El Teorema de Sturm *

GABRIEL YAÑEZ C.**
Licenciado en Matemáticas,
Universidad de Pamplona

Master, Universidad Nacional

Cuando se quiere calcular las raíces reales de un polinomio, lo primero que se aplica es la regla de los signos de Descartes, para luego y junto con el teorema de Bolzano (el paso por una raíz al cambiar el polinomio de signos) y alguna cota para las raíces (ver «Integración» Año 1 No. 2), proceder a calcularlos. Sin embargo la regla de Descartes puede llevar a errores por el hecho de ser sólo una aproximación del número de raíces. Por ejemplo: si se toma desprevenidamente el polinomio $p(x) = x^3 - 7x + 7$ calculemos una cota superior para las raíces positivas $M = 1 + (B/\alpha_0)^{1/k} = 1 + 1 = 2$

Calculando $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$ observamos que todos son positivos, no hay cambio de signo, luego no existe raíces positivas ¡ERROR!.

Este sencillo ejemplo muestra la posibilidad de cometer errores, por lo que es bien justificable conocer un método que permita saber el número exacto de raíces reales. Uno de estos métodos se debe al matemático francés STURM (1835) y permite saber el número exacto de raíces de un polinomio $p(x)$ comprendidas entre dos números reales a y b, además de que el mismo método suministra cotas para las raíces reales.

---

* El texto de este artículo corresponde a una conferencia dictada en la Universidad de Pamplona en el Coloquio Regional de Matemáticas.

** Profesor de la Universidad Industrial de Santander. Bucaramanga, Colombia.

Antes de entrar de lleno al teorema veamos algunos preliminares respecto a la derivada de un polinomio.

Raíces múltiples y su relación con la derivada

Si $(x - \alpha)^m \;/\; f(x)$ pero $(x - \alpha)^{m+1}$ $f(x)$ se dice que α es una raíz de multiplicidad m, que para efectos del número de raíces de $f(x)$ se cuenta m veces.

La derivada y raíces múltiples

Sea $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$

La derivada $f'(x) = na_0 x^{n-1} + (n-1) a_1 x^{n-2} + \dots a_{n-1}$

Con esta definición se deduce sin más $(fg)' = f'g + fg'$

supongamos que α es una raíz de $f(x)$ de multiplicidad m, $f(x) = (x - \alpha)^m \psi(x)$,

no es raíz de $\psi(x)$, $f'(x) = m(x-\alpha)^{m-1} \psi(x) + (x-\alpha)^m \psi'(x)$

$$= (x - \alpha)^{m-1} [m \psi(x) + (x - \alpha) \psi'(x)]$$

no es divisible por $(x - \alpha)$

Luego:

1. Si α es raíz de multiplicidad m de $f(x)$, α es raíz de multiplicidad m-1 de $F'(x)$
2. Si $g(x) = (f(x), f'(x))$ entonces $(x - \alpha)^{m-1} / g(x)$
3. $f(x)/g(x)$ es un polinomio sin raíces múltiples

TEOREMA DE STURM

Sea el polinomio $f(x)$ sin raíces múltiples. Formemos una sucesión finita de polinomios de la siguiente forma $f_1(x) = f'(x)$
se divide luego $f(x)$ por $f_1(x)$ y el residuo de esta división tomado con signo contrario, se toma por $f_2(x)$.

$$f(x) = f_1(x)\, q_1(x) - f_2(x)$$

En general, si ya se han hallado los polinomios $f_{k-1}(x)$ y $f_k(x)$, el polinomio $f_{k-1}(x)$ será el residuo de la división $f_{k-1}(x)$ por $f_k(x)$ tomado con signo contrario.

OBSERVACIONES

(01) Polinomios consecutivos no tienen raíces comunes

(02) El polinomio último $f_s(x)$ no tiene raíces reales

(03) Si $f_k(\alpha) = 0$, $1 \leqslant k \leqslant s-1$, $f_{k-1}(\alpha)$ y $f_{k+1}(\alpha)$ tienen diferente signo.

(04) Si $f(\alpha) = 0$ entonces $f(x)\, f_1(x)$ cambia su signo de menos a más cuando al crecer x pasa por α

Si c no es raíz de $f(x)$ definimos $V(c)$ como el número de variaciones de signo de la sucesión $f(c)$, $f_1(c), \ldots f_s(c)$.

Teorema de Sturm

Sean a y b números reales, tales que ninguno de los dos es raíz de $f(x)$ y supongamos $a < b$ entonces $V(a) \geqslant V(b)$, y el número de raíces reales entre a y b es igual a $V(a) - V(b)$.

Demostración:

Requisitos de cálculo

R1) Los polinomios son funciones continuas

R2) Teorema de Bolzano: Si $f(a) \,.\, f(b) < 0$ entonces existe $\alpha \,\varepsilon\, (a,b)$ tal que $f(\alpha) = 0$ (f continua) en $[a,b]$.

