directamente estamos actuando en el campo de la Geometría Combinatoria, utilizando uno de los problemas considerados en los últimos cien años como un reto a la humanidad.

* Profesor Titular Departamento de Sistemas. Universidad Industrial de Santander. Bucaramanga, Colombia.

DETALLES CRONOLOGICOS

A pesar de la sencillez del planteamiento no se conoce ciertamente quien fue su autor, sin embargo en trabajos presentados por Mobius y Euler en 1840 se plantea un problema similar.

FRANCIS GUTHRIE (1852), al terminar sus estudios en el Colegio Universitario de Londres, escribe a Frederick su hermano, quien era discípulo del matemático Augustus de Morgan: «Con cuatro colores es posible colorear quialquier mapa plano de tal forma que dos regiones contiguas tengan distinto color. Dos regiones son contiguas, si tienen uno o varios arcos de Jordan como frontera común». Ignorando Frederick la respuesta, pasó el problema a De Morgan quien a su vez lo trasmitió a W.R. Hamilton a quien invitaba a buscar un contraejemplo. De Morgan trató de demostrar que no se necesitan cinco colores para colorear un mapa, porque no es posible que en un mapa existan cinco países adyacentes. (Esto no prueba la teoría de los cuatro colores).

ARTHUR CAYLEY, (1878), Matemático; pionero de la teoría de Grafos, al no poder refutar o comprobar la conjetura de los cuatro colores, la presenta a la Sociedad Matemática de Londres. Cayley publicó un artículo sobre el problema en el primer volumen de «Proceedings of the Royal Geographical Society»

ALFRED BRAY KEMPE, (1879), publica un artículo e el que asegura haber demostrado la veracidad de la conjetura. A pesar del excelente razonamiento, la demostración resultó incompleta. Kempe trató de demostrar la conjetura empezando por introducir la noción de mapa normal. Un mapa es normal si ninguno de sus países encierra otros países y si además no existen más de tres países que tengan un punto común. Demostró que en todo mapa normal existe al menos un país con dos, tres, cuatro, cinco vecinos; nunca con seis, a esta configuración se le dio el nombre de INEVITABLE.

Otra noción que merece mencionarse ya que en ella se basan varias teorías es la de la «CONFIGURACION REDUCIBLE». Una configuración es reducible si por puro examen y del modo en que se alinean cadenas de países se puede mostrar que la configuración no forma parte de ningún mapa minimal pentacromático, (el mapa más pequeño que se puede colorear en cinco colores).

PETER GUTHRIE TAIT, (1880), físico matemático de la Universidad Edimburgo, da una demostración del problema, la que no tuvo mayor aceptación debido a que se basó en una condición no establecida en el problema original.

JOHN HEAWOOD, (1890), concluyó que la solución dada al problema por Kempe era incorrecta. Los mapas estudiados por Kempe eran trazados sobre superficies complicadas lo que le permitió usar un sofisticado razonamiento que lo llevó a encontrar una cota superior al número de colores necesarios para colorear mapas en tales superficies. Estableció los teoremas de los cinco, seis y siete colores.

GEORGE D. BIRKHOFF, (1913), de la Universidad de Harvard, mejoró la técnica de reducción de Kempe y demostró que ciertas configuraciones mayores que las de Kempe eran reducibles.

PHILIP FRANKLIN, (1922), del MIT basándose en los resultados de Birkhoff demostró que todo mapa que requiere cinco colores debe estar formado por veintidós países como mínimo, o sea que todo mapa con menos de 22 países es coloreable con cuatro colores.

C.N. REYNOLD, (1926), demuestra que un mapa puede ser tetracoloreable si posee menos de 28 países.

KUR GODEL y ALONZO CHURCH, Matemáticos; obtienen excelentes resultados en «Lógica Formal», (rama de las matemáticas donde el concepto de demostración matemática recibe su formulación más rigurosa) . Se demostró que en el mas natural de los sistemas lógicos, existen enunciados verdaderos cuya veracidad no puede ser demostrada dentro del mismo sistema. Además, el sistema contiene teoremas con enunciados relativamente breves, pero cuyas demostraciones son tan largas que sería imposible consignarlas en un período de tiempo razonable. Algunos matemáticos empezaron a considerar la conjetura imposible de demostrar o refutar ya que esta se había estudiado infructuosamente por más de ochenta años.

PHILIP FRANKLIN, (1936). Demuestra que un mapa planar de 36 países es tetracoloreable.

C.E. WINN, (1937), plantea algunos requerimientos estructurales más complejos sobre la no tetracoloración de mapas.

HEINRICH HEESCH, (1950), de la Universidad de Hannover, luego de trabajar catorce años en el problema, afirmó públicamente que la conjetura de los cuatro colores podría demostrarse hallando un conjunto inevitable de configuraciones reducibles. Estimó que las configuraciones reductibles del hipótètico conjunto inevitable sería de cierto tamaño y no arbitrariamente grande (su número sería del orden de 10.000) Heesch formalizó los métodos hasta entonces conocidos para la demostración de la reductibilidad de las configuraciones y observó que por lo menos una de ellas era en principio mecanizable, apto para encomendárselo a un Computador.

