APORTES SOBRE LA SOLUCION DE ECUACIONES DE GRADO SUPERIOR AL SEGUNDO CON LA AYUDA DE UNA CALCULADORA MANUAL.

Por: Eduardo Caro Cayzedo

La extraordinaria capacidad de las calculadoras de mano, especialmente aquellas con las que se puede trabajar con un factor constante, permite calcular las raíces de una ecuación de tercer grado o mayor en un tiempo muy corto, fácilmente y con una precisión que puede ser la total de la calculadora que generalmente es de 8 a 12 cifras significativas. En los ejemplos que damos las operaciones se han hecho con una calculadora Hewlett-Packard 21 con una capacidad de 10 cifras y la posibilidad de limitar, si se desea, el número de las que aparecen en la pantalla.

Esta calculadora utiliza la llamada lógica Polaca Inversa que difiere en varios detalles de la empleada por calculadoras de otras marcas, pero ésto no tiene mucha importancia ya que no nos vamos a ocupar de la forma de operar la calculadora sino el procedimiento mismo a seguir.

Hay dos métodos básicos bien adaptados a las posibilidades de las calculadoras manuales que son el de la interpolación lineal y el de las aproximaciones sucesivas de Newton; en el primero se va localizando cada raíz dentro de intervalos cada vez más pequeños cuyos extremos se calculan, y en el segundo, a partir de una razonable aproximación a cada raíz se van calculando, en forma iterativa, nuevas aproximaciones sucesivas, cada vez mejores hasta copar, si se desea o es necesario, la capacidad de la calculadora.

No entraremos en detalle sobre la teoría de estos métodos ya que ésta puede consultarse en cualquier libro de Algebra a nivel universitario o de Teoría de Ecuaciones; y supondremos también, en lo que sigue, que se han eliminado de la ecuación a resolver las raíces racionales que hubiera podido tener (para lo cual se puede utilizar la calculadora y los métodos dados enseguida) y las raíces múltiples, lo que se obtiene dividiendo la ecuación por el máximo común divisor entre élla y su derivada; en adelante, por lo tanto, consideraremos únicamente ecuaciones que no tienen sino raíces irracionales sencillas y/o raíces complejas.

Además supondremos que se han separado las raíces irracionales.

1) METODO DE LA INTERPOLACION LINEAL

El procedimiento a seguir para calcular los valores que toma un polinomio para valores diferentes de la variable, es el de la división sintética, que, para adaptarlo mejor a la lógica de las máquinas puede presentarse en forma de factorización parcial, tal como se puede ver en el ejemplo siguiente:

$$\text{Sea } y = f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 4x - 6$$
$$= (((2x-3)x+5)x-4)x-6$$

en donde el valor a ensayarse, x, es el factor constante de la calculadora; como práctica, calcularemos los valores del polinomio anterior para argumentos enteros y uno o dos fraccionarios para familiarizarnos con este empleo de la calculadora y con miras a trazar la gráfica de la función y a separar las posibles raíces irracionales:

$$y = f(x) = (((2x-3)x+5)x-4)x-6$$

En el cuadro que aparece en la siguiente página se encuentran los valores que aparesen en pantalla despues de cada una de las operaciones indicadas; en adelante no indicaremos sino los valores finales de $y = f(x)$.

Al ensayar el valor $x=-1$ se puede observar que los signos en pantalla, antes de cada producto, alternan y por lo tanto $x=-1$ es una cota inferior de las raíces negativas de la ecuación; en la misma forma para $x=2$ los signos son todos positivos, lo que indica que este valor de x es una cota superior de las raíces positivas de la ecuación.

