SINTESIS DE UN PROCEDIMIENTO ABREVIADO PARA RESOLVER ECUACIONES CUBICAS.

Por: Eduardo Moreno Blanco

El presente trabajo no intenta ser original; simplemente es una recopilación hecha por el autor, extractada de diversas obras que presentan la solución de las ecuaciones de tercer grado. La inquietud surgió de la necesidad de poseer un resumen del procedimiento más expedito para resolver este tipo de ecuaciones, las cuales se presentan con alguna presencia en las aplicaciones prácticas de la ingeniería y para solucionarlas se apela normalmente a métodos de tanteo, generalmente el de aproximaciones sucesivas, con las inexactitudes que ello conlleva.

I- Breve historia de la solución de la ecuación cúbica

Muchos matemáticos intentaron en vano el hallazgo de esta solución, en función de los coeficientes, pero las transformaciones preliminares hechas por ellos abrieron el camino para que tuviera éxito el matemático italiano Scipione del Ferro o Scipio Ferreo, profesor en Bolonia de 1496 a 1526, quien halló la solución hacia el año 1505.

Sin embargo, esta solución se atribuye injustificadamente a Jerónimo Cardano (1501- 1576), de Pavía, quien fué el primero en publicarla como original en su obra "Ars Magna", en 1545. Parece que a su vez, Cardano conoció la solución de la ecuación cúbica por intermedio de su amigo Nicolás Fontana, apodado Tartaglia, otro matemático italiano (1499- 1557), con la promesa de Cardano de no divulgarla.

Las diferentes "soluciones" propuestas para la ecuación cúbica, con anterioridad a Ferreo, así como la extensa literatura relacionada con este tema puede consultarse en "Subjet Index" de la Royal Society of London, Catalogue of Scientific Papers, 1800- 1900.

II- Solución de Cardano - Tartaglia

La ecuación cúbica en su forma general es: $x^3+ax^2+bx+c=0$ (1)

La cual puede reducirse a una forma más simple, como veremos mas adelante en: $x^3+3qx+2p=0$ (2), la cual de ahora en adelante llamaremos "forma normal" de la ecuación cúbica.

Para resolver la ecuación normal, sea $X=y+z$. Por tanto, $X^3=y^3+z^3+3yz(y+z)=y^3+z^3+3yzX$

y la ecuación normal quedaría: $y^3+z^3+3(yz+q)X+2p=0$ (3)

Las cantidades Y, Z son dos números cualesquiera, sometidos a la única condición de que su suma debe dar una de las raices de la ecuación cúbica normal. Si, además les imponemos la condición de que $yz+q=0$, quedarían completamente determinados. En efecto, la ecuación (3) quedaría: $y^3+z^3=-2p$

pero por otra parte, $z^3=-\dfrac{q^3}{y^3}$

Por tanto $y^3-\dfrac{q^3}{y^3}=-2p$, de donde se deduce: $y^6+2py^3-q^3=0$

la Solución de esta ecuación "cuadrática" dá: $y^3=-p+\sqrt{p^2+q^3}$

y por sustitución obtemos: $z^3=-p-\sqrt{p^2+q^3}$

El valor de X lo obtenemos, finalmente, de la condición $X=y+z$, o sea:

$X=[-p+\sqrt{p^2+q^3}]^{1/3}+[-p-\sqrt{p^2+q^3}]^{1/3}$ (6).

Esta es la llamada "solución Cardano- Tartaglia" de la ecuación cúbica.

Se conocen otros métodos y procedimientos, muchos de los cuales se pueden consultar en obras sobre "Teoría de Ecuaciones". Una de estas soluciones, elegante y breve, se debe a Francis Vieté (1540- 1603), notable matemático francés, quien la publicó en 1591.

Vieté reduce primero la ecuación general (1) a la forma: $X^3+3mX=2n$

y luego mediante el cambio de variable $X=\dfrac{m-y^2}{y}$, obtiene la ecuación: $y^6+2ny^3=m^3$

la solución de esta cuadrática facilita encontrar los posibles valores de y, los cuales a su vez permiten calcular las soluciones de la cúbica general.

III- Metodología sugerida para resolver la ecuación cúbica.

Volvamos a plantearnos el problema de resolver la ecuación cúbica general $F(x) = x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, cuya primera derivada es: $F'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

El primer paso en la solución Cardano-Tartaglia consiste en eliminar el término de 2º grado, mediante el cambio de variable, $x = y + k$, en donde k es un número por determinar. Con este cambio, la ecuación general ① queda reducida a:

$$y^3 + (3k+a)y^2 + (3k^2 + 2ak + b)y + (k^3 + ak^2 + bk + c) = 0 \quad ⑥$$

de donde obtemos el valor de k que elimine el término de 2º grado, $k = -\frac{a}{3}$ ⑦.

