Método de Graffe para la solución de ecuaciones polinómicas de grado superior a dos *

SERGIO GAMBOA S.**
Ingeniero Civil, Universidad Javeriana

IDEA DEL METODO

En una ecuación de segundo grado $x^2 + px + q = 0$, la suma de las raíces $x' + x'' = -p$ y su producto $x'x'' = q$; si una de estas, x' es mucho mayor que la otra x'', entonces x' es sensiblemente igual a $-p$ y por consiguiente x'' será sensiblemente igual a $-\frac{q}{p}$

Así por ejemplo la ecuación $x^2 - 100.01x + 1 = 0$ cuyas raíces son $x' = 100$ y $x'' = 0.01$ podemos decir que x' es sensiblemente igual a 100.01 y x'' es sensiblemente igual a $1/100.01 = 0.00999$ lo que da un error del 1%.

Sin embargo no todas las ecuaciones presentan raíces en las que su separación es muy grande, esto hace que el problema principal que habrá que resolver es el de determinar como habrá que transformar las ecuaciones propuestas para que tengan raíces cuyos valores absolutos muy diferentes entre sí.

* El trabajo aquí expuesto es parte del Curso que se dictó en Pamplona en el Primer Coloquio Regional de Matemáticas.

** Director Departamento de Matemáticas. Universidad Industrial de Santander. Bucaramanga, Colombia.

sean mucho mayores esas separaciones. También habrá que dar criterios que permitan diagnosticar la existencia de raíces complejas conjugadas: El método llamado de Graffe; (en realidad el primero que resolvió el problema fue Dandelin en 1826, posteriormente lo hicieron Lobachevki en 1834 y Graffe en 1837) da las normas para encotrar las ecuacioes transformadas cuyas raíces sean las potencias de 2, 4, 8, 16, 32, 64,... de las raíces de la ecuación dada, y luego enseña a calcular estas raíces, aún en el caso en que sean múltiples o complejas.

También habrá que dar criterios que permitan diagnosticar la existencia de raíces complejas conjugadas: El método llamado de Graffe; (en realidad el primero que resolvió el problema fue Dandelin en 1826, posteriormente lo hicieron Lobachevki en 1834 y Graffe en 1837) da las normas para encontrar las ecuaciones transformadas cuyas raíces sean las potencias de 2, 4, 8, 16, 32, 64,... de las raíces de la ecuación dada, y luego enseña a calcular estas raíces, aún en el caso en que sean múltiples o complejas.

FORMACION DE LAS ECUACIONES TRANSFORMADAS

Sea la ecuación $(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n) = 0$ cuyas raíces son $x_1, x_2 \ldots x_n$; consideremos la ecuación cuyas raíces sean $-x_1, -x_2, -x_3, \ldots -x_n$ $(x + x_1)(x + x_2) \ldots (x + x_n) = 0$. Si multiplicamos las dos ecuaciones obtendremos otra cuyas raíces sean $\pm x_1, \pm x_2, \ldots \pm x_n$ y el grado de la nueva ecuación será 2n.

Así:

$$(x^2 - x_1^2)(x^2 - x_2^2)(\ldots)(x^2 - x_n^2) = 0$$

En la que reemplazando a x^2 obtendremos una nueva ecuación con raíces $x_2^1, x_2^2, \ldots, x^2{}_n$ y grado n.

$$(y - x^2{}_1)(y - x^2{}_2)(\ldots)(y - x^2{}_n) = 0$$

ecuación que desarrollada da

$$y^n - b_1 y^{n-1} + b_2 y^{n-2} + \ldots + b_{n-1} y + b_n = 0$$

siendo la ecuación inicial

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0 \qquad [1]$$

en la que:

$b_1 \quad = a^2{}_1 - 2a_2$

$b_2 \quad = a^2{}_2 - 2a_1 a_3 + 2a_4$

$b_3 \quad = a^2{}_3 - 2a_2 a_4 + 2a_1 a - 2a$

.
.
.
.
.

