LAS 'INTEGRALES' DE ARQUIMEDES

Por: Gabriel Yañez y Margarita de Ariza

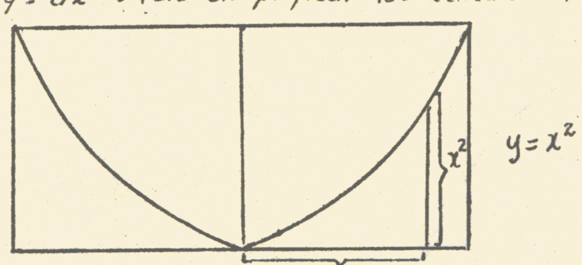
En la introducción del Cálculo de Apostol (Tomo I), el autor se refiere al método de exhaución utilizado por Arquímedes para calcular el área de un segmento parabólico. Sin embargo dice: "... los detalles que siguen no son exactamente los utilizados por él... "
Cómo pues lo hizo?
Con apenas rudimentos del Cálculo Integral, un estudiante puede obtener dicha área sin mayor esfuerzo aunque desconozca por completo la definición y propiedades geométricas de la parábola.

Arquímedes que no contaba con las herramientas del Cálculo Integral resolvió el problema de otra manera.

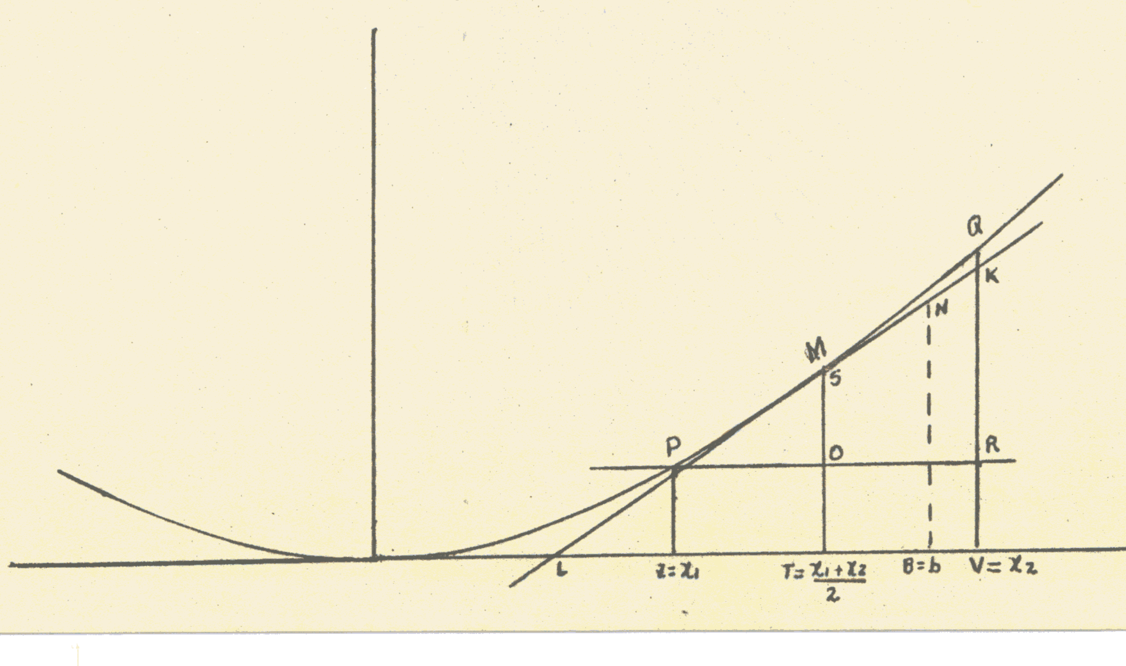
En carta a Dositeo, dice textualmente: " Yo no he oído nunca que ninguno de mis predecesores haya tratado de cuadrar el segmento limitado por una parábola y una línea recta, un problema cuya solución acabo de encontrar. Pues aquí se demuestra que todo segmento limitado por una parábola y una recta es igual a cuatro tercios del triángulo que tiene la misma base y la misma altura que el segmento.... "