Heesch comenzó por transformar el mapa original en el grafo dual, e introdujo un nuevo método que se puede asimilar al desplazamiento de cargas eléctricas en una malla. El método de «descarga» que apareció en forma rudimentaria en los trabajos de Heesch, en forma más compleja llegó a convertirse en elemento central de la demostración que Appel y Haken dan más tarde al problema de los cuatro colores.

KARL DURRE, (1951), discípulo de Heesch preparó el programa para el computador, aplicando el principio de reductibilidad. Este programa fracasó para ciertas configuraciones, pero Heesch demostró, mediante datos generados por el programa y empleando la técnica de Birkhoff que consistía en transformar un mapa dado, en un grafo dual (los vértices se tomaban como capitales y los arcos entre vértices, las fronteras) que tales configuraciones eran reductibles.

H.S.M. COEXETER, (1959), cree que el teorema es falso y escribe: «Si hubiera de atreverme a emitir un veredicto, presumiría que puede existir un mapa que requiera cinco colores, si bien el más sencillo poseería tantas regiones (posiblemente centenares o millares) que nadie .... tendría la paciencia necesaria para efectuar las imprescindibles comprobaciones». En la clásica «Introduction to Geometry», dedica una sección al teorema encabezado por la siguiente cita:

> «Lo dudo dijo el Carpintero....
> y lloró de amargura».

Por esta época (1960), se consideraban conocidas todas las ideas relativas a la noción de reductibilidad necesarias para la demostración del problema de los cuatro colores.

J. STEMPLE y O. ORE, (1968), demuestran que para que un mapa sea tetracoloreable debe tener menos de cuarenta países.

WOLFGANG HAKEN, (1970), utiliza nuevos métodos para perfeccionar el proceso de descarga que lo condujera directamente a la demostración de la conjetura. Las dificultades para seguir con la demostración eran grandes, entre ellas se pueden mencionar; la creencia de que todo conjunto inevitable contendría configuraciones muy grandes y los computadores existentes no tenían la capacidad de almacenamiento requerida, ni la velocidad de procesamiento adecuada. Otra dificultad radicaba en el hecho de que nadie sabía cuantas configuraciones reducibles serían necesarias para disponer de un conjunto inevitable.

KENNETH APPEL y WOLFGANG HAKEN, (1972), se basaron en resultados obtenidos por Heesch y escribieron un programa para computador que realizara el tipo especial de proceso de descarga que les parecía más razonable. La salida del programa en lugar de ser un conjunto inevitable fue una lista de configuraciones que aparecían en los casos más importantes. El programa se preparó de tal manera que los resultados pudieran comprobarse manualmente.

Al final de este año ya poseían valiosa y abundante información, de donde dedujeron que cierto grupo de configuraciones se repetían frecuentemente, lo que hizo pensar que la lista de configuraciones no sería de tamaño excesivo.

APPEL y HAKEN se esfuerzan por mejorar su procedimiento logrando adelantos sustanciales y usando el diálogo entre hombre y máquina se convencieron de que el procedimiento les permitiría obtener un conjunto inevitable de configuraciones geográficamentae buenas.

APPEL y HAKEN, (1974), obtuvieron una laboriosa demostración de la existencia de un conjunto inevitable finito de configuraciones reducibles. Más tarde Walter Stromguist, estudiante de postgrado de la Universidad de Harvard, construyó una elegante demostración de existencia de conjuntos inevitables de configuraciones geográficamente buenas. Esta demostración pasó inadvertida, ya que no proporcionaba un método efectivo de construcción.

En 1975 se modifica el programa para producir configuraciones libres de obstáculos y verosímilmente reducibles. Se trabajó con el lenguaje assembler del IBM 360 de la Universidad de Illinois. A Appel y Haken se unió John Koch estudiante de postgrado en Informática, que deseaba preparar unos programas para una disertación acerca de la reductibilidad de configuraciones de tamaño anular pequeño. Para fines de 1975, Koch había preparado programas capaces de comprobar reductibilidad mecánica de configuraciones de tamaño anular máximo igual a 11.

En Junio (1976), se logró crear el conjunto de configuraciones inevitables reducibles, relajando una de las reglas que definían el proceso de descarga, con lo cual mejoró notablemente la eficiencia del proceso. El procedimiento era auto-modificante.

El teorema de los cuatro colores estaba demostrado según Appel y Haken. Para su demostración se utilizaron más de 1.200 horas de funcionamiento de tres computadores distintos. Se examinaron manualmente más de 10.000 entornos de vértices y mediante máquina más de 2.000 configuraciones. Gran parte de este material junto con la reducción de 1.482 configuraciones se utilizó en la demostración final.