$\vdots$

$b_{n-1} \quad = a^2_{n-1} - 2a_{n-2}\, a_n$

$b_n \quad = a_n$

Por consiguiente, a partir de la ecuación algebraica (1) de grano n, se construye otra (2) de grado n cuyas raíces son los cuadrados combinados de signo de las raíces de (1) en la que los coeficientes se forman de acuerdo a la siguiente regla:

Cada coeficiente b_i es igual al cuadrado del coeficiente a_i correspondiente al cual se le restan y suman los dobles productos de los coeficientes de a_i.

Este proceso se hace iterativo hasta que en los nuevos coeficientes no influyan los dobles productos.

Suspendida la operación se procede a determinar los valores aproximados de x_i así:

$$\Sigma Y_i \quad = b_1 - y_1 = b_1$$

$$\Sigma Y_i Y_j \quad = b_2 - y_1 y_2 = b_2 ; y_2 = \frac{b_2}{b_1}$$

igualemente resulta

$$Y_3 = \frac{b_3}{b_2} \quad Y_4 = \frac{b_4}{b_3}$$

de donde obtendremos:

$$|x_1| = \sqrt[n]{b_1}\,,\ |x_2| = \sqrt[n]{\frac{b_2}{b_1}}\,,\ |x_3| = \sqrt[n]{\frac{b_3}{b_2}}\,, \dots ,\ |x_n| = \sqrt[n]{\frac{b_n}{b_{n-1}}}$$

Ejempplo:

Resolver la ecuación:

$x^3 + x^2 - 2x - 1$ por el método de Graffe

1)	1	1	-2	-1
	1	1	4	1
		4	2	
2)	1	5	6	1
	1	25	36	1
		12	10	
4)	1	13	26	1
	1	169	676	1
		52	26	
8)	1	117	650	1
	1	13689	42250 (1)	1
		- 1300	- 23	
16)	1	12389	42227 (1)	1
32)	1	15399 (4)	17831 (7)	1
		84 (4)		
	1	15265 (4)	17831 (7)	1

Puede considerarse que los dobles productos no intervienen, por lo tanto se detiene el proceso.

La solución será:

$$|x_1| = \sqrt[32]{15265\,(4)} \approx 1.80194$$

$$|x_2| = \sqrt[32]{\frac{17831\,(7)}{15265\,(4)}} \approx 1.24698$$

$$|x_3| = \sqrt[32]{\frac{1}{17831\,(7)}} \approx 0.44504$$

La solución es:

$x_1 = -1.800916 \quad x_2 = 1.24692 \quad x_3 = -0.44501$

RAICES REPETIDAS (EN VALOR ABSOLUTO)

Consideremos una ecuación de tercer grado con $|x_1| = \alpha$, $|x_2| = |x_3| = \beta$, $\alpha > \beta$

La ecuación cuyas raíces son las enésimas potencias (cambiadas de signo) de estas raíces, o sea α^n, β^n, β^n será:

$y^3 + b_1 y^2 + b_2 y + b_3 = 0$ con

$b_1 = \alpha^n + 2\beta^n \cong \alpha^n$

$b_2 = \beta^{2n} + 2\alpha^n \beta^n \cong 2\alpha^n \beta^n$

$b_3 = \alpha^n \beta^{2n} = \alpha^n \beta^{2n}$

Por lo tanto la ecuación es:

$y^3 + \alpha^n y^2 + \alpha^n \beta^n y + \alpha^n \beta^{2n} = 0$

al transformar la presente ecuación obtenemos:

1	α^n	$2\alpha^n \beta^n$	$\alpha^n \cdot \beta^{2n}$
1	α^{2n} $-4\alpha^n \beta^n$	$4\alpha^{2n} \beta^{2n}$ $-2\alpha^{2n} \beta^{2n}$	$\alpha^{2n} \beta^{4n}$
1	$\cong \alpha^{2n}$	$2\alpha^{2n} \beta^{2n}$	$\alpha^{2n} \beta^{2n}$

Como puede observarse en la nueva ecuación transformada el coeficiente de y no se transforma como los otros, que aproximadamente son iguales al cuadrado del coeficiente correspondiente en la ecuación anterior, sino que solamente resultan la mitad de este cuadro. Este es el criterio que se utiliza para detectar una raíz (en valor absoluto) repetida.

