EL AUTOMORFISMO DE FROBENIUS (*)

Por: Pedro Javier Rojas G.

Si se nos preguntara si es posible que $(a+b)^n$ sea igual a a^n+b^n; responderíamos, quizás sin dudarlo, que esto NUNCA ES POSIBLE. Sin embargo vemos que la igualdad

$$(a+b)^p = a^p + b^p$$

ES ACTUALMENTE VALIDA en un campo F de característica p. Antes de garantizarlo utilizando el Automorfismo de Frobenius, que exhibiremos en el próximo teorema, recordemos algunas definiciones:

DEFINICION 1: Sea $\sigma: F_1 \to F_2$ una función uno a uno de un campo F_1 sobre el campo F_2. Decimos que σ es un isomorfismo de F_1 sobre F_2 si para cualesquiera $a, b \in F_1$, se tiene:

$$(a+b)\sigma = a\sigma + b\sigma \quad \text{y}$$
$$(ab)\sigma = (a\sigma)(b\sigma)$$

DEFINICION 2: Decimos que un isomorfismo σ es un Automorfismo si esta definido de un cam F sobre sí mismo.

DEFINICION 3: Se define la característica de un campo F como el menor entero positivo p tal que $pa = 0$ para algún $a \neq 0$ en F.

LEMA: Si p es la característica de un campo F, entonces se cumple que $px = 0$ para todo $x \in F$.

Dm:

Como p es la característica de F, existe $a_0 \in F$ tal que $pa_0 = 0$, con $a_0 \neq 0$. Supongamos que existe $a \in F$ tal que $pa \neq 0$, entonces $paa_0 \neq 0$ ya que F no tiene divisores de cero (pues F es dominio entero). Pero $pa = ap$, por tanto $paa_0 = a(pa_0) \neq 0$; lo cual es contradictorio debido a que $pa_0 = 0$ y por consiguiente $a(pa_0) = a \cdot 0 = 0$.

Así, si F es de característica p, $px = 0$ para todo $x \in F$ $\square$

TEOREMA: Sea F un campo finito con característica p. Entonces la función $\sigma_p: F \to F$ definida por $a\sigma_p = a^p$ para cada $a \in F$ es un automorfismo, el AUTOMORFISMO DE FROBENIUS, del campo F.

Demostración:

Sean $a, b \in F$. Aplicando el teorema del binomio a $(a+b)^p$ tenemos:

$$(a+b)^p = a^p + (p\cdot 1)a^{p-1}b + \left(\frac{p(p-1)}{2}\cdot 1\right)a^{p-2}b^2 + \cdots + (p\cdot 1)ab^{p-1} + b^p$$

$$= a^p + 0\,a^{p-1}b + 0\,a^{p-2}b^2 + \cdots + 0\,ab^{p-1} + b^p = a^p + b^p$$

Entonces: $(a+b)^p = a^p + b^p$.

Por tanto: $(a+b)\sigma_p = (a+b)^p = a^p + b^p = a\sigma_p + b\sigma_p$

Y naturalmente: $(ab)\sigma_p = (ab)^p = a^p b^p = (a\sigma_p)(b\sigma_p)$

Así, σ_p es un automorfismo del campo F. $\square$

BIBLIOGRAFIA:

FRALEIGH, John B., "A First course in Abstract Algebra", segunda edición. Addison Wesley Publishing Company, 1977.

(*) Ferdinand George Frobenius (1849-1917). Algebrista Alemán nacido en Berlín. Desarrolló la teoría de grupos e ideó un método para la resolución de ecuaciones diferenciales lineales homogéneas.

AVERIGUELO USTED

A continuación aparecen las "demostraciones" de hechos que rápidamente se prueba que son falsos, identifique el error y háganoslo saber.