x = factor =	-2	-1	0	1	2	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
2 primer coef.	2	⊕2	-	2	⊕2	2	2	2
factor	-4	-2	-	2	4	-1	1	3
-3 (2º coef.)	-7	⊖5	-	-1	⊕1	-4	-2	0
factor	14	5	-	-1	2	2	-1	0
+5 (3er coef.)	19	⊕10	-	4	⊕7	7	4	5
factor	-38	-10	-	4	14	-3,5	2	7,5
-4 (4º coef.)	-42	⊖14	-	0	⊕10	-7,5	-2	3,5
factor	84	14	-	0	20	3,75	-1	5,25
-6 (térm. ind.)	78	⊕8	-6	-6	⊕14	-2,25	-7	-0,75
$y = f(x)$ =	78	8	-6	-6	14	-2,25	-7	-0,75

Tanto la gráfica como la tabla anterior nos muestran que la ecuación tiene dos raíces reales, una entre 0 y -1 y la otra entre 1 y 2; más exactamente, entre $-\frac{1}{2}$ y -1, y entre 3/2 y 2; calcularemos sucesivamente estas dos raíces:

a) Raíz entre -1 y 0:

La raíz se encuentra localizada entre dos enteros consecutivos, para situarla en el orden de las décimas vemos en la tabla o en la gráfica que un valor aceptable para un primer ensayo es $x = -0,5$ para el cual $f(x) = -2,25$ es negativo; ensayamos entonces $x = -0,6$ valor para el cual la función es todavía negativa, y luego $x = -0,7$ que nos dá un cambio de signo de $f(x)$ y, por tanto, la localización de la raíz entre -0,6 y -0,7; los valores de la función se dan en la tabla siguiente:

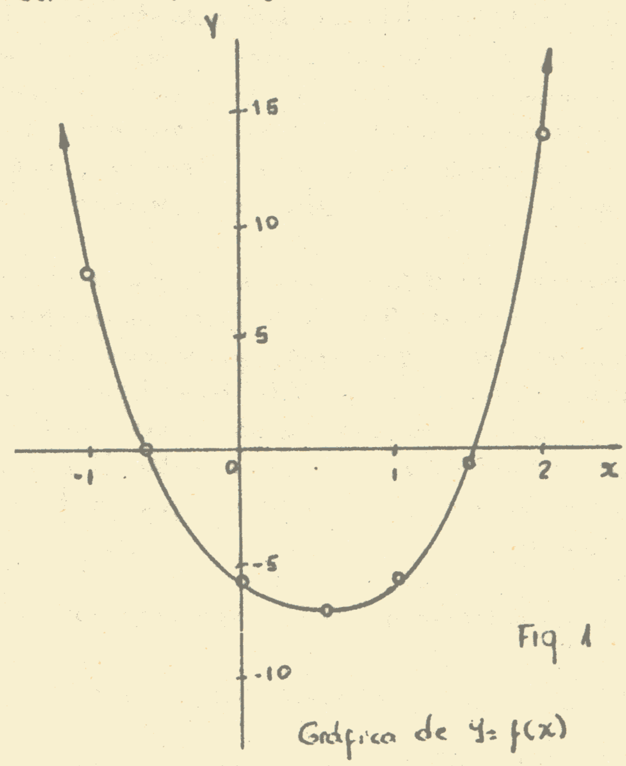

Fig. 1
Gráfica de $y = f(x)$

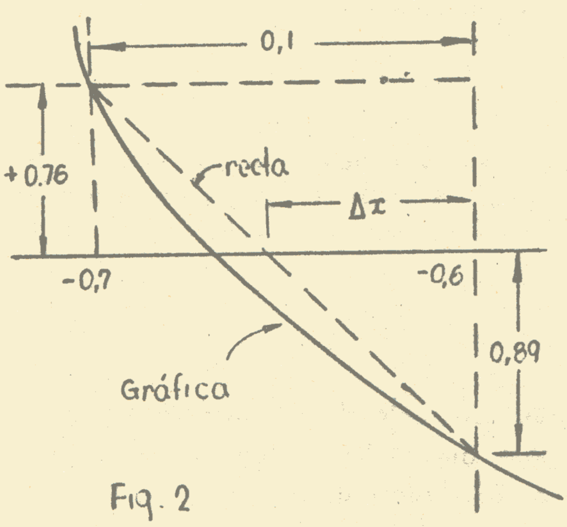

Fig. 2

x = (1 cifra)	$f(x)$ = (2 cifras)
-0,5	-0,25
-0,6	-0,89
-0,7	+0,76 ← r₁

$$\frac{\Delta x}{-0.89} = \frac{0.1}{-0.89 - (+0.76)}$$

$$\frac{\Delta x}{0.1} = \frac{89}{89+76} = \underbrace{0.54}_{(2\text{ cifras})}$$

En el siguiente ensayo localizaremos la raíz en el orden de las milésimas para lo cual utilizaremos la interpolación lineal a fín de determinar el valor posible de x que debemos emplear para hallar un valor de la función cercano a cero. El dibujo adjunto es una ampliación de la gráfica de la función entre dos valores de -0,6 y -0,7 para x, en la que se vé que el valor de la raíz se halla muy cerca de la intersección con el eje de las X de la recta que une los puntos (-0,6, -0,89) y (-0,7, +0,76) ya calculados para la gráfica, intersección cuya posición es fácil calcular determinando por triángulos semejantes el valor de Δx; empezaremos pues los nuevos ensayos para localizar la raíz en el valor $-0,6 - 0,1\,(0,54) = -0,654$ para x con los resultados que se resumen en la tabla:

$2x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 4x - 6$

$x =$ (3 cifras)	$f(x) =$ (5 cifras)	$\Delta x =$ (3 cifras)
$-0,654$	$-0,04036$	
$-0,655$	$-0,02372$	
$-0,656$	$-0,00704 \leftarrow r_1$	$\dfrac{704}{704+967} = 0,421$
$-0,657$	$+0,00967$	

Por medio de una segunda interpolación encontramos el valor de $x = -0,656 - (0,001)(0,421) = -0,656421$ conveniente para localizar la raíz en el orden de las millonésimas, con los resultados siguientes:

$x =$ (6 cifras)	$f(x) =$ capacidad de la calculadora	$\Delta x =$ (3 ó 4 cifras)
$-0,656421$	$-0,00001 0667 \leftarrow r_1$	$\dfrac{10667}{10667+6038} = 0,6386$
$-0,656422$	$+0,0000 6038$	

Y un último ensayo más que todo de comprobación, nos dá como resultados:

$x =$	$f(x) =$
$-0,656421638$	$-0,000 000 009$
$-0,656421639$	$+0,000 000 008$

cifras que confirman que el valor de la primera raíz es $r_1 = -0,656\,421\,6386$ con diez cifras decimales.

Los ensayos para hallar la segunda raíz, que damos sin comentarios son:

b) Raíz entre 1 y 2:

$x =$	$f(x) =$	$\Delta x =$
1,3	$-3,63$	
1,4	$-2,35$	
1,5	$-0,75 \leftarrow r_2$	$\dfrac{75}{75+122} = 0,38$
1,6	$+1,22$	
1,538	$-0,59223$	
1,539	$-0,02907$	
1,540	$-0,00982$	$\dfrac{982}{982+947} = 0,509$
1,541	$+0,00947 \leftarrow r_2$	

$x =$	$f(x) =$	
1,540509	$-0,000\,003\,482 \leftarrow r_2$	$\dfrac{3482}{3482+15812} =$
1,540510	$+0,000\,015\,812$	
1,540509180	$-0,000\,000\,010$	
1,540509181	$+0,000\,000\,011$	

de donde: $r_2 = 1,540\,509\,1805\ldots$ también con diez cifras decimales.