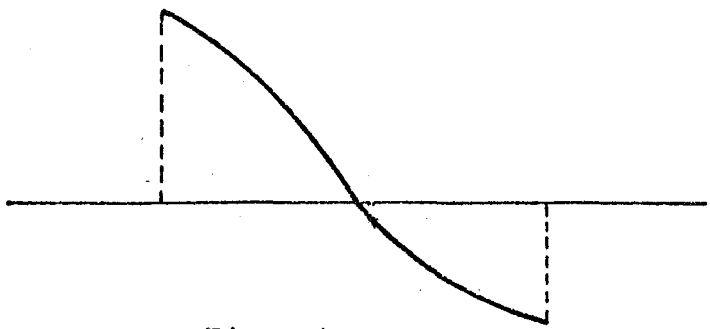

Figura 1.

R3). **Conservación del signo:**

Si f es continua en a y $f(a) > 0$ $(f(a) < 0)$ existe $(a - \varepsilon , a + \varepsilon)$ tal que $f(x) > 0$ $(f(x) < 0)$ para cualquier x en $(a - \varepsilon , a + \varepsilon)$

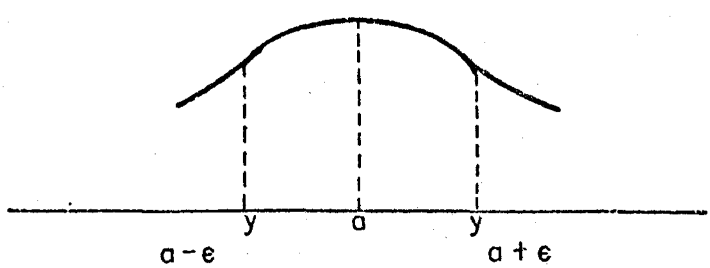

Figura 2

R4) Si $f'(x) > 0$, $x \in (a, b)$ entonces f es creciente en (a, b)
Si $f'(x) < 0$ $x \in (a, b)$ entonces f es decreciente en (a, b)

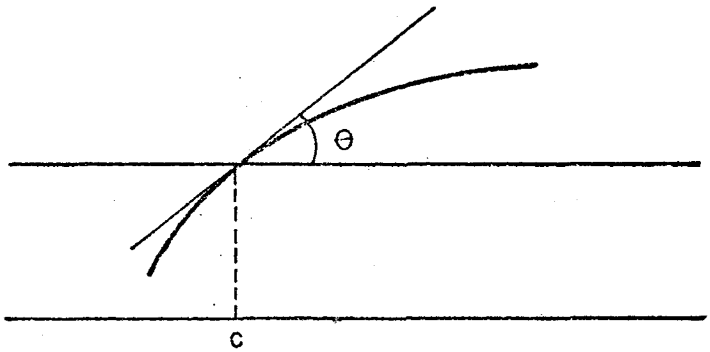

Figura 3

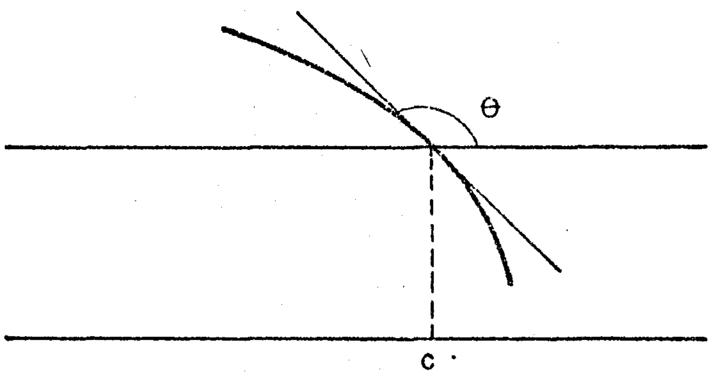

Figura 4

Analicemos el cambio del número $V(x)$ al crecer x desde a hasta b.

a) Si x no pasa por alguna raíz de algún polinomio $V(x)$ no varía

b) x pasa por α raíz de $f_k(x)$

Por 02) $f_{k-1}(\alpha) = 0 = f_{k+1}(\alpha)$ y por R3) existe $(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$ donde $f_{k-1}(x)$ y $f_{k-1}(x)$ tienen el mismo signo que $f_{k-1}(\alpha)$ y $f_{k-1}(\alpha)$ respectivamente y f_k no tiene otra raíz. En cambio $f_k(x)$ puede tener o no un signo antes de α y otro después de α.