1. Todos sabemos que: "Si dos fracciones son iguales y tienen numeradores iguales, entonces también tienen denominadores iguales". Ahora consideremos el siguiente problema:
Queremos resolver la ecuación

$$\frac{x+5}{x-7} - 5 = \frac{4x-40}{13-x}$$

o sea:
$$\frac{x+5-5(x-7)}{x-7} = \frac{4x-40}{13-x} \Rightarrow \frac{4x-40}{7-x} = \frac{4x-40}{13-x}$$

Por el teorema enunciado arriba, $7-x = 13-x$ y por tanto $7 = 13$ □

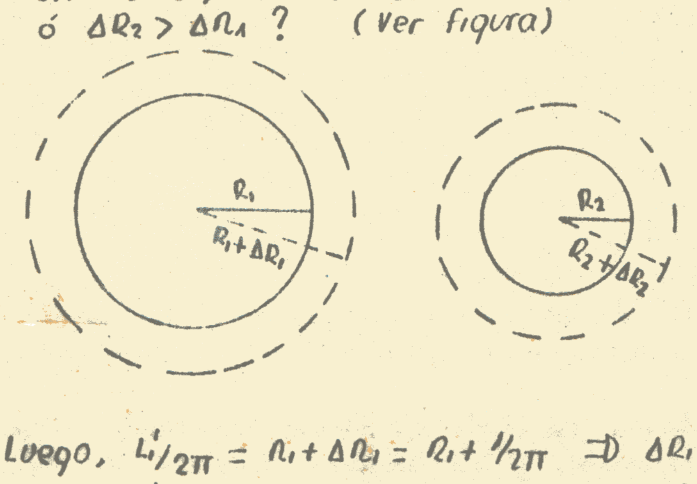
2. Demostración por inducción:
$P(n)$: Todos los números en un conjunto de n números son iguales entre sí.
Dm:
(a) $P(1)$ es obviamente verdadera.
(b) Supongamos que k es un número natural para el cual $P(k)$ es verdadera. Sea $\{a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}\}$ cualquier conjunto de $k+1$ números. Entonces, por la suposición: $a_1 = a_2 = \cdots = a_k \mid$ y $a_2 = \cdots = a_k = a_{k+1}$. De aquí se tiene que $a_1 = a_2 = \cdots = a_k = a_{k+1}$.
Luego, $P(n)$ es válida para todos los números naturales n. □

3. Demostración por inducción:
$P(n)$: Si a y b son cualesquiera dos números naturales tales que $\max(a,b) = n$. Entonces $a = b$. (Ej: $\max(2,6) = 6$, $\max(2,2) = 2$).
Dm:
(a) $P(1)$ es verdadera: $\max(a,b) = 1 \Rightarrow a = b = 1$
(b) Supongamos que k es un número natural para el cual $P(k)$ es verdadera. Sean a y b dos números naturales cualesquiera tales que $\max(a,b) = k+1$ y considere $\alpha = a-1$, $\beta = b-1$. Entonces el $\max(\alpha, \beta) = k$, de donde por la suposición $\alpha = \beta$. De aquí $a = b$ y así $P(k+1)$ es verdadera.
Por tanto, $P(n)$ es válida para todos los números naturales n. □

4. $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b} \Rightarrow \sqrt{-1}\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1$ $\qquad \alpha, \beta \geq 1$?
$(\sqrt{-1})^2 = -1$. Luego $1 = -1$ □ $\qquad$ Quien sabe

Está bien.

5. Supongamos que colocamos una cinta alrededor de la tierra y otra cinta alrededor de una naranja. Si aumentamos la longitud de cada cinta en un metro, cual de los radios se incrementa más?. Es decir, $\Delta R_1 > \Delta R_2$ ó $\Delta R_2 > \Delta R_1$? (ver figura)



$L_1 = 2\pi R_1$ y $L_2 = 2\pi R_2$
Si aumentamos en un metro cada cinta, nos queda:
$L_1' = L_1 + 1 = 2\pi(R_1 + \Delta R_1)$
$L_2' = L_2 + 1 = 2\pi(R_2 + \Delta R_2)$
Así:
$L_1'/2\pi = L_1/2\pi + 1/2\pi = R_1 + 1/2\pi$
$L_2'/2\pi = L_2/2\pi + 1/2\pi = R_2 + 1/2\pi$

