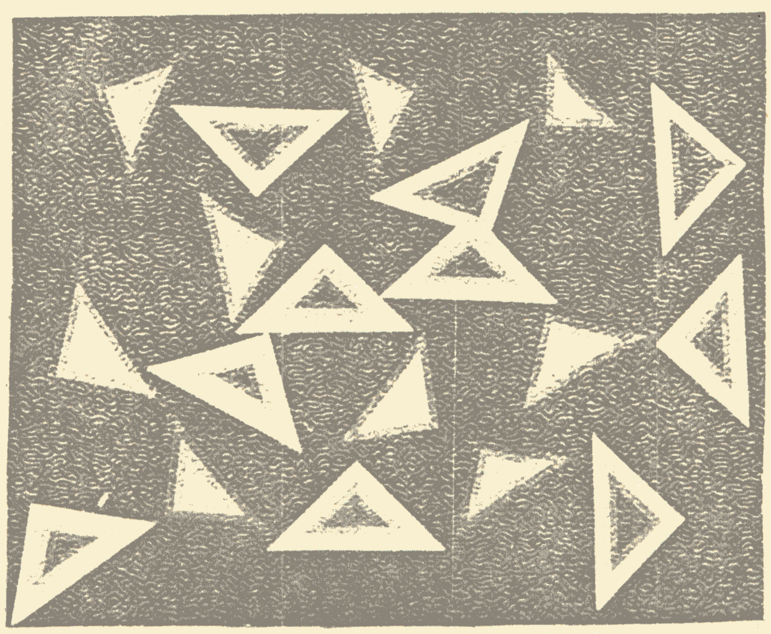
EDITORIAL

Este tercer número de Integración, aunque aparece algún tiempo después de lo que nos habíamos propuesto, condensa el esfuerzo de quienes promovemos esta revista seguros de que su calidad crece, orientándose con pasos firmes hacia la meta de ser un elemento integrante del quehacer matemático en el medio educativo de nuestra región. Cuando hablamos de calidad no nos referimos a las alturas incomprensibles para la mayoría, que aunque merecen elogio y admiración desbordan nuestro propósito fundamental de hacer una revista para todos. Es decir buscamos artículos que resulten motivadores y estimulen la creatividad matemática que existe en todo nivel y que se esconde como un metal precioso bajo la apariencia aveces oscura de la diaria actividad de profesores y alumnos.

Cada detalle, pregunta o tema puede abrir la puerta a interesantes incursiones en terrenos de la matemática o disciplinas relacionadas con ella, como la pedagogía, la historia, la psicologia .... etc.

Tenemos fé en que la fidelidad a esta filosofía nos ayudará a desarrollar un instrumento eficaz que mantenga vivo el espíritu matemático.



TEORIA DE NUMEROS EN EL JUEGO "SOLITARIO"

B.M. STEWART

Recopilado y adaptado por Rafael Isaacs

1. PARIDAD:

Casi todos los textos sobre teoría de números contienen interesantes problemas y juegos cuya solución depende de alguna manera de las propiedades de los enteros. Presentamos aquí la descripción del juego de solitario. Primero introduciremos lo poco de Teoría de números que se requiere en la Teoría Matemática asociada con este juego.

Cuando dividimos un entero a por 2 es posible obtener como residuo r, o bien $r=0$ o bien $r=1$. Si $r=0$ entonces a se dice que es par y tendrá la forma $a=2q$; cuando $r=1$, el entero a es llamado impar y tiene la forma $a=2q+1$. Si dos enteros s y t son ambos pares, o ambos impares se dice que son igual paridad, pero si uno es par y otro impar diremos que son de diferente paridad.
Necesitaremos el siguiente resultado:

Lema:
La Diferencia $s-t$ de dos enteros positivos es par, sí y sólo sí, s y t son de igual paredad.

