METODOS PARA RESOLVER LA ECUACION

GENERAL DE 4º GRADO

Por: Ing. Eduardo Moreno Blanco, Profesor UIS

Continuamos la presentación de estos trabajos sobre ecuaciones algebráicas explicando procedimientos propuestos para resolver la ecuación general bicuadrática, o sea la de Cuarto Grado, cuya forma general es:

$$f(x) = x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0 \qquad (1)$$

METODO DE FERRARI

El descubrimiento de una solución para la ecuación de la forma (1) se debe a Ludovico Ferrari, (1522 - 1565), matemático italiano que fuera discípulo de Cardano. Es especialmente interesante hacer notar que Ferrari alcanzó este logro cuando aún no tenía 23 años de edad, una coincidencia notable con los casos de Abel y Galois, quienes hicieron sus más importantes aportes a la Teoría de Ecuaciones cuando aún no habían llegado a esta edad.

Ferrari observó q. los dos primeros términos de la ecuación (1) se obtiene del desarrollo cuadrático del trinomio

$$\left(x^2 + \tfrac{1}{2}px + K\right)^2 = 0 \qquad (2)$$

de donde concluyó que la ecuación dada era posible convertirla en cuadrado perfecto completando lo que le faltara del término de 2º grado en adelante, se le ocurrió que esto podía conseguirlo agregando la cantidad $(ax+b)^2$, reduciéndoce el problema a encontrar las cantidades a y b que hicieran esto posible. Por tanto ecuación (1) se transforma en:

$$x^4 + px^3 + (q + a^2)x^2 + (r + 2ab)x + (s + b^2) = (ax + b)^2 \qquad (3)$$

La primera parte de esta ecuación se supone es un cuadrado perfecto de la forma:

$$\left(x^2 + \tfrac{1}{2}px + K\right)^2 = x^4 + px^3 + \left(\frac{p^2}{4} + 2K\right)x^2 + pKx + K^2 \qquad (4)$$

igualando los coeficientes de (3) y (4) se obtienen tres ecuaciones que permiten determinar K, a y b, en efecto:

$$q + a^2 = \frac{p^2}{4} + 2K \quad \Rightarrow \quad a^2 = \frac{p^2}{4} + 2K - q \qquad (5)$$

$$r + 2ab = pK \quad \Rightarrow \quad ab = \frac{pK - r}{2} \qquad (6)$$

$$s + b^2 = K^2 \quad \Rightarrow \quad b^2 = K^2 - s \qquad (7)$$

Multiplicando (5) y (7) e igualando el resultado con el cuadrado de (6) se obtiene la siguiente ecuación cúbica en K:

$$K^3 - \tfrac{1}{2}qK^2 + \left(\frac{pr}{4} + s\right)\frac{K - p^2 s + r^2 - 4qs}{6} = 0 \qquad (8)$$

Las soluciones reales de (6), por los procedimientos ya explicados, permiten regresar a las ecuaciones (5) y (7) para calcular a y b y a continuación se plantea la ecuación original en la forma:

$$\left(x^2 + \tfrac{1}{2}px + K\right)^2 = (ax + b)^2 \qquad (9)$$

o sea que:

$$x^2 + \tfrac{1}{2}px + K = \pm(ax + b) \qquad (10)$$

Las soluciones de estas dos ecuaciones cuadráticas son las cuatro soluciones de la ecuación general (1).

SEGUNDO PROCEDIMIENTO (Método de Descartes)

A Renato Cartesius, nombre latinizado del genial filósofo y matemático francés René Descartes, se debe un procedimiento muy original para resolver la ecuación de 4º Grado de la forma ①, expuesto por primera vez en 1637.

Descartes comienza por suprimir el término cúbico de la ecuación, mediante la sustitución, $x = y + K$, en donde K, es una constante por determinar, que cumpla el objetivo propuesto. Por tanto la ecuación queda reducida a la forma

$$y^4 + q_1 y^2 + r_1 y + s_1 = 0 \qquad (11) \quad * \text{ ver nota.}$$

Descartes observó que la ecuación ⑪ se podía descomponer en dos factores de la forma:

$$(y^2 + ay + b)(y^2 - ay + c) = 0 \qquad (12)$$

Por tanto, determinando los coeficientes a, b, c, se tiene resuelta la ecuación ⑪ y por consiguiente la ecuación ①, agregándole la cantidad K. El desarrollo de la ecuación ⑫ es:

$$y^4 + (c + b - a^2)y^2 + a(c - b)y + bc = 0 \qquad (13)$$

Por igualación de coeficientes entre ⑪ y ⑬ se obtienen los mencionados coeficientes. En efecto:

$$c + b - a^2 = q_1, \qquad a(c - b) = r_1, \qquad bc = s_1$$

De las dos primeras se obtiene:

$$c = (1/2)(q_1 + a^2 + r_1/a) \quad y \quad b = (1/2)(q_1 + a^2 - r_1/a)$$

reemplazando en la última se llega a:

$$a^6 + 2q_1 a^4 + (q_1^2 - 4s_1)a^2 - r_1^2 = 0$$

ecuación cúbica en a^2, la cual tiene por lo menos una solución real y positiva, que permite calcular un valor real de a y por tanto de b y c. Una vez determinadas estas constantes se resuelven a continuación los factores de ⑫

$$y^2 + ay + b = 0 \quad y \quad y^2 + ay + c = 0$$

que suministran las 4 soluciones de la ecuación reducida ⑪ y por tanto las de ①

* NOTA: Completamos el procedimiento de Descartes anotando que:

$$K = \frac{-p}{4}, \quad q_1 = \frac{f''(K)}{2!}, \quad r_1 = \frac{f'(K)}{1!}, \quad s_1 = \frac{f(K)}{0!}$$

