



Aspectos dinámicos del acoplamiento skew de la familia logística

OSVALDO OSUNA ^a ✉, CRISTIAN JESÚS ROJAS-MILLA ^b.

^a Universidad Michoacana, Instituto de Física y Matemáticas, Morelia, México.

^b Universidad del atlántico, Departamento de matemática, Barranquilla, Colombia.

Resumen. En este trabajo el objetivo fundamental es estudiar algunos aspectos de la evolución asintótica de las órbitas obtenidas por iterar el endomorfismo

$$F_{\mu,\epsilon}(x, y) = (f_{\mu}(x), f_{\mu}(y) + \epsilon(x - y)),$$

donde $\mu > 1$ es el parámetro de la familia logística: $f_{\mu}(x) = \mu x(1 - x)$ y $\epsilon \in (0, 1)$, es el parámetro de acoplamiento. Este mapa biparamétrico es un híbrido entre dos clásicos en la teoría de los sistemas dinámicos, por un lado el paradigmático mapa cuadrático y por el otro el acoplamiento skew. El resultado principal será construir de manera detallada para determinados parámetros (μ, ϵ) un conjunto compacto invariante. Así como estudiar el comportamiento asintótico dentro de dicho compacto y su complemento, para ello se obtiene una descripción del comportamiento de las preimágenes de zonas en \mathbb{R}^2 que juegan un rol importante en la comprensión de la dinámica del acoplamiento.

Palabras clave: Mapa logístico, acoplamiento skew, conjunto compacto invariante.

MSC2010: 37C05, 37N35, 37C70.

Dynamical aspects of skew coupling of the logistic family

Abstract. Our main aim is to study some aspects of the asymptotic evolution of the orbits obtained by iterating the endomorphism

$$F_{\mu,\epsilon}(x, y) = (f_{\mu}(x), f_{\mu}(y) + \epsilon(x - y)),$$

E-mail: osvaldo.osuna@umich.mx ^a ✉, cristianrojas@mail.uniatlantico.edu.co ^b.

Recibido: 4 Julio 2023, Aceptado: 13 Diciembre 2023.

Para citar este artículo: O. Osuna y C.J. Rojas-Milla, Aspectos dinámicos del acoplamiento skew de la familia logística, *Rev. Integr. Temas Mat.*, 42 (2023), No. 2, 125-145. doi: 10.18273/revint.v41n2-2023004

where $\mu > 1$ is the parameter of the logistic family: $f_\mu(x) = \mu x(1-x)$ and $\epsilon \in (0, 1)$, is the coupling parameter. This biparametric map is hybrid between two classics in the theory of dynamical systems, the paradigmatic quadratic map and the skew coupling. The main result will be to construct in detail for certain parameters (μ, ϵ) an invariant compact set. As well as a study of the asymptotic behavior within this compact and its complement, for this we obtain a description of the behavior of the preimages of zones in \mathbb{R}^2 that play an important role in understanding the dynamics of the coupling.

Keywords: Logistic map, skew coupling, invariant compact set.

1. Introducción y antecedentes

Un número considerable de modelos matemáticos en dinámica discreta, incluso provenientes de diferentes procesos de discretización de ecuaciones diferenciales, conducen a una clase especial de sistemas dinámicos, los llamados *skew products* (por su terminología en inglés). Estos fueron definidos por Anzai [4] en 1951 para producir cierta clase de contraejemplos en teoría ergódica; tales sistemas aparecen de manera natural en el estudio de automorfismos de nilvariedades, ver [10]. Esta clase de sistemas dinámicos en forma general se definen de la siguiente manera: dados dos espacios topológicos X y Y , un endomorfismo $F : X \times Y \rightarrow X \times Y$ es llamado *skew product* si existen aplicaciones $f : X \rightarrow X$ y $g : X \times Y \rightarrow Y$ tales que

$$F(x, y) = (f(x), g(x, y)) \text{ para cada } (x, y) \in X \times Y. \quad (1.1)$$

El estudio de las transformaciones skew product tiene una amplia literatura matemática, por ejemplo: En [1], [2] se estudian propiedades ergódicas los skew products, en particular, se establecen la fórmula de Abramov- Roklhin y así como cálculos de la entropía para skew products. En [3] se analizan atractores extraños de tales mapas. Puede encontrarse diversas propiedades de bifurcación de mapas skew en [5]. En [6] se presentan conexiones de productos skew con la dinámica de mapas en el intervalo. Se presentan propiedades dinámicas a través de derivada Schwarziana en [7]. En [11] y [14], se analizan conjuntos invariantes relevantes de dichos mapas.

