Método general en la búsqueda de asíntotas de funciones derivables

RICARDO MONTURIOL MARTINEZ *

Ing. Químico. Universidad Nacional de Colombia, Bogotá

Intuitivamente se puede imaginar una asíntota o un comportamiento asintótico como el acercamiento de una curva descrita por $Y = f(x)$, a una recta llamada asíntota a medida que nos «alejemos» del origen. Como el comportamiento hace referencia a valores «lejanos», no debe interesarnos ni asombrarnos cual sea el comportamiento de la curva $Y = f(x)$ en puntos no «lejanos» y así, es posible que una curva corte a una asíntota una o infinidad de veces antes de presentar en una «lejanía» el comportamiento asintótico. Tampoco debe ser motivo de alarma si una curva, con asíntota, en puntos muy «lejanos» corta a ésta una o infinidad de veces e incluso llega a coincidir con ella. Estas definiciones informales, suelen en muchas oportunidades, ser mal interpretadas, conduciendo a un sinnúmero de errores y falsas concepciones con respecto a las ideas presentadas.

Una observación interesante, es que una asíntota de $Y = f(x)$ no forma parte de la gráfica de la curva en cuestión, salvo en los puntos comunes.

Es también bastante intuitivo el hecho de que en puntos muy lejanos del origen la pendiente de $Y = f(x)$ debe estar acercándose a la pendiente de la recta si ésta no es vertical.

* Profesor Asistente, Universidad Industrial de Santander. Bucaramanga, Colombia.

Gráficamente las cosas pueden verse así:

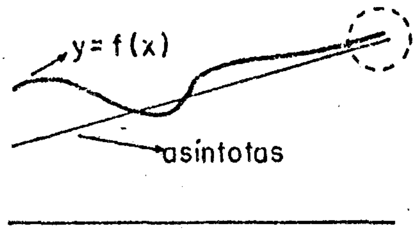

Figura 1

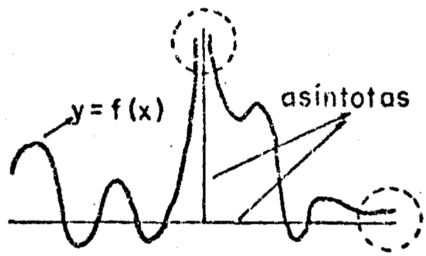

Figura 2

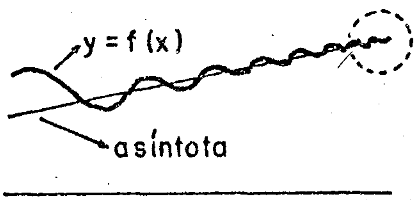

Figura 3

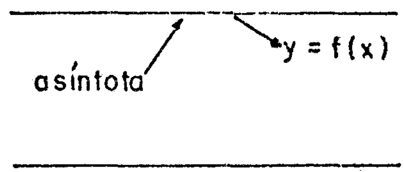

Figura 4

Sea f definida por $f(x)$ una función real y que para una buena parte del tratamiento la supondremos derivable en $(-\infty, a)$ ó en $(a, +\infty)$ según el caso.

Se define como asíntota de la curva $Y = f(x)$ a una recta $Y = Kx + b$ ó $X = c$ tal que

i — $\lim_{x \to \infty} (f(x) - Kx - b) = 0$

ó bien

ii — $\lim_{x \to c} f(x) = \infty$ para algún c en R.

En el caso i, se dice que la asíntota es oblicua u horizontal y en el caso ii, se dice que la asíntota es vertical. El símbolo ∞ puede entenderse como $+\infty$, $-\infty$ o ambos si es necesario.

Si se considera la función f en el intervalo $[x, x+1]$, después puede estudiarse en $[x-1, x]$, es claro que sí

$$\lim_{x \to \infty} (f(x) - kx - b) = 0 \text{ también se da}$$

$$\lim_{x \to \infty} (f(x+1) - k(x+1) - b) = 0, \text{ igualmente}$$

se llega a

$$\lim_{x \to \infty} [(f(x+1 - f(x)) - (k(x+1) + b - kx - b)] = 0,$$

simplificando se tiene

$$\lim_{x \to \infty} (f(x+1) - f(x) - k) = 0$$

ahora, utilizando el teorema del valor medio en el intervalo mencionado se deduce que

$$\frac{f(x+1) - f(x)}{1} = f'(c)$$

por lo menos para una c en $(x, x+1)$. Remplazando este resultado en el anterior límite se llega a la conclusión siguiente:

$$\text{Si } x \to \infty,\ c \to \infty \text{ y } \lim_{x \to \infty} (f(x+1) - f(x) - k) = 0 \text{ entonces}$$

$$\lim_{c \to \infty} (f'(c) - k) = 0 \text{ ó bien } \lim_{x \to \infty} f'(x) = k.$$

Método

Dada $Y = f(x)$ se puede proceder en el siguiente orden

1) Búsqueda de asíntotas verticales. Para ello bastará encontrar aquellos puntos c tales que

$$\lim_{x \to c} f(x) = \infty$$

2) Búsqueda de asíntotas oblicuas u horizontales.