Observamos además que los restantes coeficientes de la ecuación ⑥ son $F(k)$ y $F'(k)$, respectivamente, y por tanto esta ecuación queda: $y^3 + F'(k) \cdot y + F(k) = 0$ ⑧

llamando $p = \frac{F(k)}{2}$ y $q = \frac{F'(k)}{3}$

La solución Cardano-Tartaglia de la ecuacion ⑧ es:

$$y_1 = [-p + \sqrt{p^2+q^3}]^{1/3} + [-p - \sqrt{p^2+q^3}]^{1/3}$$

IV- Análisis de la Solución Cardano Tartaglia

Llamando la cantidad $p^2 + q^3 = \Delta$, se pueden presentar los siguientes casos:

a) $\Delta \geq 0$. En este caso obtenemos una solucion REAL y las otras dos soluciones de la cúbica se obtienen reduciendo la ecuación a una cuadrática, cuya solución es sabida.

b) $\Delta < 0$. En este caso la solución Cardano-Tartaglia dá imaginario, situacion ésta que dejó perplejos a los matemáticos de esa época, cuando todavia no se habia desarrollado la teoria relacionada con cantidades complejas.

En álgebra Superior se demuestra que en este caso los tres soluciones de la ecuación cúbica general son todas **REALES**.

Para obviar el escollo de las cantidades imaginarias que aparecen en la solución Cardano-Tartaglia, debemos hacer uso del teorema de De Moivre y expresar las cantidades imaginarias en forma trigonométrica.

Llamando a la cantidad $p^2 + q^3 = -\Delta$, en donde Δ es positivo, podemos escribir:

$$-p + i\sqrt{\Delta} = \rho(\cos\phi + i\,\text{sen}\,\phi), \quad \text{en donde: } \rho = \sqrt{p^2+\Delta} \text{ y } \phi = \text{Arc tg}\left(-\frac{\sqrt{\Delta}}{p}\right)$$

Con esto obtenemos: $[-p + i\sqrt{\Delta}]^{1/3} = \rho^{1/3}[\cos(\phi/3 + 120^\circ r) + i\,\text{sen}\,(\phi/3 + 120^\circ r)]$

$$[-p - i\sqrt{\Delta}]^{1/3} = \rho^{1/3}[\cos(\phi/3 + 120^\circ r) - i\,\text{sen}\,(\phi/3 + 120^\circ r)]$$

y por tanto la solución Cardano-Tartaglia para la ecuación ⑧ se transforma en:

$$y = 2\rho^{1/3}\cos(\phi/3 + 120^\circ r)$$

de donde se obtienen tres soluciones REALES, dandole a r los valores sucesivos de 0, 1, 2.

Una vez se tengan las tres soluciones de la cúbica ⑧, los de la ecuación general ① se consiguen facilmente, sumándole algebraicamente la constante k, calculada inicialmente, según ⑦.

V- Resumén de los pasos a seguir para resolver la ecuación cúbica.

1) Se determina la cantidad $k = -\frac{a}{3}$, en donde "a" es el coeficiente del término de 2º grado de la ecuación general.
2) Se calculan los valores de $F(k)$ y $F'(k)$, quedando la ecuación general en su forma normal: $y^3 + F'(k) \cdot y + F(k) = 0$.
3) Se obtienen $p = F(k)/2$ y $F'(k)/3 = q$
4) Se calcula la cantidad $\Delta = p^2 + q^3$

   Si $\Delta \geq 0$, se aplica directamente la solución Cardano-Tartaglia, y los otros dos soluciones se obtienen de la ecuación cuadrática, reducida de la ecuación cúbica normal.

   Si $\Delta < 0$, se calculan $\rho = \sqrt{p^2+\Delta}$ y $\phi = \text{Arctang}\left(-\frac{\sqrt{\Delta}}{p}\right)$ y las tres soluciones de la cúbica normal se obtienen de $y = 2\rho^{1/3}\cos(\phi/3 + 120^\circ r)$, asignándole a r los valores 0, 1 y 2 sucesivamente.
5) Una vez obtenidas las tres soluciones de ecuación cúbica normal, las de la ecuación general se consiguen sumándole a estos resultados la cantidad k obtenida en el primer paso.

EJEMPLOS :

I) Resolver: $F(x) = x^3 - 6x^2 + 13x - 10 = 0$; $F'(x) = 3x^2 - 12x + 13$

1) $K = 2$ $F(K) = 0$ y $F'(K) = 1$

2) $p = 0$; $q = 1/3$

3) $\Delta = 1/27 > 0$

En este caso particular, con $F(K) = 0$, la ecuación ④ queda reducida a:

$y^3 + y = 0$, o sea $y(y^2+1) = 0$ cuyas tres soluciones son:

$y_1 = 0$ o sea $x_1 = 2$

$y_2 = i$ $x_2 = 2 + i$

$y_3 = -i$ $x_3 = 2 - i$

II) Resolver: $F(x) = x^3 + 6x^2 + 3x + 18 = 0$

$F'(x) = 3x^2 + 12x + 3$

1) $K = -2$, $F(K) = 28$, $F'(K) = -9$

2) $p = 14$, $q = -3$

3) $\Delta = (14)^2 + (-3)^3 = 169 > 0$, o sea $\sqrt{\Delta} = 13$

La solución Cardano-Tartaglia da $y_1 = -4$ y la ecuación transformada es:

$y^3 - 9y^2 + 28 = 0 = (y+4)(y^2 - 4y + 7)$

las soluciones de la cuadrática son: $y_2 = 2 + \sqrt{3}\,i$ y $y_3 = 2 - \sqrt{3}\,i$

Por tanto las soluciones de la ecuación dada son: $x_1 = -6$ $x_2 = \sqrt{3}\,i$ y $x_3 = -i\sqrt{3}$

III) Resolver: $F(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$

$F'(x) = 3x^2 - 6x - 4$

1) $K = 1$, $F(K) = 6$ y $F'(K) = -7$

2) $p = 3$ y $q = -7/3$

3) $\Delta = -\dfrac{100}{27} < 0$

4) La solución Cardano-Tartaglia no es aplicable, pero podemos obtener la cantidad imaginaria

$-p + i\sqrt{\Delta} = -3 + \dfrac{10\sqrt{3}}{9}\,i$, de la cual obtenemos:

$\rho = (7/3)^{3/2}$ y $\phi = \text{Arctg}\left(-\dfrac{10\sqrt{3}}{27}\right)$, o sea $\phi = 149^\circ\ 19'\ 11.33''$

La ecuacion ⑥ es: $y = 2(7/3)^{1/2}\ \text{Cos}\ (49^\circ.6'\ 23.78'' + 120^\circ\ m)$

cuyas soluciones con $m = 0, 1, y\ 2$ son:

$y_1 = 2$ o sea $x_1 = 3$

$y_2 = -3$ $x_2 = -2$

$y_3 = 1$ $x_3 = 2$

IV) Resolver: $F(x) = x^3 + 15x^2 - 33x - 847 = 0$

$F'(x) = 3x^2 + 30x - 33$

1) $K = -5$ $F(K) = -432$ $F'(K) = -108$

2) $p = -216$ y $q = -36$

3) $\Delta = 0$

Cuando, como en este caso $\Delta = 0$, la solución Cardano-Tartaglia se reduce a:

$y_1 = 2[-p]^{1/3}$ o sea $y_1 = 2[216]^{1/3}$

$y_1 = 12$ y por tanto $x_1 = 7$

la ecuación cúbica original queda: $(x-7)(x^2 + 22x + 121) = 0$

la solución de la cuadrática da dos resultados iguales a -11, o sea que la solución de la cúbica dada es: $x_1 = 7$ $x_2 = -11$ y $x_3 = -11$

V) Resolver: $F(x) = x^3 + 7x^2 - 36 = 0$ (Falta el término de primer grado)

$F'(x) = 3x^2 + 14x$

1) $K = -7/3$ $F(K) = -286/27$ y $F'(K) = -49/3$

2) $p = -143/27$ y $q = -49/9$

3) $\Delta = -400/3 < 0$

4) $-p + i\sqrt{\Delta} = \dfrac{143}{27} + \dfrac{20\sqrt{3}}{3}\,i$ de donde obtenemos:

$$\rho = (7/3)^3, \qquad \phi = 65^\circ\ 21'\ 37.32''$$

y la solución de la cúbica es $y = \frac{14}{3} \cos (21^\circ\ 47'\ 12.44'' + 120^\circ m)$

que da como resultados:

$y_1 = 13/3$ o sea $x_1 = 2$

$y_2 = -11/3$ $\quad x_2 = -6$

$y_3 = 2/3$ $\quad x_3 = -3$.

BIBLIOGRAFIA

Algebra Superior - Hall & Knight (MacMillan Co)
Monographs on Topics of Modern Mathematics, edited by J. W Young. (Consultar el Cap. sobre "The Algebraic Equations", Ga. Miller)
Dover Publishing Co.
Higher Algebra, Barnard an Child - Mc MillanCo.
Functions of a complex Variable - James Picipont - Dover Publishing.

C/ g.j.m.m.

"Las matemáticas estudian el sol y la luna, pero olvidan lo que tienen debajo de sus pies"

DIOGENES

"Al iniciar sus estudios de geometría con Euclides, uno de sus alumnos, en cuanto aprendió la primera de sus proposiciones, le preguntó: "Qué sacaré con saber esto?". Entonces Euclides llamó a su esclavo y le dijo: "Dadle tres monedas pues, según dice, todo lo que aprende le debe rendir un beneficio".

ESTOBEO

"Los más importantes descubrimientos de las leyes, métodos y progresos de la naturaleza han surgido casi siempre del examen de los objetos más pequeños que contiene"

J. B. LAMARCK

"El verdadero valor del experimentador consiste en que no persigue tan sólo lo que busca en su experimento, sino también aquello que no busca".

CLAUDE BERNARD

"Un conocimiento profundo de las cosas no lo obtendremos ni ahora ni nunca, en tanto que no las contemplemos en su crecer desde el principio".

ARISTOTELES