Nos permitimos presentar la siguiente demostración de la proposición de Arquímedes utilizando solamente los instrumentos de la geometría de Pitágoras y de Euclides, que de hecho Arquímedes conocía y que en uno u otro órden podía emplear, puesto que no disponemos de una versión completa de su trabajo sino sólo de breves indicaciones del mismo que encontramos en algunos libros de Historia de la Matemática.

Partiendo de la definición que Apolonio (Epsilon) contemporáneo de Arquímides da de la parábola, o de otra equivalente se llega a la relación fundamental que referida a nuestro sistema cartesiano es la ecuación, $y = ax^2$. Para simplificar los cálculos tomamos $a = 1$



Arquímedes demostró que al trazar una paralela al eje de la parábola por el punto medio de la cuerda que une dos puntos cualesquiera, la paralela a la cuerda en el punto de intersección es tangente a la parábola en tal punto. En términos del cálculo esto equivale a demostrar que el punto cuya existencia asegura el teorema del Valor medio para una función continua en un intervalo $[x_1, x_2]$ es el punto medio de ese intervalo si la función corresponde a una parábola.
Demostremos esto sin cálculo.



Sean P y Q dos puntos cualesquiera de la parábola. M el punto medio de $\overline{PQ}$. Por M trazamos una paralela al eje "y" en el punto S donde ésta corta a la parábola, trazamos una paralela a $\overline{PQ}$, la recta LK: esta recta es tangente a la parábola en S: Basta probar que en cualquier punto B entre Z y V diferente del punto medio T, la ordenada de la recta es menor que la de la parábola.
Debemos pues probar que $NB \le b^2$ para todo $b \in [x_1, x_2]$ cumpliéndose la igualdad sólo en
$$b = \frac{x_1+x_2}{2}$$

Por ser PQ paralela a LK; además: PZ, QV, MT, NB perpendiculares a LV, los triángulos rectángulos determinados son todos semejantes y por tanto se establecen las proporciones siguientes:
ΔPQR y ΔSTL:
$\frac{QR}{PR} = \frac{ST}{LT}$, entonces, $LT = \frac{\overline{PR}\times\overline{ST}}{QR} = \frac{(x_2-x_1)\left[(x_1+x_2)/2\right]^2}{x_2^2-x_1^2} = \boxed{\frac{x_1+x_2}{4}}$, pues $x_1 \neq x_2$

pero $LT = LZ + ZT$, entonces, $LZ = LT - ZT = \frac{x_1+x_2}{4} - \left(\frac{x_1+x_2}{2} - x_1\right) = \boxed{\frac{3x_1-x_2}{4}}$

ΔNBL y ΔPQR:
$$\frac{NB}{LB} = \frac{QR}{PR} \Rightarrow NB = \frac{LB\times QR}{PR} = \frac{(LZ+ZB)(x_2^2-x_1^2)}{x_2-x_1} = \frac{\left[(3x_1-x_2)/4 + (b-x_1)\right](x_2^2-x_1^2)}{x_2-x_1}$$

esto nos da: $NB = [b-(x_1+x_2)/4](x_1+x_2)$ y hemos de probar que es $\le b^2$, equivalente a probar que: $b^2 - [b-(x_1+x_2)/4](x_1+x_2) \ge 0$, equivalente a:
$b^2 - b(x_1+x_2) + [(x_1+x_2)/2]^2 \ge 0 \iff [b-(x_1+x_1)/2]^2 \ge 0$, que es lo que nos proponemos demostrar.
La demostración que acabamos de hacer nos asegura que cualquier segmento parabólico se puede inscribir en un paralelogramo cuya área es el punto de partida para las aproximaciones del área del segmento.
Ahora pasemos al cálculo de tales áreas:

