

David Hilbert (1862-1943) *

JEAN DIEUDONNE ·

Es un pasatiempo bastante pueril el pretender comparar a los sabios más eminentes de una misma época. ¿No es lo propio del genio escapar de toda regla y de toda comparación? ¿Y qué medida común se puede establecer entre dos resultados importantes que se encuentran ubicados, uno con respecto al otro, en las antípodas del vasto universo que constituye una ciencia como la matemática?. Sin embargo, cada tanto aparecen hombres en quienes la profundidad del pensamiento se suma a una universalidad sin par; parece que no pueden abordar un problema sin iluminarlo inmediatamente bajo un aspecto nuevo y el brillo de sus descubrimientos les confiere pronto una primacia intelectual reconocida por todos. Después de Gauss, el princeps mathematicorum por excelencia, Riemann tuvo esta supremacía, y después de éste, Poincaré. Desde la muerte de Poincaré, fue a Hilbert a quien correspondió, por consentimiento casi unánime, el centro de las matemáticas.

La vida de Hilbert es muy simple, como lo es a menudo la de un sabio ocupado ante todo por su obra, sobre todo si tiene la suerte de vivir y producir durante un período exento de grandes cataclismos sociales y políticos. Nacido en Koenigsberg en 1862 en el seno de una familia de la burguesía, Hilbert realizó la mayor parte de sus estudios en la universidad de esta ciudad, donde hizo su disertación inaugural en 1885, fue luego Privat-Dozent de 1886 a 1892 y

* Tomado del libro LAS GRANDES CORRIENTES DEL PENSAMIENTO MATEMATICO. F. Le Lionnais y Colaboradores.

profesor titular de 1893 a 1895. No revela en un principio gran precocidad y solamente en 1888 atrajo la atención del mundo científico por su primer gran trabajo sobre la teoría de invariantes.

Desde entonces los descubrimientos de primer orden se producen en rápida sucesión durante más de veinte años, lo que le valió un renombre mundial consagrado por el Congreso Internacional de Matemáticos de 1900. Numerosos alumnos, tanto alemanes como extranjeros, se agruparon a su alrededor en Gotinga donde fue profesor desde 1895. Terminó su carrera en esta universidad a la que convirtió en uno de los primeros centros matemáticos de Alemania y del mundo. Nunca quiso abandonarla y fue en Gotinga donde su vida se extinguió el 14 de febrero de 1943.

Lo que asombra a primera vista en los trabajos de Hilbert, es la belleza pura de su grandiosa arquitectura. No se trata de una impresión de «elegancia» superficial que resulta de cálculos hábilmente conducidos sino de una satisfacción estética mucho más profunda que se desprende de la perfecta armonía entre el fin perseguido y los medios puestos en el juego para alcanzarlo. Estos últimos son a menudo de una desconcertante simplicidad. Por lo habitual, no fue un perfeccionamiento aunque fuera ingenioso, de los métodos de sus antecesores, lo que permitió a Hilbert llegar a sus grandes descubrimientos, sino, por el contrario un retorno voluntario al origen de la cuestión tratada; así separaba de la ganga, donde nadie había sabido verlos, los principios fundamentales que permitían trazar la solución la «vía real» vanamente buscada hasta entonces.

Este rasgo aparece ya en los trabajos de Hilbert sobre la Teoría de los Invariantes. Nacida unos cuarenta años antes, era por esa época una de las ramas más en «boga» de las matemáticas, pero la abundante literatura que se le dedicaba se caracterizaba sobre todo por ser una masa amorfa de cálculos interminables de donde surgían con gran esfuerzo algunas ideas generales, muy insuficientes al parecer para permitir establecer las leyes universales cuya existencia se sospechaba, pero cuya validez sólo se sabía demostrar mediante razonamiento sumamente laboriosos en cada caso particular. Se comprende, por tanto, la sorpresa despertada en el mundo científico cuando en 1888 Hilbert demostró estos teoremas generales en pocas páginas y casi sin cálculos: «¡Esto ya no es matemáticas, es teología!», exclamaba Gordan, uno de los que más habían contribuido a edificar la teoría. Una consecuencia inesperada fue que casi de un día para otro, la teoría de los invariantes fue dejada de lado; al resolver los principales problemas que planteaba, Hilbert le había dado un golpe mortal. Pero el hacer esto, había asentado las bases, al mismo tiempo, de una nueva Rama del Álgebra, la teoría de los ideales de polinomios, que desde comienzos del siglo XX, debía renovar la vieja geometría algebraica y formar uno de los pilares del álgebra moderna edificada por E. Noether y E. Artin.