Ejemplo:

Sea la ecuación:

$x^3 - 9x^2 + 24x - 20$

1)	1	− 9	24	− 20
	1	81 48	576 · 360	400
2)	1	33	216	400
	1	109 (1) · 43 (1)	467 (2) -264 (2)	160 (3)
	1	66 (1)	203 (2)	160 (3)
	1	4 (3) 41 (3)	412 (6) -211 (6)	256 (8)
8)	1	395 (3)	210 (6)	256 (8)
	1	156 (9)	404 (14) -202 (14)	655 (18)
16)	1	156 (9)	202 (14)	655 (18)

En el coeficiente de x se observa una raíz doble.

$$|x_1| = \sqrt{156(9)} = 5.0006 \quad |x_2| = \sqrt{\frac{655\,(18)}{156\,(9)}} = 1.998$$

Las soluciones exactas son 5, 2, 2 con un error inferior al 1.2%.

Consideremos una ecuación de cuarto grado con

$|x_1| = \alpha, |x_2| = |x_3| = |x_4| = \beta, \alpha \,_6\, \beta$

La ecuación cuyas raíces son las enésimas potencias (cambiadas de signo) de estas raíces o sea:

$\alpha^n \quad \beta^n, \beta^n, \beta^n$ será:

$y^4 + b_1 y^3 + b_2 2y^2 + b_3 y + b_4 = 0$ con

$b_1 = \alpha^n{}_{3n} + 3\beta^n \cong \alpha^n$

$b_2 = \beta + 3\alpha^n \beta^n \cong 3\alpha^n \beta^n$

$b_3 = 3\alpha^n \beta^{3n} + \beta^{3n} \cong 3\alpha^n \beta^{2n}$

$b_4 = \alpha^n \beta^{3n}$

Por lo tanto la ecuación será:

$y^4 + \alpha^n y^3 + 3\alpha^n \beta^n y^2 + 3\alpha^n \beta^{2n} y + \alpha^n \beta^{3n} = 0$

Al efectuar la siguiente transformación tenemos:

1	α^{2n}	$3\alpha^n \beta^n$	$3\alpha^n \beta^{2n}$	$\alpha^n \beta^{3n}$
1	α^{2n}	$9\alpha^{2n} \beta^{2n}$	$9\alpha^{2n} \beta^{4n}$	$\alpha^{2n} \beta^{6n}$
	$-6\alpha^n \beta^n$	$-6\alpha^{2n} \beta^{2n}$	$-6^{2n} \beta^{4n}$	
		$+ 2\alpha^n \beta^{3n}$		
1	α^{2n}	$3\alpha^{2n} \beta^{2n}$	$3\alpha^{2n} \beta^{4n}$	$\alpha^{2n} \beta^{6n}$

Se observa que en la nueva ecuación transformada los coeficientes y^2 y y son la tercera parte del valor esperado lo que implica que existe una raíz, en valor absoluto, repetida 3 veces.

Ejemplo: Sea la ecuación:

$x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 2 = 0$

1)	1	-1	-3	+1	+2
	1	1	9	1	4
		6	2	12	
			4		
2)	1	7	15	13	4
	1	49	225	169	16
		-30	-182	-120	
			8		
4)	1	19	51	49	16
	1	361	2601	2401	256
		-102	-1862	-1632	
			32		

8)	1	259	771	769	256
	1	67 (3) -1.5 (3)	594 (3) -398 (3)	581 (3) -395 (3)	65.5 (3)
16)	1	65.5 (3)	196 (3)	196 (3)	65.5 (3)
	1	429 (7) -392 (3)	384 (8) -257 (8) 131 (3)	384 (8) -257 (8)	429 (7)
32)	1	429 (7)	127 (8)	127 (8)	429 (7)

Puede observarse que los coeficientes de x^2, y x son iguales a la tercera parte del valor esperado (el cuadrado del coeficiente anterior) por lo tanto hay una raíz en valor absoluto repetida 3 veces.

$$|x_1| = \sqrt[32]{429\,(7)} = 1.999$$

$$|x_2| = |x_3| = |x_4| = \sqrt[96]{\frac{429\,(7)}{429\,(7)}} = 1$$

El error es menor del 1%.