Luego, $\left.\begin{array}{l} L_1'/2\pi = R_1 + \Delta R_1 = R_1 + 1/2\pi \Rightarrow \Delta R_1 = 1/2\pi \\ L_2'/2\pi = R_2 + \Delta R_2 = R_2 + 1/2\pi \Rightarrow \Delta R_2 = 1/2\pi \end{array}\right\}$ Por tanto, $\Delta R_1 = \Delta R_2$ □

NOTICIAS MATEMATICAS

ACTIVIDADES EN LA UNIVERSIDAD DE PAMPLONA

El Departamento de Matemática y física de la Universidad de Pamplona, consciente del papel que debe desempeñar ante la comunidad y frente al olvido al cual se ven reducidos los licenciados en la provincia, decidió programar un evento anual de actualización para profesores de Matemática y física.

Con tal fin se realizó el Primer Seminario de Matemática y Física los dias 12, 13 y 14 de Agosto de 1980 contando con la colaboración de los profesores adscritos al Departamento de Matemática y Física y del doctor Yu Takeuchi

Se programaron dos cursos con una intensidad de dos horas diarias cada uno y varias conferencias. Ellos fueron:

CURSOS:

1- Aplicaciones prácticas de Matrices y Determinantes (M.S. Luis Ernesto Rojas Morantes, Universidad de Pamplona).
2- Manejo experimental de la Física a Nivel medio (Lic. Carlos José Sánchez Herrera, Universidad de Pamplona.)

CONFERENCIAS

1- Curva Normal y Evaluación del Rendimiento Académico (M.S. Miguel Bernal Villa, Universidad de Pamplona.)
2- Por qué las matemáticas son importantes ? (Dr. Yu Takeuchi, Universidad Nacional)
3- Cómo enseñar límites (M.S. Jameo Velasco Mosquera, Universidad de Pamplona).
4- Los Números de Fibonacci (Lic. José Humberto Giraldo Barco, Universidad de Pamplona).
5- La Ciencia y la Religión. (M.S. Oscar Libardo Rosas Contreras, Universidad de Pamplona).
6- Aproximaciones en Matemático (Dr. Yu Takeuchi, Universidad Nacional)
7- Matemática Moderna y Matemática Tradicional (Dr. Yu Takeuchi).

Asistieron cincuenta profesores los cuales laboran en los colegios de la Provincia de Pamplona.
El Dr. Yu Takeuchi se mostró muy interasado en la realización de un nuevo seminario a Nivel Regional, dirigido a profesores de Nivel medio y universitario.
Por ello se proyecta realizar el año próximo un Coloquio de Matematica con la participación de profesores de enseñanza media y de profesores de las Universidades del Oriente Colombiano, con la colaboración de la Universidad Nacional y la Universidad de los Andes.
Se ha elaborado el siguiente plan:

ACTIVIDADES

Se dictan seis cursos, 6 sesiones de cien minutos de duración cada una así:

CURSOS	A, B	8.30 a.m.	a 10:10 a.m.
CURSOS	C, D	10.20 a.m.	a 12.00 a.m

Se dictan cinco conferencias de lunes a viernes de interés general de 4.00 a 5.00 p.m.
Posibles cursos: Se escogeran seis de:

Algebra Lineal	(nivel bajo)
Fundamentos de Análisis	(nivel intermedio o bajo)
Historia de Matematicas	(nivel bajo)
Teoria de Grafos	(nivel intermedio)
Algebra Abstracta	(nivel intermedio o bajo)
Ecuaciones Diferenciales	(nivel avanzado)
Geometria	(nivel intermedio)
Variable Compleja	(nivel intermedio)
Estadistica	(nivel intermedio)

Se tratará de elaborar una guia (texto) sencilla de 60 páginas aproximadamente.
Se realizarán de lunes a viernes de 5.00 a 6.00 p.m otras actividades (conferencias didácticas, peliculas educativas, etc).
Hasta el momento han confirmado su asistencia los doctores: Alonso Takahashi, Alberto Campos, Rafael Mariño, de la Universidad Nacional, y los doctores Margarita de Meza y Gerard Schleinkofel de la Universidad de los Andes.