La situación era muy distinta en la teoría de números algebraicos cuando Hilbert comenzó en ella importantes investigaciones hacia 1895. Después de Gauss, fundador de la teoría, todo el esfuerzo del siglo XIX se había concentrado en el estudio de las leyes de la divisibilidad de los enteros algebraicos de un determinado cuerpo de números⁴. Los perseverantes y profundos trabajos de Dirichlet, Kummer, Kronecker, Dedekind y Minkowski habían permitido discernir la noción esencial que da la clave del problema, la de «ideal», y obtener finalmente una perfecta generalización de las propiedades de divisibilidad de los enteros ordinarios. Pero quedaban por dilucidar los fenómenos que se producen cuando se pasa de un cuerpo dado a un «supercuerpo» mayor, es decir, que daba por determinar cómo se descomponen en el supercuerpo los «ideales primos» del cuerpo inicial. En la época de que hablamos, no se sabía resolver este problema más que en casos muy particulares y no parecía posible derivar ninguna ley general de los hechos conocidos. El gran mérito de Hilbert, y prueba asombrosa de su notable sagacidad, fue el haber sido el primero en formular esas leyes generales: antes, había fundido, en un volumen que llegó a ser clásico, en un todo homogéneo el conjunto de los resultados obtenidos hasta entonces por la teoría de números algebraicos e introdujo en esa ocasión numerosas nociones nuevas, cuya fecundidad debían demostrar los trabajos ulteriores. No obstante, no había podido verificar la exactitud de sus enunciados generales más que en algunos casos especiales, que hoy nos parecen una base muy estrecha para fundamentar una inducción tan amplia. Sólo veinticinco años más tarde cayeron los últimos bastiones de la fortaleza y todos los resultados anunciados por Hilbert se hallarán establecidos en el caso más general. Pero se había dado el impulso inicial y puede decirse que en todo este período la teoría de números algebraicos estuvo totalmente impregnada por los métodos y las ideas de Hilbert, y tendía hacia el objetivo que éste había sido el primero en percibir y en asignarle.

Hasta 1900, los trabajos de Hilbert de los que acabamos de hablar lo habían revelado como un algebraista y un aritmético extraordinario; en los primeros años del siglo XX iba a demostrar que era un analista no menos notable. Fue primeramente en el cálculo de variaciones donde inició un camino totalmente nuevo, llamado desde entonces el «método directo», al aplicarlo al problema de Dirichlet, fue el primero en dar rigor al método del mínimo, esbozado por Riemann cincuenta años antes⁵. Numerosos investigadores han utilizado desde entonces con éxito los mismos principios, en problemas análogos.

Pero las investigaciones más notables de Hilbert en análisis, son las dedicadas a la teoría de ecuaciones integrales. Después de los importantísimos trabajos de Volterra, Poincaré y Fredholm, esta teoría reciente estaba por entonces en el primer plano de la actualidad matemática. También aquí Hilbert fue el legislador por excelencia. Retomando la idea general del «paso de lo finito al infinito» ya utilizada por sus predecesores, se propuso fundar, en completa analogía con el álgebra lineal y cuadrática elemental y su traducción al lenguaje geomé-

trico en los espacios de un número finito de dimensiones, una nueva «álgebra funcional», donde los elementos considerados ya no son puntos como en geometría analítica ordinaria sino funciones. No se trataba, sin embargo, de una analogía puramente formal y casi mecánica; el punto esencial consistía en introducir de manera adecuada lo que hoy llamamos las nociones topológicas adaptadas a la teoría. Este fue el progreso más importante realizado por Hilbert al definir y estudiar por primera vez el espacio de un número infinito de dimensiones que lleva ahora su nombre, que permite una transposición al álgebra funcional de la expresión geométrica de los teoremas de álgebra elemental. Provisto de este hilo conductor, Hilbert realizó en memorias que van de 1904 a 1910, lo esencial de su programa, completado luego por los trabajos de sus numerosos discípulos entre los que hay que citar sobre todo los de E. Schmidt, H. Weyl, Hellinger y H. Hardy. Pero Hilbert no se limitó a eso; toda una parte de sus memorias, y no la menos importante, está dedicada a una cantidad de aplicaciones de las ecuaciones integrales en las que abundan métodos y resultados tan nuevos como ingeniosos. También aquí es en el camino trazado por donde se prosigue desde hace treinta años el desarrollo de la rama de la matemática fundada por él y que es uno de los capítulos más importantes del análisis funcional moderno.