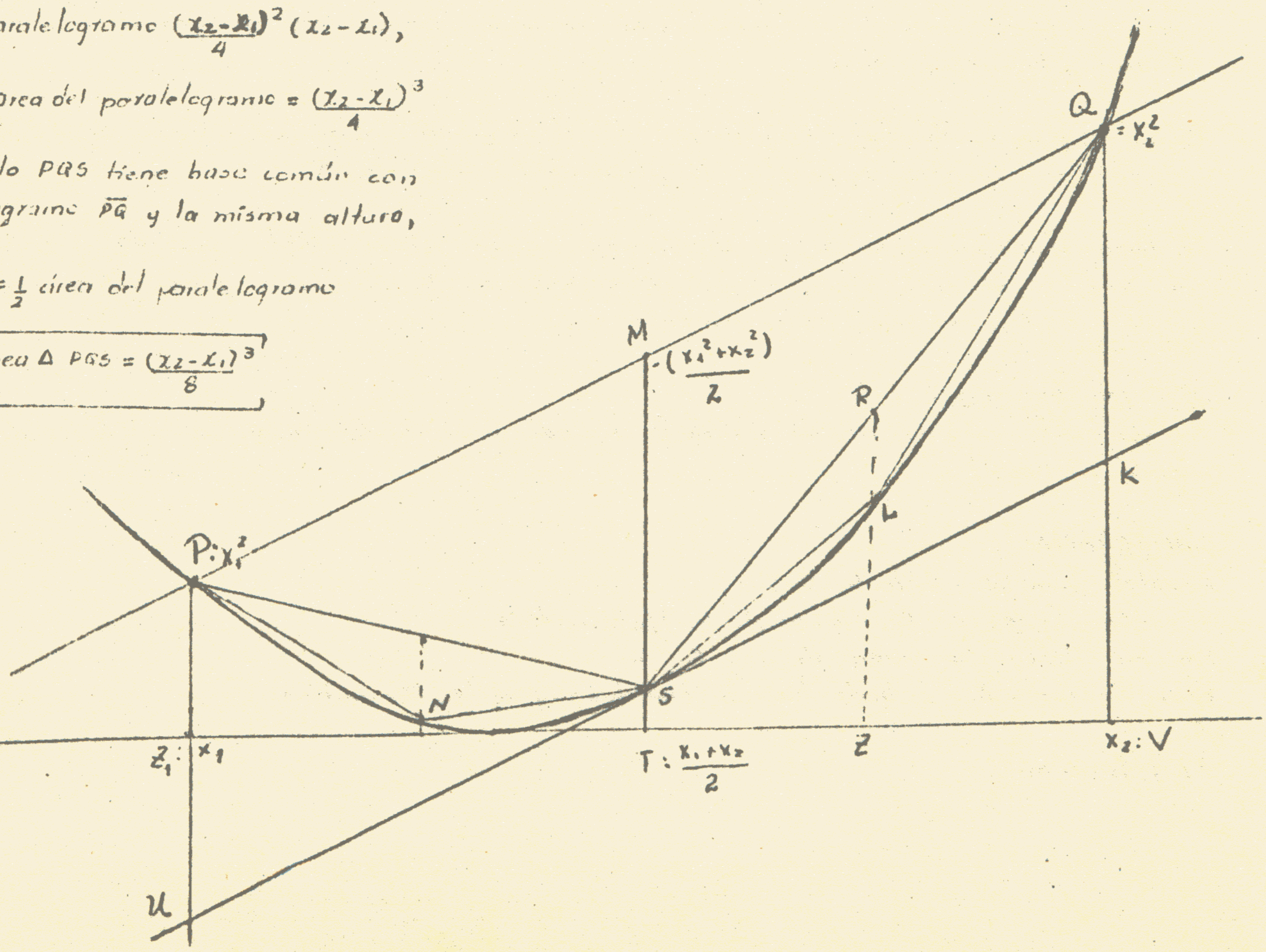
Área del paralelogramo PQKU $= \overline{QK}\times\overline{VZ} = \overline{MS}\times\overline{VZ}$; $\overline{VZ} = x_2 - x_1$
$MS = MT - ST = \frac{x_1^2+x_2^2}{2} - \left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 = \left(\frac{x_2-x_1}{2}\right)^2$

