Métricas que pueden inducirse por una norma

EDILBERTO REYES G. *
Matemático. Universidad Nacional

El presente artículo muestra cómo la noción de distancia (métrica) entre los números reales puede generalizarse a cualquier conjunto no vacío, así como las condiciones que debe cumplir una distancia o métrica para que sea inducida por una Norma.

ESPACIOS METRICOS

El concepto de distancia entre dos punto de la recta real orientada (dos números reales) es conocido de los primeros cursos universitarios de matemáticas, allí se define la función $f(x) = |x|$ «valor absoluto de x» y geométricamente se interpreta como la distancia del punto x al origen de coordenadas. Por sus propiedades esta función determina la distancia entre dos puntos cualesquiera x, y de la recta, y satisface las condiciones que esperamos tenga una noción de distancia. Estas son:

1. $|x - y| \geqslant 0$
   Distancia de x a y es no negativa
   $|x - y| = 0$ sí y sólo sí $x = y$
   Distancia entre dos puntos es cero sí y sólo sí son iguales.

* Departamento de Matemáticas. Universidad Industrial de Santander. Bucaramanga, Colombia.

2. $|x - y| = |y - x|$
   Distancia de x a y es igual a la distancia de y a x.

3. $|x - y| \leq |x - z| + |z - y|$

Conocida con el nombre de desigualdad triangular por su interpretación geométrica. Significa que: en un triángulo la longitud de un lado es siempre menor o igual que la suma de las longitudes de los otros dos lados.

Es conveniente notar $d(x,y)$ por $|x - y|$ y, leerlo «distancia de x a y». Usamos esta notación para dar la definición que generaliza el concepto de distancia en R a cualquier conjunto no vacío así,

Definición

Si X es un conjunto no vacío y «d» es una función de X x X en R tal que para todo x, y, z en X se cumple que:

1. $d(x,y) > 0$
   $d(x,y) = 0$ sí y sólo sí $x = y$.

2. $d(x,y) = d(y,x)$ (simetría)

3. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (desigualdad triangular)

Decimos que d define una métrica o distancia en el conjunto X. Se denomina **espacio métrico** al par $|X,d|$ o simplemente a X cuando no haya confusión acerca de la noción de distancia que se usa, $d(x,y)$ representa la distancia entre x e y.

No es difícil verificar que las siguientes funciones de X x X en R definen efectivamente una métrica en el respectivo conjunto X.

1. $X = R$, $d(x,y) = |x - y|$

2. $X = R^2$, a) $d_1((x_1,x_2)) = \left[(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2\right]^{1/2}$
   d_1 es llamada distancia Euclidiana en R^2

   b) $d_2((x_1,x_2);(y_1,y_2)) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$
   d_2 es llamada Métrica del Taxista, por su relación con la distancia recorrida por un taxista o un caminante en una ciudad ordenada y bien planificada, aunque difícil de encontrar. Esta noción de distancia sin embargo puede ser útil con otras interpretaciones.

c) $d_3((x_1,x_2);(y_1,y_2)) = \max\{|x_1 - y_1|;|x_2 - y_2|\}$

Este segundo ejemplo muestra que en un mismo conjunto se pueden definir diferentes nociones de distancia.

El siguiente resultado es sorprendente ya que muestra que cualquier conjunto no vacío puede dotarse de una métrica.

3. Si X es cualquier conjunto no vacío, y

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{Si } x \neq y \\ 0 & \text{Si } x = y \end{cases}$$

d define una métrica en X, llamada Métrica discreta. En este caso (X, d) se llama Espacio Métrico Discreto.

ESPACIOS NORMADOS

El concepto de Norma o longitud Euclidiana de un vector particularmente en R^2 y R^3 es bien conocido, como también que dicha norma induce la noción de distancia Euclidiana entre dos puntos cualesquiera de R^2 o R^3 respectivamente.

Tomando como base las propiedades de esta norma tenemos la siguiente definición.

Definición:

Sea X un espacio vectorial real (o complejo). Una **Norma** en X es una función de X en R notada $\|\ \|$ y tal que para todo x,y en X satisface:

N_1) $\|x\| \geq 0$
$\|x\| = 0$ sí y solo sí $x = 0$

N_2) $\|ax\| = |a|\,\|x\|$ para todo número real a

N_3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (desigualdad triangular)

$\|x\|$ representa la «norma de x». El par $(X,\|\ \|)$ se llama Espacio Vectorial Normado o simplemente Espacio Normado, y cuando no haya confusión decimos más brevemente que X es un Espacio Normado. Es de observar que las condiciones N_2 y N_3 exigen que X tenga estructura de Espacio Vectorial por lo que una norma no puede definirse en cualquier conjunto.