Para ellos

$$\text{I} — \text{Si} \quad \lim_{x \to \infty} f'(x) = k \,, \qquad \text{la curva } Y = f(x)$$

es candidata a tener asíntotas no vertical; si además, dada k se tiene que

$$\text{II} — \lim_{x \to \infty} f((x) - kx) = b$$

entonces $Y = kx + b$ es una asíntota de la curva determinada por $Y = f(x)$.

Ejemplo 1.- Estudiar las asíntotas posibles de $Y = (X)^{1/2}$. No tiene asíntotas verticales puesto que no existe a en R tal que $\lim_{x \to a} (X)^{1/2} = \infty$, aquí se tendrá $\lim_{x \to a} X^{1/2} = a^{1/2}$ por la continuidad de $(X)^{1/2}$.

Como $f'(x) = X^{-1/2}/2$ y $\lim_{x \to +\alpha} X^{-1/2}/2 = 0$, la función es candidata a tener asíntotas no verticales. Pero $\lim_{x \to +\infty} (X^{1/2} - 0) = + \alpha$ por lo tanto no existen asíntotas verticales.

Ejemplo 2.- Estudiar las asíntotas posibles de $Y = (X + 1)/X$.

Asíntotas verticales, $\lim_{x \to 0} (X+1)/X = \pm \infty$, luego $X = 0$ es una asíntota vertical. Nótese que en este punto la función es «discontinua».

Asíntotas no verticales. $Y' = -X^{-2}$, $\lim_{x \to +\infty} -X^{-2} = 0$ y

$$\lim_{x \to -\infty} -\frac{1}{X^2} = 0 \,. \quad \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{X+1}{X} - 0\right] = 1 \text{ y } \lim_{x \to -\infty} \left[\frac{X+1}{X} - 0\right] = 1$$

y así $Y = 1$ es una asíntota de $Y = \dfrac{X}{X+1}$.

Nótese que el comportamiento asintótico se presenta en los «extremos», lejanía tanto derecha como izquierda de la recta $Y = 1$ y superior e inferior de la recta $x = 0$.

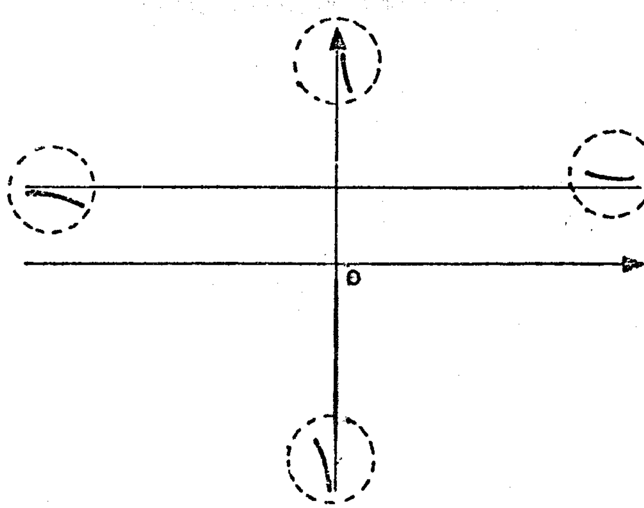

Figura 5: esquema del ejemplo 2.

Ejemplo 3.- Encontrar asíntotas de $Y = x\,EXP(x)/(EXP(x) - 1)$. Asíntotas verticales $\lim_{x \to 0} x\,EXP(x)/(EXP(x) - 1)$ forma indeterminada [0/0]

aplicando el método de L'Hopital se tiene

$$\lim_{x \to 0} (x\,EXP(x)/(EXP(x) - 1) = \lim_{x \to 0} EXP(x)\,(1+X)/EXP(x) =$$
$$\lim_{x \to 0} 1 + X = 1,$$

luego la función dada no tiene asíntotas verticales.

Asíntotas no verticales. $f'(x) = EXP(x)\,[EXP(x) - X - 1]/[EXP(x) - 1]^2$
$\lim_{x \to +\infty} f'(x) = 1$ y $\lim_{x \to -\infty} f'(x) = 0$

existiendo dos posibles asíntotas.