Todavía no hemos dicho nada de los trabajos de Hilbert que, quizá más que todas las admirables memorias precedentes, han contribuido a hacer conocer su nombre en todos los medios que se interesan por las matemáticas, aún en su aspecto más elemental; nos referimos a los célebres *Grundlagen der Geometrie*⁶, aparecidos en 1899, con los cuales Hilbert se convirtió de golpe en el representante más destacado de la tendencia llamada «axiomática». Sin duda no le faltaron precursores en esta vía: el descubrimiento de las geometrías no-euclidianas, que ya tenía casi un siglo, había enseñado a considerar como relativas las «verdades» de la geometría elemental clásica y en los veinte últimos años del siglo XIX eran muchos los que sentían la necesidad de aclarar los resortes lógicos de las demostraciones geométricas, seprándolos de toda ayuda pedida a la intuición. Pero antes de Hilbert nadie había realizado este programa con tanta decisión y claridad, ni nadie había sabido destacar tan bien el principio fundamental de que en las matemáticas la naturaleza propia de los entes estudiados no interesa; son las relaciones que existen entre estos entes lo único que importa. «En lugar de las palabras «puntos», «recta» y «plano» se debe poder decir en geometría sin inconvenientes «mesa», «silla» y «vaso de cerveza» decía ya en 1891 en una salida que reproducía aproximadamente el célebre comienzo (considerado por entonces tan revolucionario) de los *Grundlagen*: Pensemos tres sistemas de cosas que llamaremos puntos, rectas y planos».

Pero los *Grundlagen* no son solamente una exposición rigurosa de los elementos de la geometría euclidianas: lleva más lejos el análisis del mecanismo lógico e inicia toda una serie de investigaciones sobre la independencia mutua de los diversos axiomas de la geometría y la delimitación de las partes de ésta en

que cada uno de ellos interviene de manera esencial. En estos estudios, el autor da libre curso a su genio inventivo y sabe descubrir hasta en los temas más trillados propiedades nuevas, tan notables como insospechadas.

Hacia el final de su carrera, Hilbert volvió a la lógica matemática, que había abandonado durante más de quince años. Esta vez se dedicó a un problema más vasto: el de los fundamentos lógicos de todas las teorías matemáticas -en particular de la aritmética- y el de la «no-contradicción» de estas teorías. Parece que uno de los motivos que condujeron a Hilbert a retomar los estudios de este género (a los cuales por lo demás, su obra anterior lo conducía naturalmente) fue una reacción contra las tendencias de los matemáticos llamados «intuicionistas», quienes para evitar las dificultades lógicas planteadas por las «paradojas» de la Teoría de Conjuntos, no vacilaron en proponer el sacrificio no solamente de lo esencial de la obra de G. Cantor, sino también de toda una parte del análisis matemático clásico. Contra una posición tan radical Hilbert se rebeló con toda la fuerza de su vigoroso optimismo y de su inquebrantable confianza en la potencia del pensamiento humano. Ya en la conferencia pronunciada en el Congreso de 1900 no vaciló en afirmar su convicción de que todo problema matemático llegara un día a resolverse o a demostrar que no tiene solución; un acto de fe semejante se encuentra en una conferencia pronunciada en 1930 (una de sus últimas publicaciones), que termina con estas palabras: «Debemos saber y sabremos», testamento filosófico bien digno de quien había aportado a la ciencia una cosecha tan rica de resultados nuevos. Es con este espíritu que Hilbert, en sus trabajos de lógica matemática, se propone demostrar que es posible, sin abandonar nada de las conquistas anteriores, dar bases indiscutibles al edificio matemático y establecer rigurosamente la imposibilidad de que un razonamiento que reposa sobre estas bases conduzcan nunca a una contradicción. Sobre este último punto parece que, por una vez, la intuición de Hilbert lo arrastró a esperanzas un tanto exageradas, pues actualmente se tienen buenas razones para dudar de la posibilidad de tales «demostraciones». No por ello es menos cierto que, por el interés y las discusiones que suscitaron sus trabajos de lógica y los de su escuela, Hilbert contribuyó poderosamente a aclarar el delicado problema de los fundamentos de las matemáticas y el de la naturaleza del razonamiento lógico particularmente mostrando que sólo hay pensamiento claro cuando se lo puede expresar totalmente signos explícitos (y por lo tanto, en número finito) y que, a pesar de esta restricción, es perfectamente posible que el matemático razone correctamente sobre el «infinito».

Lo que hemos dicho hasta ahora llevaría a ver en Hilbert un constructor de vastas síntesis, que no se interesa por los problemas particulares más que en la medida en que son susceptibles de someterse a una idea general. Semejante creencia no sería completamente inexacta, puesto que representa una de las tendencias del espíritu de Hilbert, pero daría una imagen deformada y bien incompleta de su riqueza y su asombrosa variedad. Si bien Hilbert es uno

de los maestros de la axiomática, nunca cayó en las tendencias de algunos de sus discípulos, de crear una gran teoría para algunas magras aplicaciones y de generalizar por el placer de generalizar. Pocos matemáticos tuvieron como él, la pasión tan característica del verdadero matemático, por el problema especial, preciso y «concreto» si se puede decir así, ya que se relacione o no tal problema con una teoría general bien desarrollada. Sin hablar de su famosa conferencia en el Congreso de 1900 sobre los «Problemas Matemáticos», donde una buena parte de los que enumera son precisamente problemas «aislados», son numerosas las cuestiones de esta naturaleza a las que Hilbert se dedicó con éxito. Nos limitaremos a citar tres de estos resultados, que están a su altura y cada uno de los cuales bastaría para cimentar la fama de un investigador: la primera demostración de la hipótesis de Waring⁷. El teorema de irreducibilidad⁸ y la demostración de la existencia de singularidades en toda superficie de curvatura negativa constante sumergida en el espacio de tres dimensiones.