área del paralelogramo $\frac{(x_2-x_1)^2}{4}(x_2-x_1)$,

entonces, área del paralelogramo $= \frac{(x_2-x_1)^3}{4}$

El triángulo PQS tiene base común con el paralelogramo $\overline{PQ}$ y la misma altura, por tanto;
Área Δ PQS $= \frac{1}{2}$ área del paralelogramo

entonces, área Δ PQS $= \frac{(x_2-x_1)^3}{8}$



Tomamos esta área como unidad, y hemos de probar que el área del segmento es $\frac{4}{3}$ de esta área. Considerando los puntos S y Q. Sea R el punto medio de $\overline{SQ}$ y L el correspondiente punto de la parábola. En este arco se cumple de nuevo la propiedad anteriormente demostrada.

Calculemos el área del triángulo SQL que es $\frac{1}{2}$ RL x TV

$$RL = RZ - LZ = \frac{1}{2}\left[x_2^2 + \left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2\right] - \left[\frac{x_2 + (x_1+x_2)/2}{2}\right]^2 = \frac{(x_2-x_1)^2}{16} ; \quad TV = x_2 - \frac{x_1+x_2}{2}$$

$$TV = \frac{x_2 - x_1}{2}$$

$$\Rightarrow \text{área } \Delta\ SQL = \frac{1}{2}\ \frac{(x_2-x_1)^2}{16} \cdot \frac{(x_2-x_1)}{2} = \frac{1}{64}(x_2-x_1)^3 = \frac{1}{8}\ \Delta\ PQS$$

Evoluemos la aproximación que tenemos:

$$\Delta\ PQS + \left[\frac{1}{8}\Delta + \frac{1}{8}\Delta\right] = \frac{5}{4}\Delta$$

Si cada uno de los segmentos determinados recibe idéntico tratamiento tendremos cuatro triángulos iguales cada uno (en cuanto al área) a $\frac{1}{8}$ de los anteriores, la aproximación será:

$$\Delta + \left[\frac{1}{8}\Delta + \frac{1}{8}\Delta\right] + \left[\frac{1}{64}\Delta + \frac{1}{64}\Delta + \frac{1}{64}\Delta + \frac{1}{64}\Delta\right] = \left[1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2\right]\Delta$$

al proseguir en este método se va añadiendo cada vez un término de la progresión geométrica de razón $\frac{1}{4}$. Euclides ya trataba la suma de una progresión geométrica y por tanto podemos muy bien suponer que Arquímedes utilizó el resultado:

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \cdots\cdots + \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

cuando n crece, el segundo término se aproxima a cero y por consiguiente eligiendo un n suficientemente grande puede obtenerse una diferencia entre la suma y $\frac{4}{3}$ por debajo de cualquier valor propuesto, el área del segmento de parábola resulta ser igual a $\frac{4}{3}$ del área del triángulo PQS, o lo que es lo mismo $\frac{2}{3}$ del área del paralelogramo circunscrito.

OBSERVACIONES:

- Nótese que este resultado implica "la cuadratura de la parábola" o sea el área de la parábola en términos del área del rectángulo, cosa que nunca lograron los griegos en la curva más familiar, la circunferencia.

Cuadratura de la Parábola: es precisamente el título del trabajo original de Arquímedes que contiene veinticuatro proposiciones plenamente demostradas.

- Es bueno también comentar que Arquímedes intuyó este resultado pesando segmentos parabólicos. En general, siempre que podía utilizaba la mecánica para prever resultados que luego demostraba rigurosamente.

