SOLUCION DE LA ECUACION CUBICA

Por: Ing. Eduardo Moreno Blanco

II PARTE

El procedimiento empleado en el artículo anterior (Integración 2) para expresar la solución de Cardano en forma compleja cuando $p^2+q^3=\Delta<0$, sugiere la idea de emplear el plano de los números complejos aún en el caso $\Delta \geq 0$ para incluír las soluciones imaginarias.

En efecto, si $p^2+q^3=\Delta \geq 0$, sean:

$$\rho_1 = -p+\sqrt{\Delta}$$
$$\rho_2 = -p-\sqrt{\Delta}$$

por tanto podemos escribir:

$$-p+\sqrt{\Delta} = \rho_1(\cos 2\pi m + i \operatorname{Sen} 2\pi m)$$
$$-p-\sqrt{\Delta} = \rho_2(\cos 2\pi m - i \operatorname{sen} 2\pi m)$$

y la solución de Cardano quedaría:

$$y=(-p+\sqrt{\Delta})^{1/3}+(-p-\sqrt{\Delta})^{1/3} = (\rho_1^{1/3}+\rho_2^{1/3})\cos \frac{2\pi}{3} m + i(\rho_1^{1/3}-\rho_2^{1/3}) \operatorname{Sen} \frac{2\pi}{3} m$$

Llamando a la suma y la diferencia de $\rho_1^{1/3}$ y $\rho_2^{1/3}$, S y D respectivamente y asignándole a m los valor 0, 1, 2 sucesivamente, las soluciones de la ecuación (B) del artículo anterior, $(y^3+f'(K)y+f(K)=0)$, quedan de la forma:

$$y_1 = S$$
$$y_2 = -(1/2)(S+i\sqrt{3}\,D)$$
$$y_3 = -(1/2)(S+i\sqrt{3}\,D)$$

RESUMEN:

Para resolver la ecuación cúbica $x^3+ax^2+bx+c=0$, se elimina el término cuadrático, mediante la sustitución $x=y+K$, en donde $K=-a/3$, la ecuación transformada queda: $y^3+F'(K)y+F(K)=0$. Para resolver esta ecuación se hace $p=F(K)/2$ y $q=F'(K)/3$ y se calcula $\Delta=p^2+q^3$

a) Si $\Delta \geq 0$, calculamos $\rho_1=-p+\sqrt{\Delta}$ y $\rho_2=-p+\sqrt{\Delta}$ y a continuación $S=\rho_1^{1/3}+\rho_2^{1/3}$ y $D=\rho_1^{1/3}-\rho_2^{1/3}$ las raíces de la ecuación cúbica reducida son:
$y_1=S$, $y_2=-(1/2)(S-i\sqrt{3}\,D)$, $y_3=(-1/2)(S+i\sqrt{3}\,D)$

b) Si $\Delta<0$, calculamos $\rho=(p^2+\|\Delta\|)^{1/2}$ y $\phi \operatorname{Arc Tg}\left(\frac{\sqrt{\|\Delta\|}}{-p}\right)$ y se aplica

$y=2\rho^{1/3}\left[\cos\left(\phi/3 + (2\pi/3)(m)\right)\right]$ asignándole a m valores 0, 1, 2 sucesivamente

c) Las Soluciones de la Ecuación Cúbica General y Original son las de la Ecuación reducida incrementadas en la cantidad $K=-a/3$

EJEMPLOS

Resolveremos por el procedimiento antes explicado las ecuaciones cúbicas propuestas en el artículo anterior cuyo $\Delta \geq 0$

1) Resolver: $x^3-6x^2+13x+10=0$
en este caso: $K=2$, $p=0$, $q=3^{-1}$, $\Delta=3^{-3}$ y $\sqrt{\Delta}=3^{-3/2}$, $\rho_1=3^{-3/2}$, $\rho_2=-3^{-3/2}$, $S=0$ $D=2\cdot 3^{-1/2}$
Soluciones:
$y_1=0 \Rightarrow x_1=-2$
$y_2=i \Rightarrow x_2=2+i$
$y_3=-i \Rightarrow x_3=2-i$

2) Resolver: $x^3+6x^2+3x+18=0$
$K=-2$, $p=14$, $q=-3$, $\Delta=169$, $\sqrt{\Delta}=13$ $\rho_1=-1$, $\rho_2=-27$, $S=-4$ y $D=2$
$y_1=-4 \Rightarrow x_1=-6$
$y_2=2+\sqrt{3}\,i \Rightarrow x_2=\sqrt{3}\,i$
$y_3=2-\sqrt{3}\,i \Rightarrow x_3=-\sqrt{3}\,i$