No es de asombrarse que la influencia de un hombre como Hilbert sobre el pensamiento matemático de su tiempo haya sido considerable y duradera; sin duda, esa influencia todavía no ha alcanzado su apogeo, aunque los numerosos alumnos que él ha formado -muchos de los cuales son hoy en día maestros eminentes- no han contribuido poco a aumentar su alcance. Hemos visto más arriba que ramas enteras de la matemática le deben su orientación o sus métodos; pero su acción es sensible aún en teorías en las que nunca trabajó directamente él mismo, como la topología general por ejemplo. Más que por sus geniales descubrimientos, es quizá por el sesgo de su espíritu que Hilbert ha ejercido la más profunda influencia en el mundo matemático; él enseñó a los matemáticos a pensar axiomáticamente, es decir, a tratar de reducir cada teoría a su esquema lógico más estricto, desembarazado de la técnica contingente del cálculo. Son ya incontables los resultados nuevos e importantes a los que ha conducido la aplicación de esta doctrina y que han asegurado su triunfo. Pero, más que por su utilidad inmediata, puede decirse que es por su atractivo estético y aún, en cierto modo, moral que ha conquistado a la mayor parte de los jóvenes matemáticos. Por su necesidad ardiente de comprender, por su probidad intelectual cada vez más exigente y por su infatigable aspiración dirigida hacia una ciencia cada vez más unida, más pura y más liberada, Hilbert ha encarnado verdaderamente, para la generación del período «entre las dos guerras», el ideal del matemático.

¹ En este artículo, hemos sacado gran partido de los importantes comentarios sobre los trabajos de Hilbert insertados en la edición de sus obras (Gesammelte Abhandlungen, Berlín, Springer v. 3.1935), así como del excelente estudio biográfico de O. Blumenthal que figura en ella (en el Tomo III).

² Un número ligado a una configuración geométrica por un cierto número de puntos y de curvas algebraicas es un invariante de esta con-

figuración para ciertas transformaciones algebraicas, cuando es el mismo para la configuración considerada y para todas las que se deducen de ella aplicándole las transformaciones de la especie considerada. Por ejemplo, la distancia de un punto a una recta, es un invariante de la configuración formada por el punto y la recta todo desplazamiento; la relación entre dos segmentos situados sobre una recta es un invariante de la configuración formada por sus extremidades, para toda semejanza; la razón anarmónica de cuatro rectas concurrentes es un invariante de estas rectas para toda transformación proyectiva.

- 3 La más importante de estas leyes es la de que todos los invariantes de una configuración dada pueden expresarse por combinaciones racionales de un número finito de ellos.
- 4 Un cuerpo de números es un conjunto de números (reales o complejos) tal que toda operación racional (adición, sustracción, multiplicación y división) efectuada con números del conjunto da como resultado otro número del conjunto; por ejemplo, todos los números $a+b\sqrt{2}$, donde a y b son racionales, forman un cuerpo. En este cuerpo se pueden distinguir números llamados enteros algebraicos, que tiene propiedades análogas a las de los enteros ordinarios. Por ejemplo, los números $a+b\sqrt{2}$, en los que a y b son enteros (ordinarios) son los enteros algebraicos del cuerpo precedente.
- 5 Ver las alusiones a esta cuestión en los artículos de Valiron, pág. 169-170 y Montel, pág. 182 (Nota de F. Le. L.).
- 6 Los fundamentos de la geometría.
- 7 Se trata del teorema siguiente: para todo entero s existe un número $g(s)$, que no depende más que de s , tal que todo número entero puede expresarse como una suma de $g(s)$ potencias s -simas de enteros (a lo sumo). Enunciado por Waring a fines del siglo XVIII, este resultado sólo se había demostrado, antes de Hilbert, para un número muy escaso de valores particulares del exponente s .
- 8 Si $P(x,t)$ es un polinomio de dos variables, de coeficientes racionales, e irreducible en el cuerpo de los números racionales, existen infinitos valores racionales t_0 de t tales que el polinomio de una variable $P(x, t_0)$ sea irreducible en el cuerpo de los números racionales.