Dada una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, digamos continua, denominamos *acoplamiento skew* de f al mapa $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definido, para cada $x, y \in \mathbb{R}$, por

$$F(x, y) = (f(x), f(y) + \epsilon(x - y)). \quad (1.2)$$

Destacamos que esta clase particular de skew product ha sido considerado como modelo relevante para la transmisión de información a través de señales caóticas, la cual va acompañada frecuentemente de la noción de sincronización de sistemas; ver por ejemplo [8] y [9]. En este trabajo estudiaremos aspectos dinámicos del acoplamiento skew para la familia logística $F_{\mu, \epsilon} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por

$$F_{\mu, \epsilon}(x, y) := (f_\mu(x), f_\mu(y) + \epsilon(x - y)), \quad x, y \in \mathbb{R}; \quad (1.3)$$

donde $\mu > 1$ y $\epsilon \in (0, 1)$.

2. Puntos críticos e imagen crítica

Como el mapa anterior $F_{\mu,\epsilon}$ es cuadrático, entonces es no invertible y en consecuencia el conjunto J_0 de sus puntos críticos, el conjunto $J_1 = F_{\mu,\epsilon}(J_0)$ de sus valores críticos (*imagen crítica*), así como su preimagen $F_{\mu,\epsilon}^{-1}(J_1)$, tienen un papel importante en la descripción de la dinámica de $F_{\mu,\epsilon}$. De hecho, J_1 divide el plano en regiones abiertas cada una con un número constante de preimágenes, mientras que $F_{\mu,\epsilon}^{-1}(J_1)$ divide \mathbb{R}^2 en regiones abiertas que se mapean difeomórficamente sobre las regiones determinadas por J_1 ; más adelante precisaremos estas divisiones, antes recordamos que $J_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \det D_{(x,y)}F_{\mu,\epsilon} = 0\}$, donde $D_{(x,y)}F_{\mu,\epsilon}$ denota la diferencial (o matriz jacobiana) de $F_{\mu,\epsilon}$ en el punto (x, y) . Dado que

$$DF_{\mu,\epsilon}(x, y) = \begin{pmatrix} \mu(1-2x) & 0 \\ \epsilon & \mu(1-2y) - \epsilon \end{pmatrix}$$

J_0 es la unión de las rectas $\ell_1 = \{(x, y) : x = \frac{1}{2}\}$ y $\ell_2 = \{(x, y) : y = \frac{1}{2}(1 - \frac{\epsilon}{\mu})\}$, ambas se intersectan en el punto crítico $c_\mu = (\frac{1}{2}, d_\mu)$ siendo que $d_\mu = \frac{1}{2}(1 - \frac{\epsilon}{\mu})$. Sigue por tanto que $J_1 = F_{\mu,\epsilon}(\ell_1) \cup F_{\mu,\epsilon}(\ell_2)$; de hecho

$$F_{\mu,\epsilon}(\ell_1) = \{(\frac{\mu}{4}, h_{\mu,\epsilon}(y) + \frac{\epsilon}{2}) : y \in \mathbb{R}\}, F_{\mu,\epsilon}(\ell_2) = \{(f_\mu(x), h_{\mu,\epsilon}(d_\mu) + \epsilon x) : x \in \mathbb{R}\},$$

donde $h_{\mu,\epsilon}(t) = f_\mu(t) - \epsilon t$, para cualquier $t \in \mathbb{R}$. En consecuencia,

$$F_{\mu,\epsilon}(\ell_1) = \{(\frac{\mu}{4}, y) : y \leq m_\mu + \frac{\epsilon}{2} \in \mathbb{R}\} \text{ y } F_{\mu,\epsilon}(\ell_2) = \{(p_{\mu,\epsilon}(y), y) : y \in \mathbb{R}\},$$

