Abacos o Nomogramas

FABIO ZARATE M.*

Todos hemos tenido oportunidad, por lo menos de ver esas cartas llenas de líneas curvas o rectas con las cuales se pueden hacer cálculos aproximados sin necesidad de hacer operaciones. Esas cartas se llaman Nomograma y son tan prácticas que a pesar de la existencia de calculadoras tan avanzadas se continúan utilizando por personal con mucha, poca o ninguna preparación matemaática.

Para construir un Nomograma se requieren algunos conocimientos elementales de matemáticas y claro está un problema a solucionar. Seguramente que tendremos a nuestra disposición un conjunto de datos ligados o no por una ecuación y que nosotros debemos organizar sobre un papel de tal manera que sobre éste podamos obtener nuevos datos.

Existen dos clases de Abacos o Nomogramas: 1) Cartesianos y 2) de puntos alineados.

ABACOS CARTESIANOS

Tienen su origen en conjuntos de curvas de nivel, las cuales a su vez se originan en ecuaciones de la forma $Z = f(X,Y)$.

* Departamento de Matemáticas. Universidad Industrial de Santander. Bucaramanga, Colombia.

En lugar de relacionar tres variables pueden relacionar tres grupos de variables.

Para construir un ábaco de este tipo procedemos como si estuvieramos hallando curvas de nivel o sea asignando valores constantes a una de las variables que en este caso por la forma de la ecuación es Z. Las líneas de nivel serán de la forma

$$\text{Constante} = f(X,Y)$$

Ejemplo: Construir un ábaco que permita hacer cálculos para $Z = XY$, sabiendo que X varía de 0.1 a 10 y Y varía de 2 a 6.

De acuerdo con estos datos Z varía de 0.2 a 60. Los valores que asignemos a Z deben estar dentro de este rango.

Si asignamos a Z los valores 2,10,30 y 50 obtenemos las curvas de nivel $2 = XY$, $10 = XY$, $30 = XY$, y, $50 = XY$. Estas curvas las graficamos en el plano XY como se grafica cualquier curva. El ábaco terminado se muestra en la Figura 1.

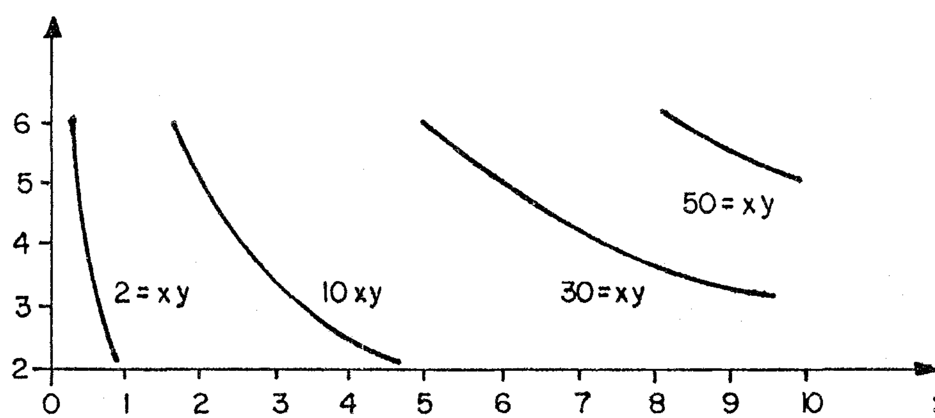

Figura 1.

Con este ábaco podemos calcular diferentes valores de X,Y ó Z.

Por ejemplo cuando $Z = 30$, y $X = 8$,Y vale un poco más de 35,(3.75).
cuando $Z = 50$, y, $Y = 6$, X vale menos de 8.5 (8.33).
Cuando $X = 5$, y, $Y = 4$ el valor de Z se halla aproximadamente en medio de las dos curvas, ($Z = 20$).

ABACOS DE PUNTOS ALINEADOS

Son aquellos formados por tres o más escalas en línea recta o curva o combinación de ambas. Los ábacos de puntos alineados pueden ser de estos tipos: Escalas paralelas, Escalas en N, Escalas concurrentes, Escalas proporcionales, Dos escalas rectas y una curva, En red, Circulares y combinados.

En este artículo se analizan los ábacos de escalas paralelas.

Módulo de una escala. Sea $f(X)$ una función que se coloca sobre una escala. Sean X_1, y X_2 dos valores de X, Y, sea L la distancia que separa a $f(X_1)$ y a $f(X_2)$ sobre el papel.