Prueba: Los 4 casos posibles son los siguientes:

$$2s-2t = 2(s-t) \qquad \text{(ambos pares)}$$
$$(2s+1)-2t = 2(s-t)+1 \qquad \text{(s impar, t par)}$$
$$(2s+1)-(2t+1) = 2(s-t) \qquad \text{(ambos impares)}$$
$$2s-(2t+1) = 2(s-t-1)+1 \qquad \text{(s par, t impar)}$$

2. EL JUEGO DE SOLITARIO:

De remoto origen es el juego que describiremos, aunque la primera referencia matemática que se conoce de él lo debemos a Leibnitz. El juego de solitario se desarrolla sobre un tablero de forma arbitraria repartido en cuadros los cuales están arreglados en columnas y filas. En determinados cuadros aparecen piezas de juego, a lo más una por cuadro. Un movimiento o salto, es posible cuando sobre 3 cuadros adyacentes A, B, C de una fila o columna (pero no una diagonal) hay piezas sobre A y B pero no sobre C. El salto consiste en mover la pieza que está sobre A hasta C, retirando del juego la pieza que está sobre B. El objeto del juego es llevar las piezas hasta cierto configuración preestablecida en el tablero (usualmente se debe dejar una única pieza en el campo) por medio de una sucesión de saltos (es claro que la posición inicial debe tener al menos un lugar vacío).

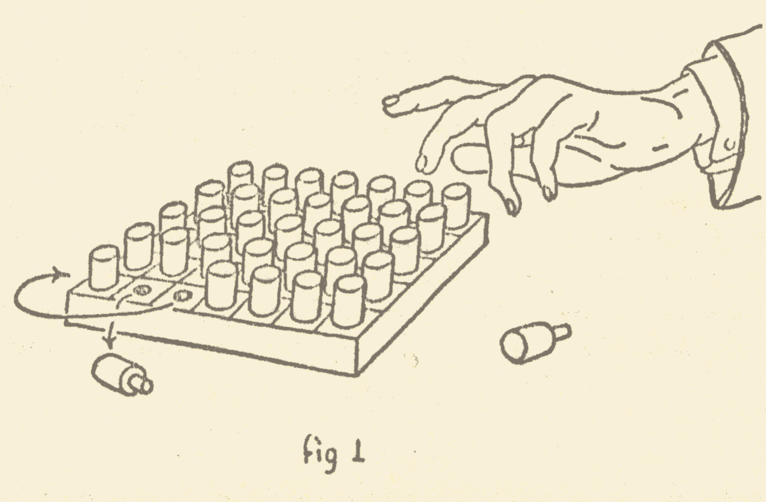


fig 1

El objeto del estudio matemático de solitario es averiguar si a algún juego propuesto de solitario es imposible hallarle solución o si el resultado final está determinado de alguna manera. Queremos escribir una ecuación que describa el proceso del juego, que tendrá como variable el número de piezas y el número de saltos, es pues natural utilizar números enteros porque no encontramos "medio" salto ni "siete cuartos" de fichas y estos procedimientos conllevan generalmente a lo que se llama un problema diofántico.

Se facilita nuestro análisis si marcamos los cuadros de cada diagonal, de izquierda a derecha y de manera sistemática: primero, una diagonal se coloca, digamos, de verde, la siguiente de azul, la siguiente de rojo y la siguiente de verde, continuando de manera cíclica: azul, rojo, verde; azul, rojo, verde, etc. Por ejemplo la figura dos (2), representa un tablero rentangular marcado según las abreviaciones obvias: V para el verde, A para el azul, R para el rojo. Dicho tablero rectangular será de 7x5

V	A	R	V	A
A	R	V	A	R
R	V	A	R	V
V	A	R	V	A
A	R	V	A	R
R	V	A	R	V
V	A	R	V	A

Fig 2

Coloreando el tablero de ésta manera, vemos que mediante cualquier salto, el número de piezás sobre cierto color crece en una unidad mientras el número de fichas en los otros colores decrece cada uno en una unidad. Ahora, utilizaremos las letras V, A, R para indicar el número de piezas inicialmente colocadas sobre los cuadros verde, azul y rojo, respectivamente. Las letras v, a, r, nos indicarán, respectivamente, el número de saltos terminados en cuadros verdes, azules o rojos. Usaremos V', A', R' para indicar respectivamente el número de fichas que aparecen en la posicion final en cuadros de color verde, azul o rojo, respectivamente.