donde $m_\mu = \max_y h_{\mu,\epsilon} = h_{\mu,\epsilon}(d_\mu) = \frac{\mu}{4} + \frac{\epsilon^2}{4\mu} - \frac{\epsilon}{2}$ y $p_{\mu,\epsilon}(y) = \frac{\mu}{4} - \frac{\mu}{\epsilon^2}(y - m_\mu - \frac{\epsilon}{2})^2$; esto es, $F_{\mu,\epsilon}(\ell_1)$ es un rayo vertical con punto inicial en $\tilde{c}_\mu = (\frac{\mu}{4}, m_\mu + \frac{\epsilon}{2})$ y $F_{\mu,\epsilon}(\ell_2)$ es una parábola horizontal hacia la izquierda con vértice en \tilde{c}_μ . Las curvas que definen a J_1 dividen el plano en tres regiones abiertas: Z_0, Z_2 y Z_4 . Estas regiones abiertas son definidas por:

$$Z_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > \frac{\mu}{4} \text{ o } (x > p_{\mu,\epsilon}(y) \text{ y } y > m_\mu + \frac{\epsilon}{2})\}$$

$$Z_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < p_{\mu,\epsilon}(y)\}$$

$$Z_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : p_{\mu,\epsilon}(y) < x < \frac{\mu}{4} \text{ y } y < m_\mu + \frac{\epsilon}{2}\}$$

cada una de estas están caracterizada por el constante número de preimágenes que tienen sus puntos; por ejemplo: en Z_0 no hay preimagen, en efecto, por definición $(x_0, y_0) \in Z_0$ siempre que $x_0 > \frac{\mu}{4}$. Así, si la preimagen de Z_0 fuera no vacía existiría $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $f_\mu(x, y) = (x_0, y_0)$. Luego la ecuación cuadrática $\mu x(1-x) = x_0$ tendría solución real, por lo que su discriminante debe cumplir $\mu^2 - 4\mu x_0 \geq 0$; así x_0 tendría que ser menor que $\frac{\mu}{4}$ lo cual contradice que esta en Z_0 . De manera análoga se tiene que los elementos en Z_2 tienen dos preimágenes y los de Z_4 tienen cuatro, ver Figura 1.

