

QUE ES Y QUE HACE LA TOPOLOGIA

Profesor: Edilberto Reyes, UIS

Gran número de personas interesadas en la Matemática, en su desarrollo, en las ideas fundamentales de algunas de sus áreas desearán tener una idea precisa aunque sencilla de lo QUE ES y lo QUE HACE LA TOPOLOGIA.

En lenguaje simple y no propiamente técnico el presente artículo intentará dar satisfacción a dichas personas.

PROPIEDADES GEOMETRICAS CUALITATIVAS

Recordemos que en Geometría elemental las propiedades que se estudian de las figuras son en su gran mayoría propiedades métricas, es decir propiedades que de alguna manera dependen de la noción de distancia, magnitud o de alguna medida como igualdad de dos triángulos, medida de ángulos, perpendicularidad, área de figuras planas, volumen etc. Sin embargo hay propiedades de las figuras geométricas que carecen totalmente de la noción de magnitud o de medida y que no se estudian en esta geometría. Veamos algunas de estas propiedades.

En primer lugar consideremos las siguientes figuras geométricas planas.

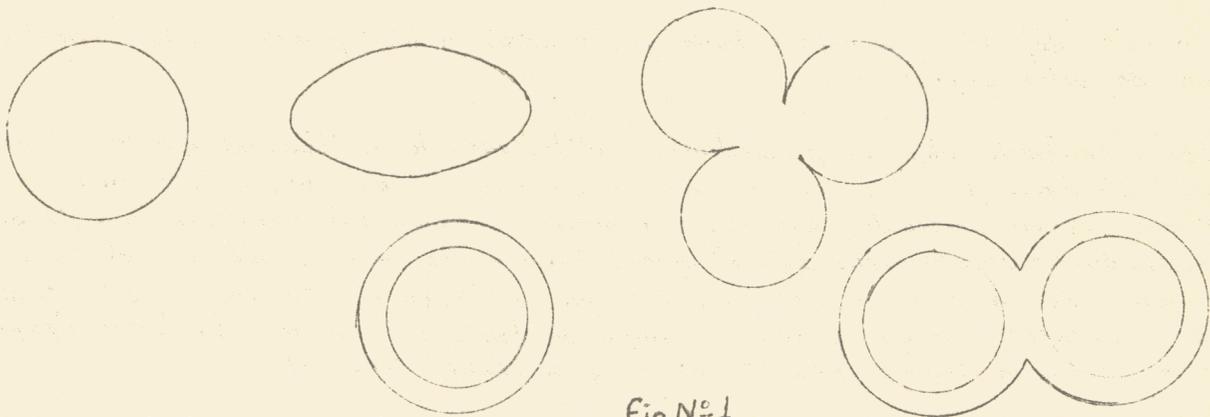


Fig N°1

Obviamente todas tienen propiedades métricas diferentes, sin embargo a primera vista, estamos de acuerdo en que las tres primeras (circunferencia, elipse, triébol) tienen en común algunas propiedades no-métricas que no poseen las dos últimas (corona circular, figura en forma de ocho), es decir existen algunas **propiedades cualitativas**, que tienen digamos las tres primeras figuras y que no las tienen las otras dos, una de ellas es "dos puntos cualesquiera situados en el exterior de dichas figuras siempre pueden unirse por una curva simple que no corta la figura", propiedad que no tienen las dos últimas.

También "para cualquier curva cerrada simple^(*) localizada en el interior de las tres primeras figuras, la superficie limitada por tal curva está completamente contenida en el interior de la figura", cosa que no ocurre en la corona circular y la figura plana en forma de ocho.

Imaginemos ahora una superficie esférica, otra en forma de anillo (superficie de flotados o salvavidas) llamada "toro" y otra en forma de ocho (dos salvavidas pegados). Las tres tienen también propiedades métricas diferentes, pero como antes, podemos observar que cada una de ellas tiene ciertas **propiedades cualitativas** que no poseen las otras dos.

Una de estas propiedades cualitativas (muy interesante) puede expresarse así: "si trazamos cualquier curva cerrada simple sobre la superficie esférica y hacemos un corte a lo largo de ella, la esfera queda dividida en dos partes," situación que no siempre ocurre en las otras dos superficies. (Ver Fig. N. 2)

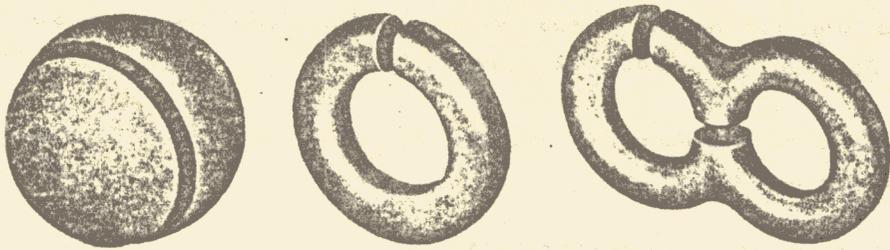


Fig N° 2

Sin embargo el corte a lo largo de dos curvas cerradas simples que no se intersectan siempre divide al toro; número de cortes que no son suficientes para dividir la superficie en forma de ocho.