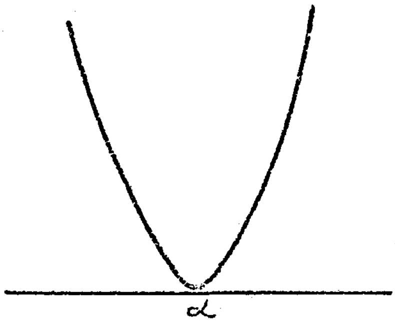

Figura 5

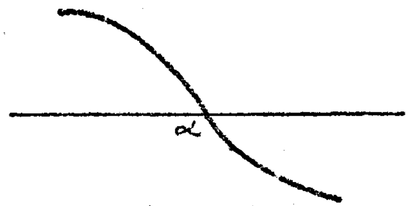

Figura 6

Si el signo de $f_k(x)$ permanece constante $V(x)$ no cambia.

Si suponemos

$$f_k(\alpha - \varepsilon) > 0 \text{ y } f_k(\alpha + \varepsilon) < 0 \text{ con } f_{k-1}(x) \geq 0$$

$$f_{k+1}(x) < 0 \; x \varepsilon \; (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon) \quad \text{tendremos}$$

antes de α: + + —

Después de α: + — —

Como la variación de signos sólo se traslada, concluimos que durante tal paso $V(x)$ no variará.

c) **x pasa por α raíz de f(x)**

Por 01) $f_1(\alpha) \neq 0$ y por R2) existe $(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$ donde $f_1(x)$ tiene el mismo signo de $f_1(\alpha)$ para $x \varepsilon (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$ Por R4)

I) Si $f_1(\alpha) > 0$ entonces

	f(x)	$f_1(x)$	Variaciones	
antes de α	—	+	1	1
Después de α	+	+	0	

II) Si $f_1(\alpha) < 0$ entonces

antes de α	+	—	1	1
después de α	—	—	0	

Luego V(x) disminuye exactamente en 1 por lo que concluimos que existen tantas disminuciones en V(x) como raíces reales entre a y b.

Ejemplo 1:

$f(x) = x^3 - 7x + 1$
$f_1(x) = f'(x) = 3x^2 - 7$
$f_2(x) = 2x - 3$
$f_3(x) = 1$

		f	f_1	f_2	f_3	Variaciones	
0	+	—	—	+	=	2	
	1	+	—	—	+	2	2 raíces
	2	+	+	+	+	0	

2 raíces reales entre 1 y 2

	f	f_1	f_2	f_3	variaciones
1.5	—	—	—	+	1

- 1 raíz entre 1 y 1.5
- 1 raíz entre 1.5 y 2

	f	f_1	f_2	f_3	variaciones	
—1	+	—	—	+	2	
—2	+	+	—	+	2	
—3	+	+	—	+	2	
						1 raíz entre —3 y —4
—4	—	+	—	+	3	

Ejemplo 2:

$f(x) = 3x^4 - 5x^3 + 2x^2 + X - 5$
$f_1(x) = 12x^3 - 15x^2 + 4x + 1$

Multiplicando por $\quad 3x^4 - 5x^3 + 2x^2 + X - 5 \quad \underline{|12x^3 - 15x^2 + 4x + 1}$

$$x - 5$$

$$\begin{array}{r} 12x^4 - 20x^3 + 8x^2 + 4x - 20 \\ -12x^4 + 15x^3 - 4x^2 - x \\ \hline -5x^3 + 4x^2 + 3x - 20 \end{array}$$

Multiplicando por
12

$$\begin{array}{r} -60x^3 + 48x^2 + 36x - 240 \\ + 60x^3 - 75x^2 + 20x + 5 \\ \hline -27x^2 + 56x - 235 \end{array}$$

$$f_2(x) = 27x^3 - 56x + 235 \quad b^2 - 4ac = \underline{56^2 - 4(27)(235) > 0}$$

No tiene raíces reales por lo que no hay necesidad de continuar ya que como se dijo antes las variaciones son producidas solamente por las raíces reales de f(x).

Preguntas:

1) Cuántas raíces reales positivas?
2) Cuántas raíces negativas?

1) $a = 0 \quad b = +\infty$ forma de indicar un cierto valor a partir del cual el signo del polinomio coincide con el signo del coeficiente de la mayor potencia.

	f(x)	$f_1(x)$	f_2 x)	Variacic.	
0		+	+	1	1 raíz positiva
$+\infty$	+	+	+	0	1 raíz negativa
$-\infty$	+	-	+	2	

	f(x)	$f_1(x)$	$f_2(x)$	Variac.
0		+	+	1
1		+	+	1
2	+	+	+	0

La raíz positiva se encuentra entre 1 y 2

NOTA: mirando la tabla tomaríamos como cota superior a 2 sin necesidad de utilizar ningún otro tipo de fórmula para acotar.

BIBLIOGRAFIA

— Algebra Superior. Kurosch.

— KOLMOGOROV, ALESKSANDROV, LAURENTIEV y Otros. La Matemática, su contenido métodos y significado.

/