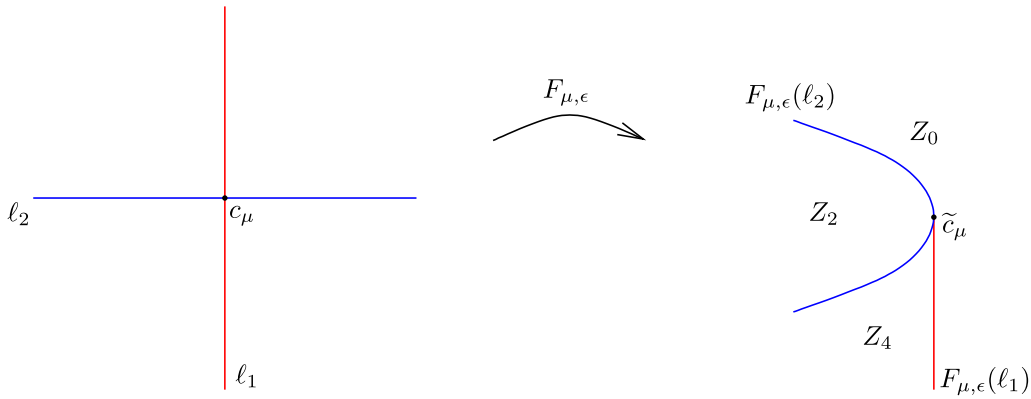


Figura 1. Imagen crítica

Observe que $F_{\mu, \epsilon}(z) = \tilde{c}_\mu$ si y sólo si $z = c_\mu$; además, cada punto en $F_{\mu, \epsilon}(\ell_1)$ tiene exactamente dos preimágenes, estas están dispuestas en ℓ_1 simétricamente respecto de c_μ ; así que la restricción de $F_{\mu, \epsilon}$ a ℓ_1 es 2 a 1. Con respecto a ℓ_2 la situación es diferente; en primer lugar, es simple ver que $\ell_2 \xrightarrow{F_{\mu, \epsilon}} F_{\mu, \epsilon}(\ell_2)$ es inyectiva, sin embargo, las preimágenes de puntos en $F_{\mu, \epsilon}(\ell_2)$ requieren algo de atención. La rama superior de la parábola J_1 ($x = p_{\mu, \epsilon}(y)$ con $y \geq m_\mu + \frac{\epsilon}{2}$) tiene como preimagen 1 a 1 al rayo $\{(x, d_\mu) : x \geq \frac{1}{2}\}$; no obstante, cada punto en la rama inferior $\{(p_{\mu, \epsilon}(y), y) : y < m_\mu + \frac{\epsilon}{2}\}$ tiene tres preimágenes, con una de las cuales se recorre el rayo $\{(x, d_\mu) : x < \frac{1}{2}\}$, las otras dos describen un par de curvas (del tipo $u \mapsto \pm \sqrt{u}$) simétricas respecto al rayo $\{(x, d_\mu) : x \geq \frac{1}{2}\}$. El hecho de tener tres zonas con número diferentes de preimágenes implica, entre otras cosas, que las dinámicas del acoplamiento skew de $F_{\mu, \epsilon}$ y el producto ($\epsilon = 0$) no son topológicamente conjugadas. Por otra parte, las curvas que definen $F_{\mu, \epsilon}^{-1}(J_1)$ dividen el plano en seis zonas: Z_2^i ($i = 1, 2$) y Z_4^j ($j = 1, 2, 3, 4$); cada zona Z_2^i (resp. Z_4^j) es mapeada de forma difeomórfica sobre Z_2 (resp. Z_4); ver Figura 2.

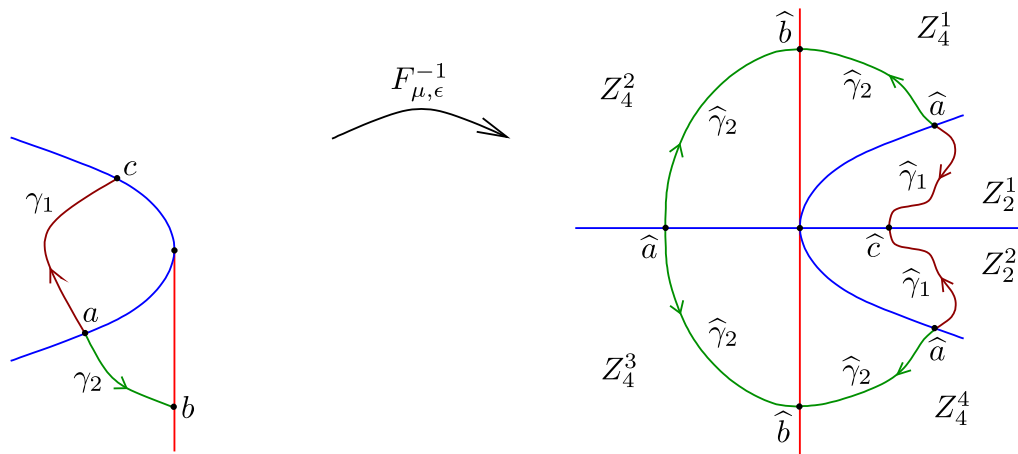


Figura 2. Ilustración de $F_{\mu, \epsilon}^{-1}(J_1)$

3. Puntos fijos y diagrama de bifurcación

Otros elementos importantes de considerar en la descripción de la dinámica de $F_{\mu,\epsilon}$ son sus puntos fijos y la variación de su naturaleza hiperbólica. Es fácil ver que los puntos fijos de $F_{\mu,\epsilon}$ son: O denotará al origen del plano

$$O = (0, 0), P_{\mu,\epsilon} = (0, \frac{\mu-\epsilon-1}{\mu}), Q_{\mu,\epsilon} = (\frac{\mu-1}{\mu}, \frac{\mu-1}{\mu}) \text{ y } R_{\mu,\epsilon} = (\frac{\mu-1}{\mu}, -\frac{\epsilon}{\mu}).$$