Ahora,

$$\lim_{x \to +\infty} (xEXP(x)/(EXP(x) - 1) - X = 0 \text{ y } \lim_{x \to -\infty} xEXP(x)/(EXP(x) - 1 - 0 = 0$$

concluyéndose que $Y = X$, $Y = 0$ son asíntotas de $Y = XEXP(x)/$

(EXP(x) - 1). En contraste con el ejemplo 2, el comportamiento asintótico sólo se presenta en uno de los extremos de cada recta. Por qué?

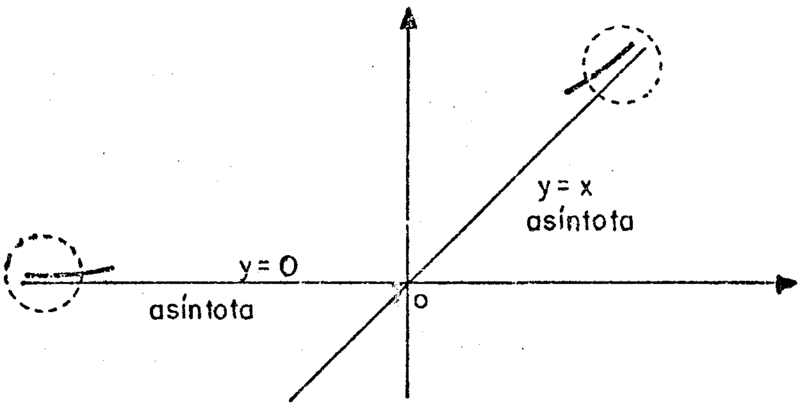

Figura 6: esquema del ejemplo 3.

Ejemplo 4.- Encontrar las asíntotas de $Y = \text{sen}(x)/X$.

Asíntotas verticales. $\lim_{x \to 0} \text{sen}(x)/X = 1$ por tanto no tiene asíntotas verticales.

Asíntotas no verticales. $Y' = (X\cos(x) - \text{sen}X)/X^2$;
$\lim_{x \to +\infty} (X\cos(x) - \text{sen}X(x)/X^2 = 0$

$\lim_{x \to \infty} \text{sen}(x)/X = 0$, luego $Y = 0$ es una asíntota de $Y = \text{sen}(x)/X$

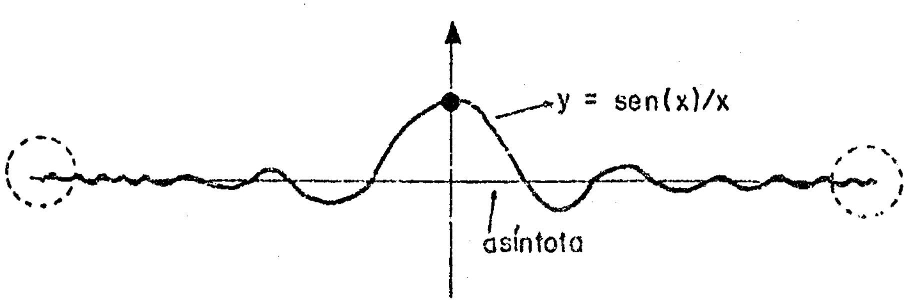

Figura 7 : esquema del ejemplo 4

Es claro que la búsqueda de asíntotas tiene una gran importancia en trazado de gráficas, pero se invita al lector a pensar en comportamientos asintóticos más generales para lo cual sugerimos la siguiente definición: dos curvas $Y = f(x)$, $Y = g(x)$ tienen comportamiento asintótico si

$$\lim_{x \to \infty} [f(x) - g(x)] = 0$$

o bien

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = \infty \text{ para algún } a \text{ en } R.$$

Ejemplo: $Y = X^{-2}$ $Y = X^{-3}$ son curvas asintóticas.

Problema.- Dar un ejemplo de curvas mutuamente asintóticas y que no tengan una recta asintótica.

Ejercicios

Hallar las asíntotas y construir las gráficas de

$Y = X + \arccos(X^{-1})$, $Y = \mathrm{Ln}(2 + \mathrm{EXP}(x))$

$Y = (X^2(1 - X))^{1/3}$; $Y = (X^2 + 1)/X^2$; $Y = X^3/(X^2 + X - 2)$

Es posible que una curva tenga comportamiento asintótico con respecto a un punto?

Se recomienda como lectura complementaria el capítulo pertinente del Cálculo Diferencial e Integral de PISKUNOV, Tomo 1. En algunos tópicos sobre series y sucesiones pueden encontrarse con temas referentes a desarrollos asintóticos de igual manera que en los cursos de ecuaciones diferenciales.