El artículo en el cual se comprueba la conjetura apareció en el «Illinois Journal of Mathematics».

Los críticos comprobaron el procedimiento mediante las notas completas de los autores. Los cómputos de reductibilidad se comprobaron pasando un nuevo programa al computador.

La Universidad de Illinois, particularmente el Departamento de Matemáticas, autorizó un sello especial con el membrete «Cuatro colores bastan», en homenaje a la resolución del problema por dos de sus miembros.

Los comentarios y las reacciones suscitadas por la aparición del trabajo de Appel y Haken varían desde la completa incredulidad, pasando por una velada aceptación de la conjetura, hasta solicitar una comprobación manual de la demostración.

Los matemáticos formados antes de la aparición del Computador y aquellos poco familiarizados con su uso, se resisten a admitirlo como un instrumento matemático ordinario. Defienden que un razonamiento es débil cuando no es posible revisarlo en todo o en parte por cómputos manuales. La comprobación de resultados mediante programas de computador no es tan convincente como la comprobación directa de las demostraciones.

Si hay tantos matemáticos a los que desagradan las demostraciones largas, se debe a que se han acostumbrado a los métodos que producen demostraciones breves. «Abril 1980. Martin Gardner».

Thomas Tymocko en el artículo «The four color problem and its philosophical significance», publicado en febrero de 1979, sostiene: «Este tipo de enormes demostraciones conseguidas mediante computador introducen en las matemáticas elementos empíricos. Ningún matemático ha podido ver una demostración del teorema de los cuatro colores, ni nadie ha visto una demostración de que el trabajo de Haken y Appel sea verdaderamente una demostración. En cambio lo que los matemáticos han podido ver es un programa para atacar el problema mediante computador, más los resultados de un «experimento» realizado en un computador concreto».

Durante más de un siglo, los topólogos esperaron la construcción de un contraejemplo que terminara con la conjetura (un mapa complicado en extremo que necesitara cinco o más colores) o bien confiaron en que podría descubrirse una demostración sencilla y elegante. Aunque ahora se conoce que la conjetura es cierta, la demostración de Haken y Appel es considerada insatisfactoria y nadie puede decir que sea sencilla, bella o elegante ya que está enterrada bajo una montaña de impresos producidos por el computador después de 1.200 horas de funcionamiento. La verificación directa de la exactitud de estos resultados es tarea tan complicada que tan solo un pequeño número de especialistas ha tenido el tiempo, la entereza de ánimo y la capacidad necesaria para intentarlo. Todos los que lo han hecho así, han atestiguado la validez de la demostración.

Esta situación ha sido analizada por Benjamín Schwartz en el libro: «Mathematical games and Solitaires», en cuya introducción dice: «Podríamos preguntarnos ¿han demostrado verdaderamente Haken y Appel lo que afirman?... Personalmente opino que sí... pero el período de prueba aún no ha terminado.

Otros deben ir comprobando cada paso. Y dado que los pasos (casi todos) fueron realizados con muchos cientos de horas de funcionamiento de un computador rápido, la comprobación sería tarea gigantesca. En el momento de escribir, nadie la había realizado. Será necesario crear nuevos códigos de computador, quizá para modelos distintos. Comenzará a ceder la pertinaz resistencia de otros tenaces problemas matemáticos ante el nuevo método de ataque masivo por computador, o se trata de una chiripa que no tendrá consecuencias duraderas?. Esta demostración del teorema de los cuatro colores abre las puertas de una nueva era en matemáticas y nadie sabe a donde nos conducirá».

No hay forma de saber con certeza si se puede hallar una demostración sin utilizar computador. Si no existen demostraciones más sencillas, la demostración de Haken y Appel será algo enteramente nuevo por el grado en que dependede la tecnología del procesamiento de datos.

En poder de los escépticos y del juicio crítico de los matemáticos entá en aceptar como válida la demostración de Haken y Appel al problema de los cuatro colores. Si no es aceptada porque no es bella (usando colores), elegante y breve o porque es tedioso y largo el seguirla manualmente, sólo nos quedaç a los profanos dos caminos: Esperar que alguno de esos brillantes jóvenes universitarios dé una demostración sin usar computador y que cumpla con las cualidades exigidas (hasta ahora) a todo teorema, o catalogarlo como un elemento más en el conjunto abierto de los Indecidibles.

BIBLIOGRAFIA

1) INVESTIGACION Y CIENCIA. Diciembre 1977

2) CLIFFORD M. Applied Graph Theory

3) WALKER, W.A Graph Theory and Computing.

4) TUTTE. W.T: Non- Hamiltonian planar maps.

5) OYSTEERI & ORE. Teoría y Aplicaciones de Gráficos.

6) MONOGRAFIA No. 15 OEA. Introducción a la Teoría de Grafos.