Esta propiedad cualitativa se denomina "GÉNERO" y puede definirse como "el número de cortes hechos a lo largo de curvas cerradas simples sin intersección que pueden hacerse sobre una superficie sin que quede dividida en dos partes."

Según esta definición la esfera tiene género cero, el toro género 1 y la superficie en forma de ocho género dos.

Hemos encontrado algunas propiedades cualitativas, todas aparentemente diferentes, tienen sin embargo, algo común que nos proponemos aclarar, no sin antes mencionar algunas en particular que por sí mismas son muy interesantes. Una de ellas denominada "número cromático" está íntimamente relacionada con el famoso "Problema de los cuatro colores" que fué planteado, en el año 1852 por el inglés FRANCIS GUTHRIE y cuya prueba completa se logró solamente 1240 años después por los norteamericanos KENNETH APPEL y WOLFGANG HAKEN (* *)

El número mínimo, de colores suficientes para colorear cualquier mapa sobre una superficie con la condiciones de que regiones vecinas (con una curva como frontera común) tengan colores diferentes es lo que llamamos número cromático de dicha superficie. La conjetura de los cuatro colores afirma que para toda superficie plana su número cromático es 4.

Otro famoso problema topológico es el de los "Siete puentes de Königsberg" cuya solución debido a Leonardo Euler forma junto con su brillante fórmula ("Formula Euler")^(***) el origen de la moderna "Teoría de la Red" de grandes aplicaciones en circuitos eléctricos, administración y economía.

TOPOLOGIA - GEOMETRIA DEL CAUCHO-

Para aclarar lo común en las propiedades cualitativas, imaginemos una figura geométrica cualquiera hecha de un material elástico, que podemos torcer, estirar, contraer etc, en general que podemos someter a todo tipo de deformaciones sin que haya roturas ni adherencia. (puntos que están separados no se pueden unir).

Muchas propiedades de nuestra figura sujeta a las deformaciones descritas se perderán, sin embargo algunas de ellas se mantendrán y son precisamente las que hemos venido llamando propiedades cualitativas que en adelante llamaremos **propiedades Topológicas** y que son el objeto de estudio de la Topología.

En este tipo de Geometría dos figuras se consideran equivalentes (del mismo tipo topológico o topológicamente equivalentes) si podemos pasar de la una a la otra por medio de cualquier deformación con la condición de que se respete la continuidad. (no haya roturas ni adherencias). Según esto en la fig 1, las tres primeras curvas son topológicamente equivalentes, mientras que en la fig 2 cada superficie es de diferente tipo topológico.

Podemos decir entonces de un modo aproximado que "La Topología es el estudio de La Geometría de Las figuras de caucho". Definición que se puede precisar con el concepto de homeomorfismo (función uno a uno, sobre y bicontinua, es decir la función y su inversa son funciones continuas).

Consideremos por último los siguientes grupos de figuras topológicamente equivalentes (Ver fig. 3)