Teniendo en cuenta la observación previa acerca del efecto causado por cada salto, vemos que estos enteros deben satisfacer el siguiente sistema de ecuaciones:

$$V + v + a - r = V'; \quad A + a - v + r = A; \quad R + r - v - a = R' \qquad (1)$$

Por cualquiera de los métodos usuales, tales como sumar las ecuaciones por parejas, se puede probar que el sistema (1) es equivalente al siguiente sistema de ecuaciones:

$$2v = (A+R) - (A'+R'); \quad 2a = (V+R) - (V'+R'); \quad 2r = (V+A) - (V'+A') \qquad (2)$$

Ahora, como las variables son enteros, estamos en posibilidad de aplicar el lema enunciado, mostrando un conjunto de condiciones necesarias para que el juego de solitario tenga solución posible, referente a las distribuciones inicial y final de las fichas. Estas son:

$$\left.\begin{array}{lll} V+A & \text{y} \; V'+A' & \text{Son de la misma paridad} \\ V+R & \text{y} \; V'+R' & \text{Son de la misma paridad} \\ A+R & \text{y} \; A'+R & \text{Son de la misma paridad} \end{array}\right\} \qquad (3)$$

El conjunto de condiciones (3) algunas veces puede ser de mucho poder pues él mismo puede decidir si un juego propuesto de solitario no tiene solucion. Otro conjunto de condiciones necesario, se obtiene si se colorean las diagonales en sentido contrario. Si este nuevo conjunto de condiciones falla, el juego será imposible. Si estos dos conjuntos de soluciones se satisfacen, para generalizar una solución se debe hacer un análisis

Para aplicar esta teoría al tablero representado en la figura Nº 2. Suponga que el cuadro del extremo superior izquierdo es el que inicialmente se encuentra vacio, de esta forma los valores de las variables V, A y R son: V=11, A=12, R=11, si se quiere llevar al final del juego con una única ficha los valores posibles de (V', A', R') serán: (1, 0, 0), (0, 1, 0) ó (0, 0, 1). Pero la primera y última de estas sugerencias son imposibles pues no cumplen las condiciones ③. Así, por ejemplo, dejar la última ficha en el cuadro inferior izquierdo es un juego sin solución.

Ahora, podemos dibujar las diagonales en sentido contrario con los colores naranja, marrón y blanco, simbolizados por las letras N, M, y B, respectivamente, en la figura Nº 3. Haciendo un análisis semejante al de las otras diagonales obtenemos que para que el juego tenga solución posible, el valor de (N', B', M') debe ser (0, 1, 0)

N	B	M	N	M
M	N	B	M	N
B	M	N	B	M
N	B	M	N	B
M	N	B	M	N
B	M	N	B	M
N	B	M	N	B

fig 3

Combinando estos dos conjuntos de condiciones, vemos que empezando el solitario con un tablero 7x5 y el cuadro vacío en el extremo superior izquierdo, las piezas finales deben estar colocados en los cuadros marcados por una X en la figura Nº 4, pues ellos son los únicos blancos y azules según cada nomenclatura.

	X			X
	X			X
	X			X

fig 4

Mientras para un no iniciado este resultado puede parecerle de carácter místico, nosotros palpamos la facinante atracción de la Teoría de números cuando vemos que resultados tan sencillos como el Lema enunciado, explican situaciones como ésta.

3. SOLITARIO DE LA CRUZ ROJA:

Para ilustrar una variación del Solitario con más dificultad consideramos el tablero 7x5 y estudiaremos la posibilidad de que empezando con determinado cuadro inicialmente vacío, se llevan cinco piezas a la posición final que muestra la figura Nº 5. Como este juego inicialmente se propuso altruístamente, nos tomamos la Libertad de llamarlo "Solitario de la Cruz roja"

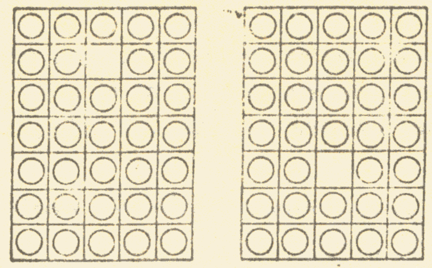
		O		
	O	O	O	
		O		

fig 5

El tablero completo tiene valores V=12, A=2, R=11. Analizando las condiciones de paridad ③, vemos que se satisfacen unicamente si el cuadro inicialmente vacío es verde. Similarmente, refiriendonos al otro conjunto de diagonales vemos que el cuadro inicialmente vacío debe ser blanco. Obtenemos así las posibles configuraciones iniciales, son los casos 1 y 2 de la figura Nº 6. Para Probar que estas condiciones son también suficientes exhibiremos una solución para cada caso paso a paso.