Las respectivas matrices jacobianas en esos puntos son:

$$DF_{\mu,\epsilon}(O) = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ \epsilon & \mu - \epsilon \end{pmatrix}, DF_{\mu,\epsilon}(P_{\mu,\epsilon}) = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ \epsilon & -\mu + \epsilon + 2 \end{pmatrix}$$

$$DF_{\mu,\epsilon}(Q_{\mu,\epsilon}) = \begin{pmatrix} 2 - \mu & 0 \\ \epsilon & 2 - \mu - \epsilon \end{pmatrix} \text{ y } DF_{\mu,\epsilon}(R_{\mu,\epsilon}) = \begin{pmatrix} 2 - \mu & 0 \\ \epsilon & \mu + \epsilon \end{pmatrix}$$

El siguiente cuadro refleja los autovalores y autoespacios relativos a cada punto fijo.

Punto fijo	Autovalores	Autoespacios asociados
O	$\lambda_1 = \mu$ $\lambda_2 = \mu - \epsilon$	$E_1 = \{(x, y) : x = y\}$ $E_2 = \{(x, y) : x = 0\}$
$P_{\mu,\epsilon}$	$\lambda_1 = \mu$ $\lambda_2 = -\mu + \epsilon + 2$	$E_1 = \{(x, y) : x = \frac{2\mu-\epsilon-2}{\epsilon}y\}$ $E_2 = \{(x, y) : x = 0\}$
$Q_{\mu,\epsilon}$	$\lambda_1 = 2 - \mu$ $\lambda_2 = 2 - \mu - \epsilon$	$E_1 = \{(x, y) : x = y\}$ $E_2 = \{(x, y) : x = 0\}$
$R_{\mu,\epsilon}$	$\lambda_1 = 2 - \mu$ $\lambda_2 = \mu + \epsilon$	$E_1 = \{(x, y) : y = \frac{\epsilon}{2-2\mu-\epsilon}x\}$ $E_2 = \{(x, y) : x = 0\}$

En base a esta información se construye, en términos de los parámetros μ y ϵ , un diagrama de bifurcación para cada punto fijo. Por ejemplo, para el origen y $P_{\mu,\epsilon}$ tenemos en primer lugar, que estos puntos coinciden cuando $\mu = 1 + \epsilon$; de hecho, en la región $1 < \mu < 1 + \epsilon$ el origen O es silla hiperbólica y $P_{\mu,\epsilon}$ repulsor; cuando $1 + \epsilon < \mu < 3 + \epsilon$, O es repulsor y $P_{\mu,\epsilon}$ silla hiperbólica; mientras que si $\mu > 3 + \epsilon$ ambos puntos son repulsores. Dado que la fibra $0 \times \mathbb{R}$, es decir el eje y es invariante, la dinámica en ella es dada por la función $h_{\mu,\epsilon}(t) = f_{\mu}(t) - \epsilon t$, la cual mediante el cambio de variables $x = \frac{\mu}{\mu-\epsilon}t$ y de parámetro $\rho = \mu - \epsilon$ es conjugada a $x \mapsto f_{\rho}(x)$. Similares análisis y comentarios se hacen para los restantes puntos fijos.

- Los puntos fijos O y $P_{\mu,\epsilon}$ se asocian para producir una bifurcación transcítica cuando $\mu = 1 + \epsilon$; como se establece en [13] [Capítulo 3], ver Figura 3 donde aparecen las líneas de bifurcación.

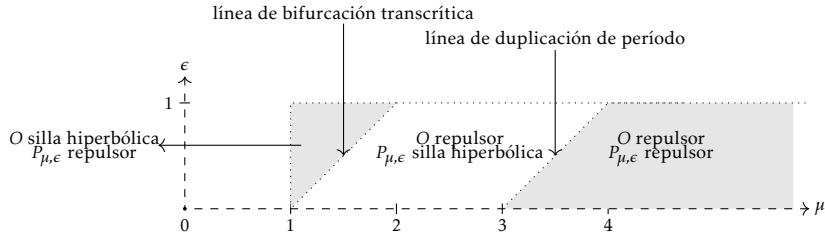


Figura 3. Diagrama de bifurcación para O y $P_{\mu,\epsilon}$.