2) METODO DE NEWTON

Para encontrar una raíz de una ecuación $f(x) = 0$ (que puede no ser polinómica) por el método de Newton, se parte de alguna aproximación, x_1, a la raíz, obtenida por cualquier otro método tal como el de hallar valores de la función a partir de otros arbitrarios de x como si se fuera a trazar la gráfica de la función; la intersección, x_2, de la tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(x_1, f(x_1))$ con el eje de las abscisas, será, en general, una mejor aproximación a la raíz buscada y se usa en forma análoga para tener una tercera aproximación, x_3, a la raíz, y así sucesivamente hasta lograr la exactitud deseada o copar la capacidad de la calculadora, lo que suele suceder al cabo de unos cinco a diez interacciones dependiendo de la bondad de la escogencia del valor inicial x_1 (Ver fig 3)

Es fácil ver, (y, por otra parte, la deducción de las fórmulas se encuentra casi en cualquier texto de Cálculo) que:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

y que, en general:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

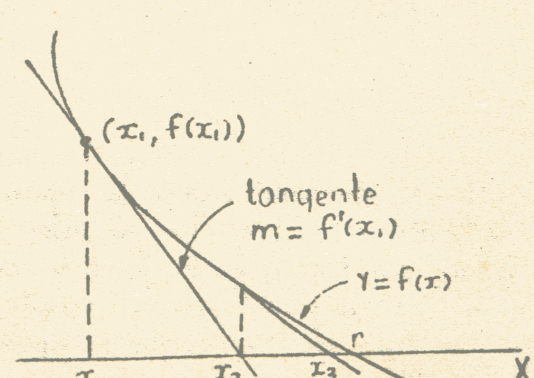

Fig. 3

Ocasionalmente el segundo valor de x, x_2, puede no ser, como se ve en la figura, una mejor aproximación a la raíz debido al sentido de la concavidad de la gráfica $y = f(x)$ pero, salvo casos muy especiales, $x_3, x_4, \ldots$ sí serán aproximaciones cada vez mejores.

El método es simple y directo, pero exige una mayor capacidad de memoria en la calculadora ya que es necesario encontrar y retener en la memoria los valores de la función y su derivada para un argumento dado; además, suele ser sensible a la escogencia de la primera aproximación en relación con la forma de la gráfica en las vecindades del valor escogido, como lo podemos ver en el ejemplo siguiente:

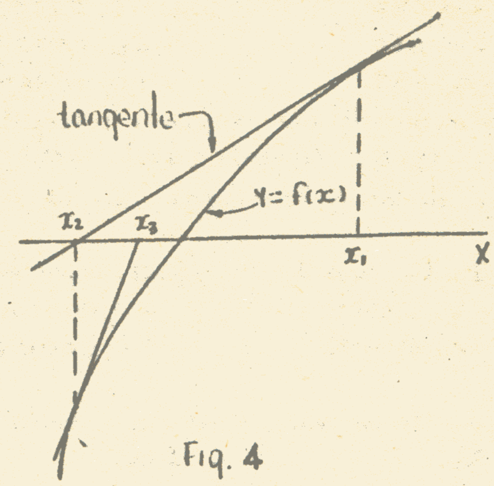

Fig. 4

Resolver la ecuación $x^5 - 2x^4 + 1 = 0$.

Las únicas raíces racionales posibles de esta ecuación son +1 y -1 y es fácil ver que +1 es una raíz, lo que nos permite reducir el grado de la ecuación al cuarto y será $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 - x - 1 = 0$ cuya derivada es $f'(x) = 4x^3 + 3x^2 - 2x - 1$ y que no tiene raíces racionales; la tabla siguiente de valores de la función nos permite hacer un croquis de su gráfica y ver que tiene dos raíces reales, una entre 0 y -1 y la otra entre 1 y 2. (Ver figura 5)

$x =$	-1	0	1	2
$y = f(x) =$	1	-1	-3	1
	cota inf. r_1		r_2 cota sup.	