PROBLEMA PROPUESTO:

Por qué este método no da resultado cuando se trata de aproximar el área de un segmento circular?

BIBLIOGRAFIA:

Apostol Tom M. - Calculo V. I

Newman James R- El mundo de la Matemática

Karlson Paul - La Magia de los Números

Eves Howard - An Introduction to the history of Mathematics.

C/ g. j. m. m.

RESEÑAS BIBLIOGRAFICAS

ALGEBRA MODERNA - Arturo Martínez C., Ediciones UIS. Bucaramanga 1980.
Texto para el curso dictado por el autor en el X Coloquio Colombiano de Matemática realizado en Paipa. Contiene lo fundamental del tema que comprende el primer curso de Algebra Moderna para estudiantes de Licenciatura en esta universidad: Estructuras Algébraicas, grupos, subgrupos normales y homomorfismos. Es de resaltar lo que esta publicación aporta en el aspecto pedagógico: un tratado sencillo y riguroso, que se deja leer por personas, con apenas conocimientos básicos de la Teoría de Conjuntos, que puede iniciar al autodidacta en el estudio de los grupos y que sirve como texto y como libro de consulta para cursos iniciales de Algebra Moderna. Trabajos como éste, serios, fruto de la experiencia docente en nuestro medio y accesibles fácilmente a gran número de personas, benefician altamente la divulgación matemática y esperamos se multipliquen en diferentes direcciones. Este libro se puede adquirir en el Fondo Rotario de la UIS.

EL ALGEBRA RENACENTISTA: Por Carlos E. Vasco U. Universidad Nacional de Colombia, Departamento de Matemática y Estadística (1977).
Hace tiempo apareció en alguna revista de la Sociedad Colombiana de Matemática, un artículo de algún famoso profesor norteamericano, en el cual se quejaba del poco estudio que se desarrolla alrededor de la historia de la Matemática. ¿ Si eso es, por allá cómo será por acá ?. En medio de esta realidad negativa, esta investigación del doctor Carlos Vasco, es gratamente sorprendente por su profunda seriedad, teniendo en cuenta que, como él mismo comenta en la introducción, «a nadie se le oculta la dificultad de contribuir a la historiografía de la matemática desde un país en el que los recursos bibliográficos, son muy limitados, el acceso a las fuentes es imposible y el estímulo a este tipo de investigaciones es negativo o (en el mejor de los casos) nulo». Este trabajo se dedica a examinar las primeras etapas del desarrollo del álgebra en lo que se refiere a la Europa de los Siglos XII al XVII, precedido por un recuento de los precursores árabes.
Es altamente revelador, por la cantidad de información útil y amena que contiene y por el método didáctico de análisis que utiliza, basado en una sólida y actualizada formación filosófica y matemática del autor; Manejando con propiedad tanto las categorías matemáticas, como históricas, el autor nos demuestra cómo en el fondo, lo que determina el quehacer matemático está determinado por la infraestructura económica, haciendo enfásis en que esta relación, no se puede entender mecánicamente pues en determinado momento «el producto social, conceptual y simbólico acumulado adquiere una autonomía relativa y empieza a ser utilizado como "materia prima" para nuevos productos, determinados más por la superestructura matemática ya existente y por las prácticas internas de la matemática, que por las necesidades inmediatas de la infraestructura económica». Pero sería necio tratar de resaltar en esta corta reseña, todas las enseñanzas e inquietudes que este libro deja después de una lectura detenida, a cualquier lector, que tenga que ver con la matemática y con la ciencia en general, así pues, destacamos por último como resalta el autor la labor no sólo de los grandes hombres sino también la de los trabajadores anónimos, que pacientemente y calladamente, aunque no producen saltos cualitativos, ayudan a madurar cuantitativamente las condiciones para que se den las rupturas epistemológicas.

C/ g. j. m. m.