Un interesante resultado dice que toda norma en un espacio vectorial X induce una métrica en X. En efecto:

Proposición 1.

Si X es un Espalcio Normado, $d(x,y) = ||x-y||$ define una métrica en X.

Demostración

1. $d(x,y) = ||x-y|| \geqslant 0$ (por N_3)
   $d(x,y) = 0$ sí y sólo sí $||x - y| = 0$ (definición)
   sí y solo sí $x = y$ (por N_1)

2. Usando N_2 tenemos que $||x-y|| = ||y-x||$, es decir que $d(x,y) = d(x,y)$.

3. De N_3, tenemos que

   $$|| x-y || = || (x-z) + (z-y) || \leqslant || x-z || + || z-y ||,$$

   de donde

   $$d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z, y) \bullet$$

Se puede mostrar que las siguientes funciones definen cada una, una norma en los conjuntos dados

1. $X = R$, $||x|| = |x|$

2. $X = R^2$, $|| (x_1 , x_2) ||_1 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$ Norma Euclidiana

   $|| (x_1 , x_2)||_2 = |x_1| + |x_2|$ Norma del Taxista

   $|| (x_1 , x_2) ||_3 = \max \{ |x_1| , |x_2| \}$

Además en este caso las normas inducen respectivamente las métricas d_1, d_2, d_3 del ejemplo 2 del numeral anterior.

No siempre una métrica d es inducida por una norma, primero debe estar definida en un espacio vectorial, sin embargo se tiene el siguiente resultado:

Proposición 2.

Si d es una métrica en un espacio vectorial X y d es inducida por una norma en X, entonces:

1. $d(x+z, y+z) = d(x, y)$ para todo x,y,z en X.

2. $d(a\,x, a\,y) = |a|\, d(x,y)$ para todo x,y en X y todo número real a

Como se puede verificar es bien sencilla la demostración de este hecho. El resultado es más interesante escrito en su forma equivalente es decir: «Si una métrica d en un espacio vectorial X, no satisface las condiciones 1) y 2) de la proposición 2 entonces d no es inducida por ninguna norma en X», hecho que nos permite determinar si una métrica es o no inducida por una norma.

Ahora, si una métrica d en un espacio vectorial X satisface 1 y 2 de la proposición 2 es inducida por una norma? En este caso por cual?

La respuesta a este problema es sencilla

$d(x,y) = ||x-y||$ define la norma por lo cual la métrica d es inducida. En efecto:

dem: $||\,x\,|| = d(x,0) \geqslant 0$

N_1, $||\,x\,|| = 0$ sí solo sí $d(x,0) = 0$ sí y solo sí $X = 0$

N_2, $||ax|| = d(a\,x,0) = d(a\,x, a\,0)$

$|\,a\,|\, d(x,0)$ (por 2)

$= |\,a\,|\,||\,x\,||$ (definición)

es decir

$$||\,a\,x\,|| = |\,a\,|\,||\,x\,||.$$

N_3, $||\,x+y\,|| = d(x+y,0) = d(x,-y)$ (por 1)

$\leqslant d(x,0) + d(0,-y)$ (d satisface la desigualdad triangular)

$= d(x,0)\, d(y,0)$ (por 1)

$= ||\,x\,|| + ||\,y\,||$ (definición)

es decir

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Obtenemos el mismo resultado si definimos $d(x, 0) = \|x\|$.

Mirando de otra forma el resultado, podríamos pensar más bien que: Si d es una métrica en un espacio vectorial X que satisface

1. $d(x + z, y + z) = d(x,y)$ para todo x,y,z en X
2. $d(a x, ay) = |a|\, d(x,y)$ para todo x,y en X y todo número real a entonces d induce una norma en X dada por

$\|x-y\| = d(x,y)$. para todo x, y en X.

BIBLIOGRAFIA

(1) GEMIGNANI. Elementary General Topology. Adisson Wesley.

(2) KREYSZIG, E. Introductory Functional Analysis with Applications. Wiley International Editions.