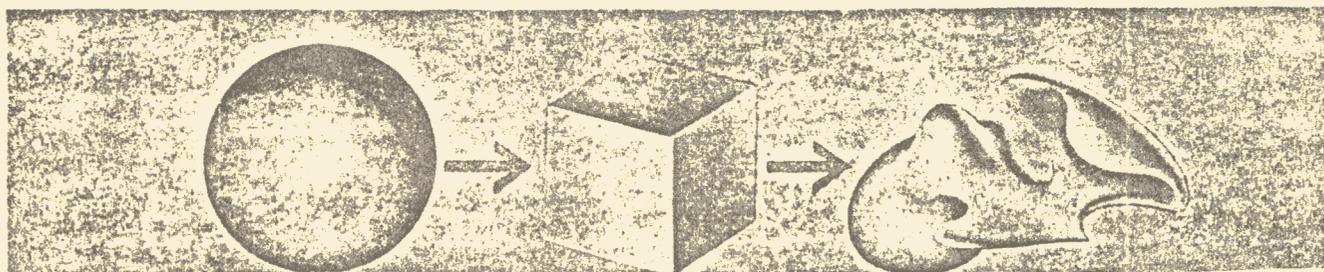
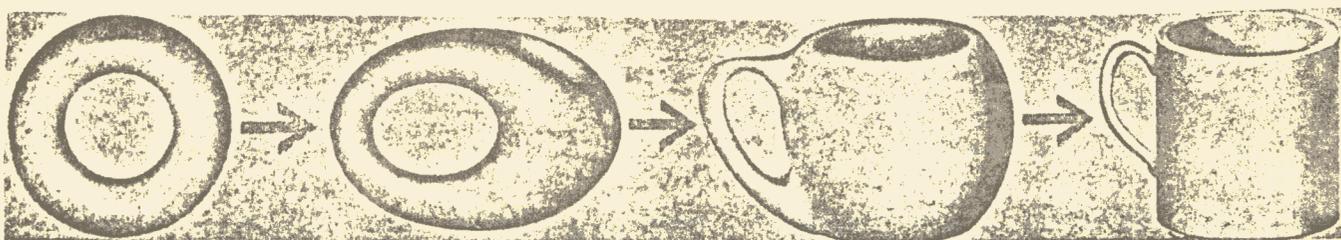


Fig 3

Observando el primer grupo de ellas podría decirse que un experto en Topología o un topólogo "Es aquella persona que no distingue entre un rescón y una taza de café". Ya que para él las dos figuras son esencialmente iguales.

TOPOLOGIA ABSTRACTA Ó TOPOLOGIA GENERAL

El tipo de figuras y de propiedades cualitativas que consideramos en las anteriores descripciones no es sin embargo el tema que se desarrolla en los primeros cursos de Topología, en ellos las figuras se consideran como conjuntos de puntos de naturaleza arbitraria (puntos- funciones- curvas etc).

Este tipo de Topología llamada Topología General inició su desarrollo con la aparición de la Teoría de Conjuntos creada por George Cantor, sólo que en su comienzo se llamó Topología Conjuntista; en ella se consideraban solamente conjuntos de puntos lográndose particularmente obtener fundamentales resultados sobre la Topología de la recta y el plano.

Cambiando conjuntos de puntos por conjuntos de funciones o de curvas se logró establecer que lo fundamental era la noción de estructura topológica entre los elementos del conjunto y no la naturaleza de tales elementos, estableciéndose de esta forma y con precisión la noción de estructura y de Espacio Topológico en general; nociones con las que iniciamos nuestros primeros cursos de Topología llamada más bien, Introducción a la Topología abstracta ó a la Topología General.

- (*) Curva cerrada simple: Curva del espacio que empieza y termina en el mismo punto sin cortarse consigo mismo.
- (**) La descripción del método seguido para probar la conjetura de los cuatro colores puede verse en la Revista "Investigación y Ciencia" de Diciembre 1978.
- (***) Fórmula de Euler, establece que para todo poliedro simple (sin huecos) se tiene que $V - A + C = 2$, donde:
 - V: Número de vértices
 - A: Número de Aristas
 - C: Número de caras del poliedro

BIBLIOGRAFIA (Lecturas recomendadas)

1- La Matemática su Contenido Métodos y significado (Tomo 3)
A. D. Aleksandrov - A. N. Kolmogorov - M. A. Laurentiev y otros
Editorial Alianza.

2- Sigma. El Mundo de las Matemáticas, (Tomo 4)
Jaimes R. Newman. Ediciones Grijalbo.

En estos libros de lectura agradable, concisa y algunas veces sin el rigor matemático y la precisión del lenguaje técnico que frecuentemente desestimula a quienes por primera vez leen sobre un tema desconocido pueden obtenerse las ideas fundamentales en Topología, sus comienzos, los problemas topológicos de particular interés, sus aplicaciones y relaciones con otros temas hasta la dirección de las actuales investigaciones topológicas.

Quienes estén interesados en las nociones básicas de Topología General pueden consultar:

3- Introducción a la Topología General. J. M. Muñoz Quevedo. Dpto. de Matemática Universidad Nacional.

4- Introducción a la Topología General. J. Horvath. Monografía Matemática OEA.

5- Fundamentos de la Topología General. D. Bushaw. Editorial Limusa Wuley

6- Elementary General Topology Gemignani. Addison Wesley

Estos últimos libros no exactamente con el mismo enfoque son por su claridad en la exposición y el abundante número de ejercicios y problemas muy apropiados para quienes se inician en esta disciplina matemática.

Cal/G. J. M. M.