Para la organización de este Coloquio se ha nombrado un comité, integrado por los profesores:
Ms. James Velasco Mosquera
Ms. Blanca Aurora León de Barón
Ms. Miguel Bernal Villa
Lic. Carlos José Sánchez Herrera.

El departamento de matemática y física de la Universidad de Pamplona, espera contar con la valiosa colaboración de los profesores de Matemática de la Universidad Industrial de Santander.

MESA REDONDA SOBRE LA LICENCIATURA EN MATEMATICA

El 16 de septiembre se llevó a cabo en la UIS una mesa redonda, organizada por profesores y alumnos de la materia Didáctica de la Matemática con participación de profesores y estudiantes de la carrera.

Como profesores participantes asistieron Arturo Martínez, Rosalba de Arias, Jorge Cifuentes, actual coordinador de la carrera, Edilberto Reyes, Rafael Isaacs y Carlos Torres, este último del departamento de Educación. Como estudiantes participaron Gloria Janeth Mónoga y Pedro Javier Rojas. El papel de moderador fue desempeñado por la Señora Carmen Luisa de Torres, titular de la materia antes mencionada, y el de relator por la estudiante Stella Vallejo.

Los aspectos considerados fueron: objetivos y pénsum vigente, recomendaciones del ICFES, materias electivas, mortalidad y deserción académica. Las ideas expuestas se pueden resumir como sigue:

El principal objetivo de la carrera es el de formar personal capacitado para la docencia en Matemática en el nivel medio, y dar bases suficientes para un posible post-grado.

En cuanto a la distribución de materias dentro del pénsum, se hizo referencia a que éste en los primeros semestres está encaminado hacia aspectos esencialmente mecánicos, en tanto que en los últimos se requiere mayor abstracción, y es entonces cuando los estudiantes encuentran serios tropiezos de tipo académico. Por otra parte, se mencionó la necesaria inclusión de ciertas materias como Teoría de Números, Geometría Euclideana, Teoría de Conjuntos II, Programación de Computadores, etc.

Las materias de Educación también fueron centro de amplia discusión: se planteaba el problema de que estas materias no pasan de ser teóricas y que difícilmente pueden relacionarse con la práctica. Posiblemente la falla radique en que estas materias se programan conjuntamente para todas las licenciaturas, sin especializarlas en cada área. En el caso de las materias de educación para la Licenciatura en Matemática, se ventiló la posibilidad de que fueran dictadas por profesores que, aparte de conocimientos pedagógicos tuvieran también conocimientos en Matemática, enfocando así estas clases hacia un campo más experimental.

Se dió lectura a las recomendaciones del ICFES que surgieron de la visita que realizó al Departamento de Matemática el año pasado. Sobre estas recomendaciones se discutió el grado de importancia que debería dárseles, pues si bien, no pueden ser ignoradas por completo, tampoco se deben cumplir al pié de la letra, ya que el ICFES, como organismo, no tiene una política definida al respecto.

Referente a las materias electivas se observó unanimidad en las ideas: éstas no deben estructurarse en bloques limitantes para los estudiantes, sino por el contrario, dar libertad para escogerlas.

Esperamos que se sigan programando discusiones de este tipo y que las conclusiones obtenidas sean llevadas a la práctica. Igualmente invitamos a todos los profesores y estudiantes de la carrera a que se vinculen a estas actividades.

UNIVERSIDAD
INDUSTRIAL
DE SANTANDER

El programa de la licenciatura en matemáticas de la UIS se inició en 1.973 y está debidamente aprobado por el ICFES y el ministerio de Educación Nacional.

La carrera está planeada para ocho semestres, con un horario de estudio de 2 a 8 p.m. Para ingresar a esta carrera se necesita ser bachiller o Normalista superior.

COLOMBIA NECESITA LICENCIADOS EN MATEMATICA.

CONTRIBUYE AL MEJORAMIENTO DE LA EDUCACION !

Inscripciones para el primer semestre de 1.981, hasta Octubre 30