El módulo de la escala se define como:

$$m^{x} = \frac{L}{f(X_2) - f(X_1)} \qquad [0]$$

De esta definición se deduce que la posición de un punto cualquiera X con respecto al origen de la escala es: $m_x\, f(X)$

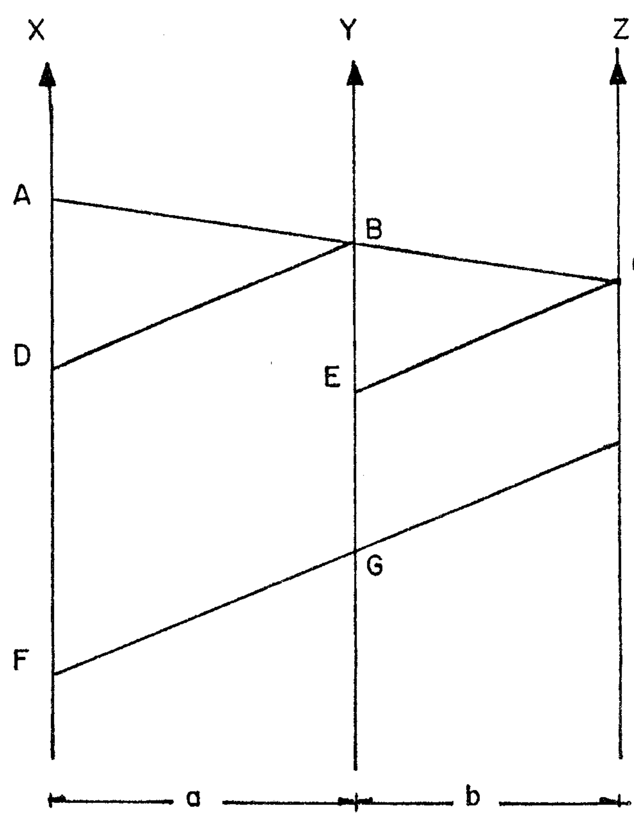

Figura 2

En la Figura 2 X,Y,Z son tres escalas paralelas. F,G y H son los orígenes de estas escalas. FH es una recta que une los orígenes de las tres escalas. AC es una recta trazada al azar y que corta las tres escalas. BD, EC y FH son rectas paralelas. Los triángulos ABD y EBC son semejantes y como se vio al definir módulo:

$$FA = m_x f(X) \qquad [1]$$
$$HC = m_y g(Y) \qquad [2]$$
$$GB = m_z h(Z) \qquad [3]$$

Se sigue que:

$$\frac{a}{b} = \frac{AD}{BE} = \frac{FA - GB}{GB - HC} = \frac{m_x f(X) - m_z h(Z)}{m_z h(Z) - m_y g(Y)}$$

de donde:

$$\frac{m_x f(X)}{a} = \frac{m_y g(Y)}{b} = \frac{m_z h(Z)}{\frac{a\,b}{a+b}} \qquad [5]$$

Si hacemos que

$$\frac{a}{b} = \frac{m_x}{m_y} \qquad [6], y,$$

$$m_z = \frac{m_x m_y}{m_x m_y} \qquad [7]$$

la ecuación se transforma en

$$f(X) + g(Y) = h(Z) \qquad [8]$$

La cual nos indica la forma de ecuación que podemos resolver con este tipo de ábaco. Notemos además que los puntos A,B y C satisfacen la ecuación que resultó.

Ejemplo: Construir un ábaco de escalas paralelas que permita resolver el problema planteado en el ejemplo anterior.

Al tomar logaritmos obtenemos la forma deseada.

$$\text{Log } Z = \log X + \log Y$$

Supongamos que disponemos de un espacio de 10 por 20 cms. De acuerdo a la definición de módulo:

$$m_x = \frac{20}{\text{Log}(10) - \log(0.1)} = 10 \quad ,y, \quad m_y = \frac{20}{\log(6) - \log(2)} = 41.91$$

Como:

$$\frac{a}{b} = \frac{m_x}{m_y} \quad ,y, \quad a + b = 10 \text{ cm} \quad \text{obtenemos que}$$

$$a = \frac{10}{10 + 41.91} \text{ x } 10 \text{ cm} = 1.927 \text{ cm}$$

$$b = \frac{41.91}{10 + 41.91} \text{ x } 10 \text{ cm} = 8.073 \text{ cm}$$

Por [7]

$$m_z = \frac{10 \text{ x } 41.91}{10 + 41.91} = 8.073 \text{ cm}$$

Con estos datos y las ecuaciones [1], [2], y, [3] obtenemos las distancias de algunos puntos al origen de su correspondiente escala.

