ACOTACION DE RAICES

Por: Gildardo Guzmán B.

El tema de las raices de polinomios, es tratado en el curso de algebra superior, que toman los estudiantes de primer semestre de ingeniería, en esta universidad. Por tanto, he considerado de interés presentar la parte de acotación de raices, con una justificación sencilla.

El teorema fundamental es el siguiente:
Dado un polinomio con coeficientes reales: $p(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$, con $a_0>0$. Entonces, el número: $c=1+\sqrt[k]{M/a_0}$; donde k es el primer subindice para el cual $a_k<0$ y $M=\max\{|a_i| \, ; \, a_i<0\}$; es una cota superior para las raices positivas (en caso de que existan) del polinomio $p(x)$.

DEMOSTRACION:

Se trata de probar que para todo $x>1+\sqrt[k]{M/a_0}$; $p(x)\neq 0$

Sea $x>1+\sqrt[k]{M/a_0}$ y $p(x)=a_0x^n+\cdots+a_kx^{n-k}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$, $a_0>0$

Entonces, $p(x)\geq a_0x^n+a_kx^{n-k}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$.

Si j es tal que $a_j<0$, $-a_j=|a_j|\leq M$ y así

$p(x)\geq a_0x^n-Mx^{n-k}-\cdots-Mx-M=a_0x^n-M(x^{n-k}+x^{n-k-1}+\cdots+x+1)$

Por tanto:

$$p(x)\geq a_0x^n-\frac{M(1-x^{n-k+1})}{1-x}=a_0x^n-\frac{M}{1-x}+\frac{Mx^{n-k+1}}{1-x}\geq a_0x^n-\frac{Mx^{n-k+1}}{x-1}$$

De donde:

$$p(x)\geq\frac{a_0x^{n+1}-a_0x^n-Mx^{n-k+1}}{x-1}=\frac{x^{n-k+1}}{x-1}\left[a_0x^k-a_0x^{k-1}-M\right]$$

Así, tenemos:

$$p(x)\geq\frac{x^{n-k+1}}{x-1}\left[a_0x^{k-1}(x-1)-M\right].$$

Ahora; como $x>1+\sqrt[k]{M/a_0}$, entonces $(x-1)^k>M/a_0$ y así $a_0(x-1)^k-M>0$

Por consiguiente: $a_0x^{k-1}(x-1)\geq a_0(x-1)^k$ implica $a_0x^{k-1}(x-1)-M\geq a_0(x-1)^k-M$

Se prueba entonces que $p(x)\geq\dfrac{x^{n-k+1}}{x-1}\left[a_0x^{k-1}(x-1)-M\right]>0$.

NOTA 1. Como las raices de $p(x)$ son iguales a las de $-p(x)$; no habrá problema cuando el coeficiente a_0 de un polinomio $p(x)$ sea menor que cero.

NOTA 2. Si se quiere hallar una cota inferior para las raices positivas de $p(x)$, se toma el polinomio $q(x)=x^n\,p(1/x)$ y se le halla una cota superior c_1 para sus raices positivas. Así, si r es una raiz positiva de $p(x)$, $1/r$ es raiz positiva de $q(x)$ y de aquí, $1/r<c_1$ y $1/c_1<r$ de donde $1/c_1$ es una cota inferior de las raices positivas de $p(x)$.

NOTA 3. Si se ha encontrado una cota c_2 para las raices positivas del polinomio $q(x)=x^n\,p(-1/x)$, entonces se ha encontrado una cota superior para las raices negativas de $p(x)$. En efecto, si r es una raiz negativa de $p(x)$, $-1/r$ es una raiz positiva de $q(x)$ y por tanto: $-1/r<c_2$, $1/c_2<-r$ y $r<-1/c_2$.

NOTA 4. Si c_3 es una cota superior para las raices positivas de $q(x)=p(-x)$, entonces $-c_3$ es una cota inferior para las raices negativas de $p(x)$. Si r es raiz negativa de $p(x)$, $-r$ es raiz positiva de $p(-x)$ y por tanto, $-r<c_3$ y $-c_3<r$.

BIBLIOGRAFIA:

A. G. KUROSCH. 'Curso de Algebra Superior'. Editorial MIR, Moscú 1968
J. V. UPENSKY: 'Theory of Equations'. McGraw-Hill Book company, inc. 1948