Ejemplo:
Resolver: $x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 12x + 3 = 0$

a) Método de Ferrari

$p = -4, \quad q = 4, \quad r = -12, \quad s = 3$

Las ecuaciones ⑤, ⑥, ⑦ son: $a^2 = 2K, \quad ab = -2K + b, \quad b^2 = K^2 + 3$

La ecuación ⑧ es: $K^3 - 2K^2 + 9K - 18 = 0$, cuya solución real es 2 (Las otras 2 soluciones son: $3i$ y $-3i$) por tanto los valores de a, y b, son: $a = 2 \wedge b = 1$

Por consiguiente debemos resolver las ecuaciones cuadráticas

$$x^2 + 2x + 2 = 2x + 1$$
$$x^2 - 2x + 2 = -2x + 1$$

cuyas soluciones son:

$$x_1 = 2 + \sqrt{3}, \quad x_2 = 2 + \sqrt{3}, \quad x_3 = \sqrt{3}\, i, \quad x_4 = +\sqrt{3}\, i$$

b) Método de Descartes:

En este caso $k = 1$, $q_1 = -2$, $r_1 = -12$, $s_1 = -8$

La ecuación por resolver es: $y^4 - 2y^2 + 12y + 8 = (y^2 + ay + b)(y^2 + ay + c) = 0$

Para ello debemos resolver la cúbica $a^6 + 4a^4 + 36a^2 + 144 = 0$ cuya solución es:

$$a^2 = 4 \text{ por tanto } a = \pm 2,\quad b = 4 \text{ ó } -2 \text{ y } c = -2 \text{ ó } +4$$

que conducen a buscar la solución de: $y^2 + 2y + 4 = 0$
$y^2 + 2y + 12 = 0$

cuyas soluciones son:

$$y_1 = -1 + \sqrt{3}\,i,\quad y_2 = -1 - \sqrt{3}\,i,\quad y_3 = -1 + \sqrt{3},\quad y_4 = 1 - \sqrt{3}$$

por tanto: $x_1 = \sqrt{3}\,i$, $x_2 = -\sqrt{3}\,i$, $-x_3 = 2 + \sqrt{3}$, $x_4 = 2 + \sqrt{3}$

Para finalizar, dejamos al lector la demostración de los siguientes teoremas relacionados con la Teoría de Ecuaciones:

1) TEOREMA FUNDAMENTAL: Demostrar que toda ecuación algebraica de la forma: $f(x) = p_0x^n + p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} + \dots + p_{n-1}x + p_n = 0$, en donde n es cualquier entero positivo, tiene por lo menos una solución o raíz situada en el plano de los números complejos.
NOTA: como consecuencia de este teorema, se demuestra a continuación que toda ecuación tiene n y solamente n raíces.

2) Si a es una raíz multiple de órden m del polinomio $f(x) = 0$, entonces $(x-a)^{m-1}$ es un factor común de $f(x)$ y $f'(x)$.

3) TEOREMA DEL ROLLE: Demostrar que si $f(x)$ es un polinomio, por lo menos una raíz real de $f'(x) = 0$ está entre dos raíces consecutivas reales de $f(x) = 0$
Consecuencias de este teorema:

a) Si todas las raices posibles de $f(x) = 0$ son REALES, lo serán también las de $f'(x) = 0$, y estas raices separan las de $f(x) = 0$.

b) Si todas las raíces de $f(x) = 0$ son REALES, también lo serán las de $f'(x) = 0$ y $f''(x) = 0$ y $f'''(x) = 0$ etc y las raíces de cualquiera de estas derivadas separan a aquellas de la derivada inmediatamente anterior.

c) Solo una raíz de $f(x) = 0$ puede:
i) estar ubicada entre dos raices consecutivas de $f'(x) = 0$ ó
ii) ser menor que la menor de $f'(x) = 0$ ó
iii) ser mayor que la mayor de $f'(x) = 0$.

d) Si $f'(x) = 0$ tiene n- raices REALES, entonces $f(x) = 0$ no puede tener más de $n+1$ raices REALES.

e) Si $f^n(x) = 0$, la n-sima derivada de $f(x)$, tiene raices imaginarias, entonces $f(x) = 0$ tiene por lo menos ese mismo número de raíces imaginarias.

f) Si se conocen las raíces reales de $f'(x) = 0$, podemos saber la posible ubicación y signo de las raíces reales de $f(x) = 0$, considerando el signo que toma esta función cuando reemplazamos en ella a x por el valor de las raíces reales de $f'(x) = 0$.

C/G.J.M.M.