$m_x f(X)$	$m_y g(Y)$	$m_z h(Z)$
10.log X	41.91.log Y	8.073.log Z
10.log(0.1) = - 10 cm	41.91.log(2) = 12.61 cm	8.073.log(0.2) = - 5.64 cm
10.log(1) = 0 cm	41.91.log(3) = 20 cm	8.073.log(1) = 0.0 cm
10.log(2) = 3.01 cm	41.91.log(4) = 25.25 cm	8.073.log(10) = 8.073 cm
10.log(3) = 4.771 cm	41.91.log(5) = 29.29 cm	8.073.log(20) = 10.50 cm
10.log(4) = 6.025 cm	41.91.log(6) = 32.61 cm	8.073.log(30) = 11.92 cm
10.log(5) = 6.990 cm		8.073.log(40) = 12.93 cm
10 log(6) 7.782 cm		8.073.log(50) = 13.72 cm
10 log(7) = 8.451 cm		8.073.log(60) = 14.36 cm
10.log(8) = 9.031 cm		
10.log(9) = 9.542 cm		
10 log(10) = 10 cm		

Para colocar estos puntos sobre las respectivas escalas se traza una recta NO NECESARIAMENTE HORIZONTAL por tres puntos para los cuales se satisface la ecuación. Disponemos ahora de un punto de referencia en cada escala con el cual podemos localizar los demás. Luego subimos o bajamos, las escalas en el papel hasta lograr su mejor utilización y presentación. En este ejemplo la recta une los puntos X = 10, Y = 6, y, Z = 60.

El ábaco terminado se presenta en la Figura 3.

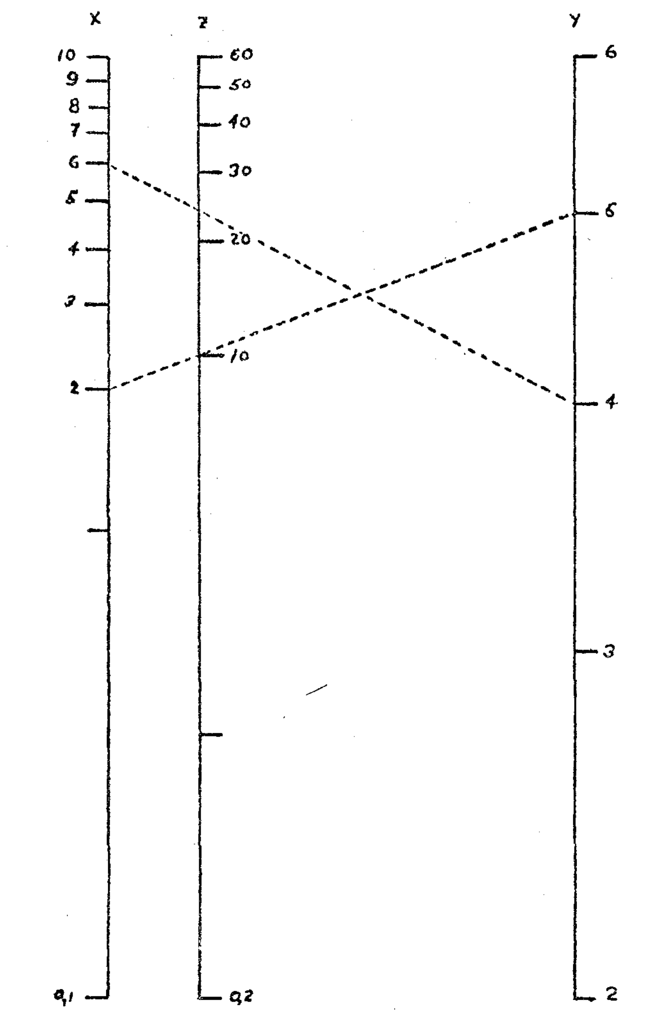

Figura 3.