- Para O siempre vale $\lambda_1 > \lambda_2$. Este punto fijo es silla hiperbólica cuando $\mu < 1 + \epsilon$ y repulsor cuando $\mu > 1 + \epsilon$
- Cuando $\mu < 1 + \epsilon$ el punto $P_{\mu,\epsilon}$ es repulsor, en el intervalo $1 + \epsilon < \mu < 3 + \epsilon$ es silla hiperbólica y vuelve a ser repulsor cuando $\mu > 3 + \epsilon$. Cuando $\mu = 3 + \epsilon$, $\lambda_2 = -1$ y se inicia una cascada de duplicación de período (ver [13] [Capítulo 3]), esta bifurcación se despliega sobre el conjunto $\{(x, y) : x = 0\}$, donde la dinámica es gobernada por $h_0(t) = (\mu - \epsilon)t - \mu t^2$. Sobre el autoespacio E_2 opera la menor expansión excepto en el caso $\mu < 1 + \frac{\epsilon}{2}$.
- El punto fijo $Q_{\mu,\epsilon}$ es atractor si $\mu < 3 - \epsilon$, es silla hiperbólica cuando $3 - \epsilon < \mu < 3$ y es repulsor si $\mu > 3$. Cuando $\mu = 3 - \epsilon$ se tiene $\lambda_2 = -1$ y comienza un cascada de duplicación de período la cual se manifiesta en la fibra invariante $\{(x, y) : x = \frac{\mu-1}{\mu}\}$ y es gobernada por la dinámica de $h_{\frac{\mu-1}{\mu}}(t) = (\mu - \epsilon)t - \mu t^2 + \frac{\epsilon(\mu-1)}{\mu}$. Mientras que si $\mu = 3$, entonces $\lambda_1 = -1$ y se da inicio a otra cascada de duplicación de período pero esta vez sobre la diagonal, cuya dinámica es regida por f_μ .
- Para $R_{\mu,\epsilon}$ siempre se tiene $\lambda_2 > |\lambda_1|$ y $\lambda_2 > 1$. Si $\mu < 3$, este punto fijo es una silla hiperbólica; y es repulsor cuando $\mu > 3$. El autovalor λ_1 alcanza el valor de -1 cuando $\mu = 3$, ello marca el inicio de una cascada de duplicación de período esta vez sobre una curva invariante cuya dinámica es regida por f_μ ; esto es mostrado en [12]. Ver Figura 4.

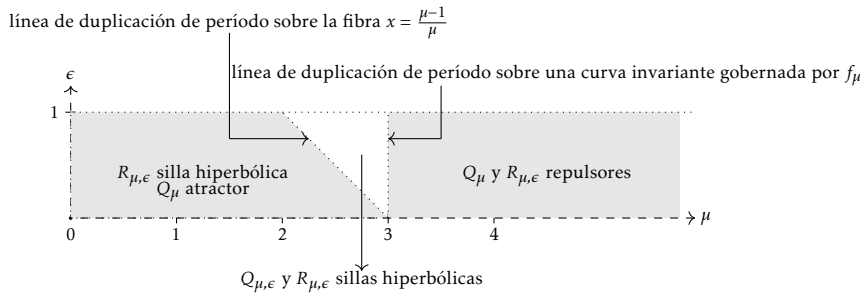


Figura 4. Diagrama de duplicación de período sobre una curva

4. Infinito como atractor

El cuarto ingrediente en nuestro trabajo es la propiedad de atracción en el infinito. En general, un endomorfismo $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ admite a ∞ como atractor si existe una vecindad

W de ∞ (complemento de un compacto) tal que $F(W) \subset W$ y para cada $z \in W$ su órbita positiva es no acotada: $\|F^n(z)\| \rightarrow +\infty$ cuando $n \rightarrow +\infty$. La *cuenca de atracción* de ∞ es el conjunto B_∞ de todos los puntos cuya órbita es no acotada; es muy simple mostrar que B_∞ es un conjunto abierto, de hecho $B_\infty = \bigcup_{n \geq 0} F_{\mu, \epsilon}^{-n}(W)$. Se llama *cuenca inmediata* de ∞ a la mayor componente conexa en B_∞ , se denota por B_∞^o .

