CUIDADO CON LA GENERALIZACION

Por: Pedro Javier Rojas G.

Una de nuestras fallas más frecuentes cuando analizamos una proposición, es la tendencia a generalizarla, por el simple hecho de comprobar su validez en una serie de casos particulares.

Estos apuntes tienen como fin principal, mostrar algunos ejemplos en los cuales se ve claramente, la necesidad de tener en cuenta una afirmación muy sencilla pero de gran importancia:

'Una proposición puede ser válida en una serie de casos particulares y no serlo en general'.

Los siguientes ejemplos aparecen en el libro 'Método de inducción matemática', de I.S. Sominski, editorial MIR; como motivación para enunciar el principio de induccion matemática.

EJEMPLO 1. Consideremos los números de la forma $2^{2^n}+1$. Para $n=0,1,2,3$ y 4 los números $2^{2^0}+1=3$, $2^{2^1}+1=5$, $2^{2^2}+1=17$, $2^{2^3}+1=257$ y $2^{2^4}+1=65.537$ son primos. Pierre de Fermat, ilustre matemático del siglo XVII, aceptaba que todos los números de este tipo eran primos. Sin embargo, L. Euler encontró, ya en el siglo XVIII, que $2^{2^5}+1 = 4\,294\,967\,297 = (641)(6700417)$ es un número compuesto.

EJEMPLO 2. El binomio x^n-1, donde n es un número natural, tiene gran interés para los matemáticos (está ligado estrechamente al problema geométrico sobre la división de la circunferencia en n partes iguales). En particular, se han interesado por la descomposición de éste binomio en polinomios con coeficientes enteros. Analizando las descomposiciones correspondientes a varios valores de n, se observa que los valores absolutos de todos los coeficientes de estas descomposiciones no pasan de uno. En efecto:

$$x-1=x-1$$
$$x^2-1=(x-1)(x+1)$$
$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$$
$$x^4-1=(x-1)(x+1)(x^2+1)$$
$$x^5-1=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$$
. . . .

Los intentos por demostrar este hecho para todo n fracasaron.

En 1941, el matemático ruso V.K. Ivanov resuelve éste problema. Resultó que ésta propiedad la tienen todos los binomios x^n-1, con $n<105$; pero uno de los factores para $x^{105}-1$ es el polinomio: $(x^{48}+x^{47}+x^{46}-x^{43}-x^{42}-2x^{41}-x^{40}-x^{39}+x^{36}+x^{35}+x^{34}+x^{33}+x^{32}+x^{31}-x^{28}-x^{26}-x^{24}-x^{22}-x^{20}+x^{17}+x^{16}+x^{15}+x^{14}+x^{13}+x^{12}-x^{9}-x^{8}-2x^{7}-x^{6}-x^{5}+x^{2}+x+1)$ que no verifica dicha propiedad.

EJEMPLO 3. D.A. Grave, matemático soviético, afirmó que para todo primo p, el número $2^{p-1}-1$ no es divisible por p^2. El cálculo directo confirmaba ésta hipótesis para todos los números p menores que mil. Sin embargo, pronto se comprobó que $2^{1092}-1$ es divisible por 1093^2 (1093 es número primo).

EJEMPLO 4. Veamos otro ejemplo de carácter más instructivo. Tomando en lugar de n, en la expresión $991n^2+1$, sucesivamente los números $1,2,3,\ldots$ no obtendremos el cuadrado de un número, por muchos días o incluso años que dediquemos a ello. Sin embargo, sería erróneo deducir de aquí que ningún número de éste tipo es cuadrado de un número. En efecto, entre los números de tipo $991n^2+1$ tambien hay cuadrados; pero es muy grande el valor mínimo de n para el cual es un cuadrado el número $991n^2+1$. He aquí este valor: $n=12\,055\,735\,790\,331\,359\,447\,442\,538\,767$.