SOLUCIONES PARA LA ECUACION $a^x = x$

Por: Gildardo Guzmán
Profesor Dpto. de Matemática UIS

El siguiente artículo es una adaptación del aparecido en la revista The Mathematics Teacher de Marzo de 1979, Volúmen 72, número 3, escrito por George F. Lowerre. El tema que presenta parecerá a muchos sencillo, pero no por esto deja de ser importante, ya que muestra cómo en nuestra labor cotidiana, de profesores de matemática pueden presentarse cosas interesantes que a veces pasamos por alto que merecen comunicarse aun cuando no sean completamente nuevas y originales, cosa por demás difícil.

Dice el autor que un exámen sobre propiedades de los logaritmos preguntó lo siguiente: Dado que $\log_e a = 4$, $\log_e b = 2.8$, $\log_e c = 3.7$. Encontrar los valores de:

$$\log_e (a\sqrt{b})$$
$$\log_e (b/c)$$
$$\log_e (a^5 c)$$

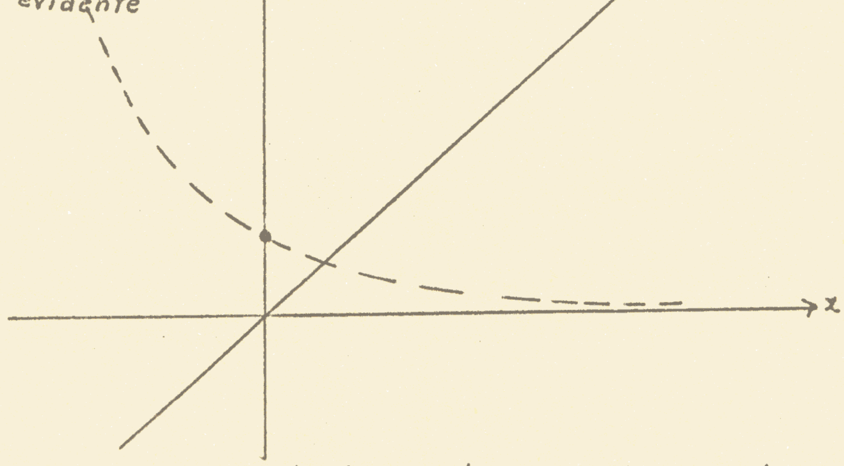
La primera respuesta fué calculada de la siguiente forma:

$$\log_e (a\sqrt{b}) = \log_e a + \tfrac{1}{2}\log_e b = \log_e 4 + \tfrac{1}{2}\log_e 2.8 = 4 + \tfrac{1}{2}\, 2.8 = 4 + 1.4 = 5.4$$

Esta respuesta fué obtenida por este proceso por varios estudiantes y aun cuando la respuesta es correcta, el reemplazo $\log_e 4 = 4$, y, $\log_e 2.8 = 2.8$ no lo es. Tratando de explicar esta situación a los estudiantes se planteó el problema siguiente: Para qué valores de x es $\log_a x = x$? En realidad se atacó el problema equivalente para qué valores de x mayores que cero $a^x = x$. Este es el tema del artículo.

Caso 1) $0 < a < 1$:
Considerando la función $g(x) = a^x + x$: $g(0) = a^0 - 0 = 1 > 0$; $g(1) = a + 1 < 0$. Como g es función continua en $[0,1]$ existe un número $0 < r < 1$ tal que $g(r) = 0$. Esto es $a^r - r = 0$; de donde $a^r = r$. En conclusión si $0 < a < 1$, r es solución; esta solución es única. Si $0 < x < r$, $a^x > a^r = r > x$. Si $r < x$, $r = a^r > a^x$, entonces $x > a^x$ y por tanto r es la única solución.

Graficamente
es un resultado evidente



Caso 2) $a > 1$:
Dada esta situación es más difícil decidir cuando $a^x = x$; Por ejemplo: Si $a = e$, $e^x + x > 0$, para todo $x \geq 0$ y por tanto no existen $x > 0$ que satisfagan la ecuación, sin embargo si $a = \sqrt{2}$, $x = 2$, $x = 4$ son soluciones de la ecuación.
El problema se reduce entonces a averiguar para qué valores de $a > 1$, $a^x = x$ tiene solución.

Si $a^x = x$ tiene solución $x > 0$ entonces $a = x^{1/x}$. Por tanto, el mayor valor de a para el cual $a^x = x$ tiene solución será el máximo de la función $f(x) = x^{1/x}$.

Derivando f, $f'(x) = \frac{f(x)}{x^2}(1 + \ln x)$.

$f(x)$ tomará el valor 0, cuando $\ln x = 1$; esto; cuando $x = e$, si $0 < x < e$, $\ln x < 1$ y entonces $f'(x) > 0$. Si $x > e$, $\ln x > 1$ y así $f'(x) < 0$. Esto muestra que para $x = e$ la función f toma un valor máximo y de aquí que el mayor valor para el cual $a^x = x$ es $a = e^{1/e}$ $((e^{1/e})^e = e)$.

Finalmente se mostrará que si $1 < a < e^{1/e}$, $a^x = x$ tiene dos soluciones.

De nuevo tómese $g(x) = a^x + x$, $(1 < a < e^{1/e})$

1) g es continua en $[0, +\infty)$
2) $g''(x) = a^x \ln^2 x > 0$
3) $g(0) = -1$ $\quad g(e) = a^e + e < 0$
4) $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x/x = \lim\limits_{x \to +\infty} a^x \ln a = +\infty$, de aquí $g(x) > 0$ para valores grandes de x.

De lo anterior se deduce que existe una solución entre 0 y e y que también hay una solución mayor que e. Ya que $g''(x) > 0$ para todo $x \in (0, +\infty)$ su gráfica es cóncava hacia arriba, entonces $g(x)$ sólo tiene dos raíces que son las mismas de $a^x = x$.

Resumiendo:

1) Si $0 < a < 1$ $\quad \log_a x = x$ tiene sólo una solución
2) Si $1 < a < e^{1/e}$ $\quad \log_a x = x$, tiene dos soluciones: una menor que e, y otra mayor.
3) Si $a = e^{1/e}$ entonces $\log_a x = x$ tiene por solución $x = e$
4) Si $a > e^{1/e}$ $\quad \log_a x = x$ no tiene soluciones.

Cal / G.J.M.M.