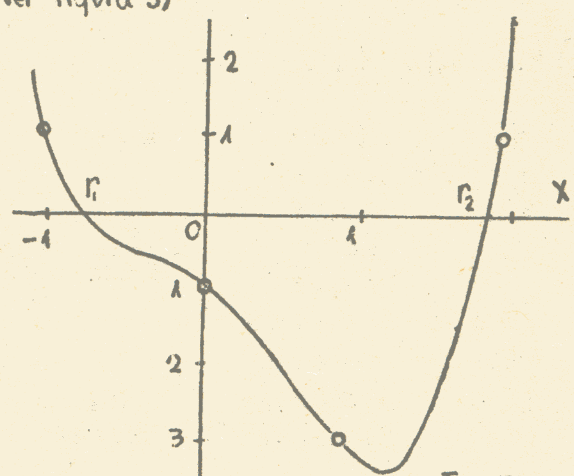

Fig. 5

Si usamos el valor inicial $x_1 = 1$ (con la idea de aproximarnos a la raíz positiva) encontraremos los valores de la tabla siguiente en la que anotamos los valores más importantes, que van apareciendo en pantalla, con precisión mínima, pero en una buena calculadora, es posible recorrer todo el proceso sin emplear las teclas sino para los coeficientes de la ecuación y las operaciones a ejecutar, con ellos ya que los valores sucesivos de la aproximación quedan en la máquina.

$x_1 = 1{,}00$ $\quad f(x_1) = -3{,}00 \quad f'(x_1) = -2{,}00 \quad \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = -1{,}50$

$x_2 = -0{,}50$ $\quad f(x_2) = -0{,}56 \quad f'(x_2) = -1{,}26 \quad \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 0{,}45$

$x_3 = -0{,}95$ $\quad f(x_3) = 0{,}72 \quad f'(x_3) = -5{,}24 \quad \frac{f(x_3)}{f'(x_4)} = -0{,}14$

$x_4 = -0{,}813$ $\quad f(x_4) = 0{,}125 \quad f'(x_4) = -3{,}50 \quad \frac{f(x_4)}{f'(x_4)} = -0{,}036$

$x_5 = -0{,}777$ $\quad f(x_5) = 0{,}0067 \quad f'(x_5) = -3{,}13 \quad \frac{f(x_5)}{f'(x_5)} = -0{,}0021$

$x_6 = -0{,}77481$ $\quad f(x_6) = 0{,}000023 \quad f'(x_6) = -3{,}11 \quad \frac{f(x_6)}{f'(x_6)} = -0{,}0000072$

$x_7 = -0{,}774804113$ $\quad f(x_7) = -3{,}0 \times 10^{-10} \quad f'(x_7) = -3{,}11 \quad \frac{f(x_7)}{f'(x_7)} = 9{,}6 \times 10^{-11}$

Esta última corrección supera la capacidad de la calculadora y, por lo tanto, $x_7 = -0{,}774804113\ldots$ es el mejor valor de la raíz que podemos obtener. Vemos que se obtuvo la raíz negativa y no la positiva como era nuestro propósito inicial, lo que se debe a que en $x = 1$ la función, no es creciente, sino decreciente, lo que hace que la tangente corte al eje mas lejos de la raíz, que la aproximación escogida; para hallar la raíz positiva habríamos debido escoger, un valor inicial superior a 1,3 que corresponde al mínimo de la función. Si usamos $x = 2$ tendremos sucesivamente

		corrección =
$x_1 = 2{,}00$	$f(x_1) = 1{,}00$	0,07
$x_2 = 1{,}93$	$f(x_2) = 0{,}07$	0,0057
$x_3 = 1{,}9276$	$f(x_3) = 0{,}00051$	0,0000405
$x_4 = 1{,}927561978$	$f(x_4) = 3{,}1 \times 10^{-8}$	$2{,}4 \times 10^{-9}$
$x_5 = 1{,}927561976$	$f(x_5) = 5{,}0 \times 10^{-9}$	$4{,}0 \times 10^{-10}$

□