El lector, naturalmente no rehusará a enfrentarse para encontrar él mismo la solución, pero si se cansa por los sucesivos fracasos hasta perder el interés por el final la indicamos paso a paso en la figura Nº 7. En esta figura las primeras dos filas muestran cómo ambos casos pueden conducirse a situaciones comunes, para trabajarse de igual forma como se muestra en las otras filas. En cada diagrama un circulo con "mas" significa la ficha que se moverá y el círculo de "menos" nos indica la ficha que saldrá del juego. Las flechas que conectan los diagramas nos muestran la sucesión de saltos que han de seguirse.

Caso 1



Caso 2

Fig 6

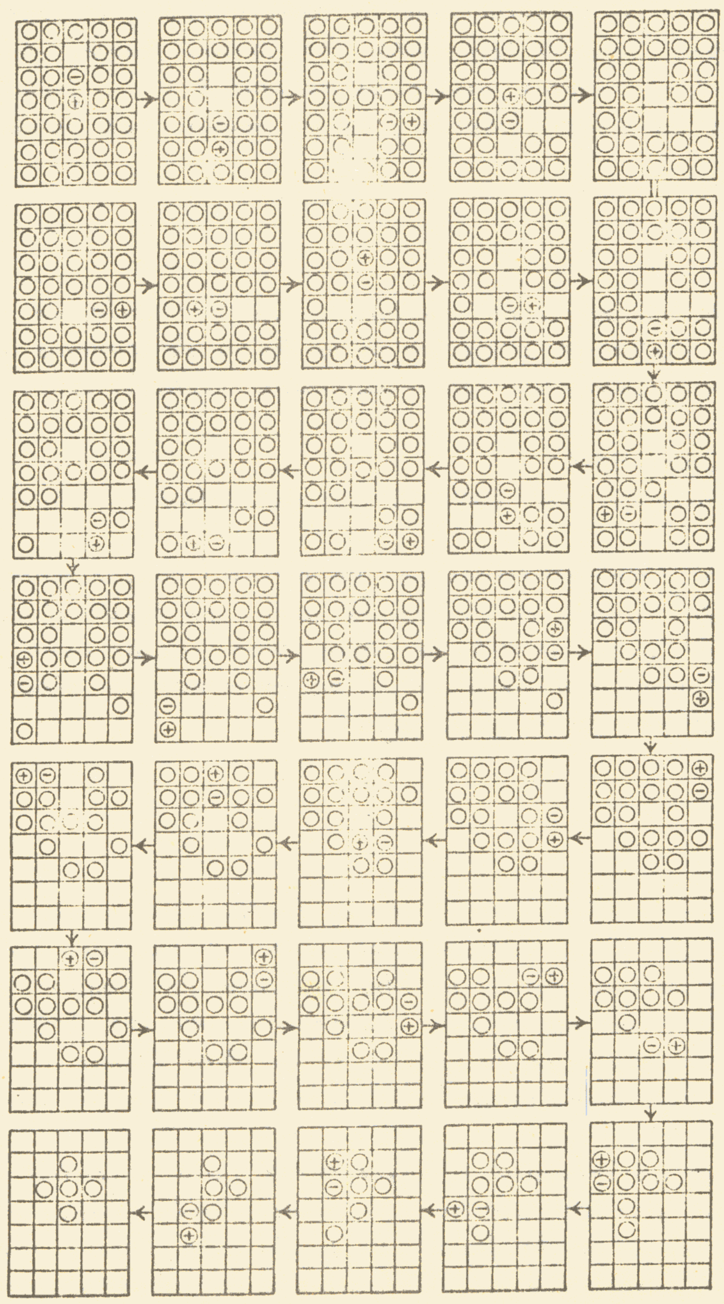


Fig 7