CALCULO DE RAICES COMPLEJAS

Consideremos una ecuación de quinto grado con 3 raíces reales y dos raíces complejas; sean estas $x_2 = \delta e^{i\theta}$ y $x_3 = \delta e^{i\theta}$ y $|x_1| > |x_2| < |x_3|$.

La ecuación será:

$$(x - x_1)(x - \delta e^{i\theta})(x - \delta e^{-i\theta})(x - x_4)(x - x_5) = 0,$$

es decir la ecuación es:

$$x^5 + a_1 x^4 + a_2 x^3 + a_3 x^2 + a_4 x + a_5 = 0$$

y la correspondiente transformada será:

$$x^5 + b_1 x^4 + b_2 x^3 + b_3 x^2 + b_4 x + b_5 = 0$$

$$b_1 = \Sigma x_j^n \quad b_2 = \Sigma x_j^n x_k^n \ldots\ldots$$

dejando solamente los valores mayores tenemos:

$$x^5 + x_1^n x^4 + 2x_1 \delta^n \cos n\theta x^3 + x_1^n \delta^{2n} x^2 + x_1^n \delta^{2n} x_4^n x + x_1^n \delta^{2n} x_4^n x_5^n = 0$$

El coeficiente de x^3 posee el factor $\cos n\theta$, el que cambia de signo para diferentes valores de n lo que permite diagnosticar la existencia de raíces complejas.

las raíces serán:

$$|x_1| = \sqrt[n]{b_1}$$

$$|x_4| = \sqrt[n]{b^4/b^3 \delta^{2n}} = \frac{b^3}{b^1} ; \delta = \sqrt[2n]{b_3/b_1}$$

$$|x_5| = \sqrt{b^5/b^4}$$

Para determinar completamente las raíces complejas

$$x_2 = \delta e_i^{i\theta} \text{ y } x_3 = \delta e_i^{-i\theta}$$

$$x_2 = \alpha + \beta i \text{ y } x_3 = \alpha - \beta i$$

aplicamos las ecuaciones:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = -a_1$$

de esta ecuación se oobtiene α

$$x_1 + x_4 + x_5 + 2\alpha = -a_1$$

$$\alpha = \frac{-a_1 - x_1 - x_4 - x_5}{2}$$

Conocidos δ y α se obtiene β.

Ejemplo: Resolver la ecuación

$$x_3 = 2x^2 - 2 = 0$$

1)	1	-2	0	-2
	1	4 0	0 -8	4
2)	1	4	-8	4
	1	16 16	64 -32	16
4)	1	32	32	16
	1	1024 -64	1024 -1024	256
8)	1	960	0	256
	1	9216 (2) 0	0 -4915 (2)	-6554 (1)
16)		9216 (2)	-4915 (2)	654 (1)
	1	8492 (8)	2416 (8)	4295 (6)
32)	1	8493 (8)	1208 (8)	4295 (6)

Se observa que en la tercera columna hay fluctuación de signos lo que implica que hay un par de raíces complejas.

$$|x_1| = \sqrt[32]{8493\,(8)} \cong 2{,}3593$$

$$\delta = \sqrt[64]{\frac{4295\,(6)}{8493\,(8)}} \cong 0.9207$$

$$\delta^2 = 0.8477$$

$$\alpha = \frac{a_1 - x_1}{2} = \frac{2 - 2.3593}{2} = -0.17965$$

Las raíces complejas son:

$$x_2 = -\,0.179 \pm 0.920i$$

BIBLIOGRAFIA

1) SADOSKY, M. Cálculo Numérico y Gráfico. 1958

2) MIQUEL y MERINO. Elementos de Algebra Superior.