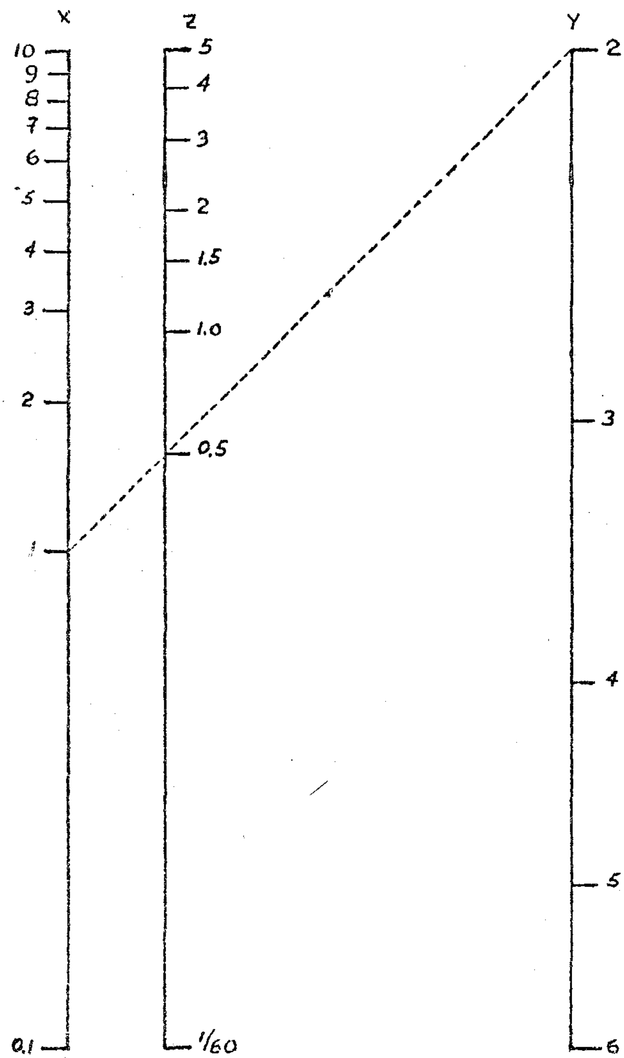

Figura 4

Para hacer lecturas sobre este ábaco basta unir con una recta dos puntos en diferentes escalas y así leemos el tercero sobre la recta que las une. Por ejemplo: Si $X = 6$, y, $Y = 4$ leemos un $20 < Z < 30$ ($Z = 24$), Si $X = 10$, y, $Z = 20$ leemos $Y = 2$. Si $Y = 5$, y, $Z = 10$ leemos $X = 2$.

Observación: Por comodidad se acostumbra colocar sobre la escala los valores de las variables X,Y,Z y no $f(X_1)$, $f(Y)$ y $f(Z)$. Se acostumbra también nombrar las escalas como X,Y, y, Z como se ve en la parte superior de la Figura 3.

Ejemplo: construir un ábaco que permita trabajar con la fórmula $Z = X/Y$ en donde X varía de 0.1 a 10, y, Y varía de 2 a 6.

Este ejercicio se puede resolver de dos formas:

a) la fórmula se puede reescribir como $X = YZ$ que es el mismo caso del ejemplo anterior.

b) Si tomamos logaritmos la fórmula se convierte en

$$\log Z = \log X(-\log Y)$$

En este caso hay que tener en cuenta que si cuando los logaritmos eran positivos la escala iba hacia arriba, ahora para logaritmos negativos irá hacia abajo.

Supongamos que queremos un ábaco de 20 x 10 cm. De acuerdo a la definición de módulo.

$$m_x = \frac{20}{\log 10 - \log 0.1} = 10 \, ; \qquad m_y = \frac{20}{\log 6 - \log 2} = 41.91$$

de donde $a = 1.927$ cm, $b = 8.073$ cm y $m_z = 8.073$

Las distancias de algunos puntos al origen de las escalas X,Y, Z son las mismas del ejemplo anterior. Las distancias desde el origen hasta algunos puntos de la escala Z se calculan a continuación:

m_z h(Z)	=	d(en cm)
8.073 log (1/60)	=	- 14.36
8.073 log (0.5)	=	- 2.43
8.073 log (1)	=	0
8.073 log (1.5)	=	1.42
8.073 log (2)	=	2.43
8.073 log (3)	=	3.85
8.073 log (4)	=	4.86
8.073 log (5)	=	5.64

Nótese como según los datos Z toma valores de 1/60 a 10/2

El ábaco terminado aparece en la Figura 4.

BIBLIOGRAFIA

HIJUELOS, L.A., ZARATE, F. «Abacos», Bucaramanga, 1981.

DAVIS, D.S. «Nomography and Empirical Equations». Reinhold Publishing Corporation, New York, 1962.

GIET. «Abaques ou Nomogrammes», París Dunod 1965.

INIGUEZ, J. M. «Curso de Matemáticas». Tomo III. Librería General, Zaragoza, 1960.