Note que si W es como arriba, entonces un punto z tiene órbita acotada si $z \in \mathbb{R}^n \setminus W$. Destacamos que el compacto $\mathbb{R}^n \setminus W$ no tiene porque ser F -invariante, de hecho puede contener componentes de la cuenca de atracción de ∞ . Tal es el caso de la familia logística f_μ ; es bien conocido que $W = (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ es f_μ -invariante y todo punto en W tiene órbita no acotada para cualquier $\mu > 1$. Sin embargo, para todo $\mu > 4$, el compacto $[0, 1]$ tiene infinitas componentes de la cuenca de atracción de $+\infty$; es más, los puntos en $[0, 1]$ con órbita acotada definen un conjunto de Cantor con medida de Lebesgue nula. Note que $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ es la cuenca inmediata de ∞ para f_μ .

Suponga que $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tiene a ∞ como atractor y que W es como arriba, entonces $\Lambda = \mathbb{R}^n \setminus B_\infty$ es el conjunto de puntos cuya órbita (positiva) es acotada; se adopta la nomenclatura de la dinámica compleja y llamamos a Λ *conjunto de Julia* de F . Si para cada subconjunto A de \mathbb{R}^n hacemos $A^c = \mathbb{R}^n \setminus A$ (complemento de A), entonces

$$\Lambda = \bigcap_{n \geq 0} F^{-n}(W^c) = \{z \in \mathbb{R}^n : F^n(z) \in W^c \text{ para todo } n \geq 0\}.$$

No es difícil mostrar que Λ es *completamente invariante*; es decir, $F^{-1}(\Lambda) = \Lambda$. Por tanto en Λ hay dinámica, posiblemente no trivial. Así que en general se desea conocer tanto la dinámica de F restringida a Λ como la geometría de este conjunto. Otro asunto de gran interés es conocer la frontera de Λ ; esta separaría (en cierto sentido) la cuenca de atracción en ∞ con las cuencas de atracción de otros atractores, que obviamente están en Λ ; todo esto es de manera general, y muchas veces (dependiendo de cómo es F) sus respuestas o bien son triviales, o en ocasiones difíciles de formular.

En nuestro análisis de la dinámica de $F_{\mu, \epsilon}$ como en (1.3), la meta es explicar cómo encontrar un conjunto compacto $K \subset \mathbb{R}^2$, tal que $W = \mathbb{R}^2 - K$ se comporte como lo discutido en el párrafo anterior. Una aproximación para la búsqueda de este compacto es la siguiente. Sabemos que $F_{\mu, \epsilon}$ mapea la fibra $\{x\} \times \mathbb{R}$ en la fibra $\{f_\mu(x)\} \times \mathbb{R}$, la fibra $0 \times \mathbb{R}$ es fija, la fibra $\{1\} \times \mathbb{R}$ es mapeada en $0 \times \mathbb{R}$ y toda fibra $\{f_\mu(x)\} \times \mathbb{R}$ está a la izquierda de $0 \times \mathbb{R}$ cualquiera sea $x \notin [0, 1]$. Por otra parte, también es cierto que la imagen por $F_{\mu, \epsilon}$ de la horizontal $\{y = \beta\}$ es la parábola

$$P(\mu, \epsilon, \beta) = \left\{ (x, y) : x = \frac{\mu}{4} - \frac{\mu}{\epsilon^2} \left(y - h_{\mu, \epsilon}(\beta) - \frac{\epsilon}{2} \right)^2, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

Con base a esto afirmamos que existen $\beta_1 \leq 0$ y $\beta_2 \geq 1$ tales que $K = [0, 1] \times [\beta_1, \beta_2]$ es un compacto invariante con órbitas acotadas. Más aún, los valores de β_1 y β_2 pueden ser determinados de manera que: $h_{\mu, \epsilon}(\beta_1) = h_{\mu, \epsilon}(\beta_2)$ y $(0, \beta_1) \in P(\mu, \epsilon, \beta_1)$; observe que $(0, 1) \notin K^c$, luego $P(\mu, \epsilon, \beta_1) \setminus (0, \beta_1) \subset K^c$. Una ilustración gráfica de lo afirmado es dado en la Figura 5.

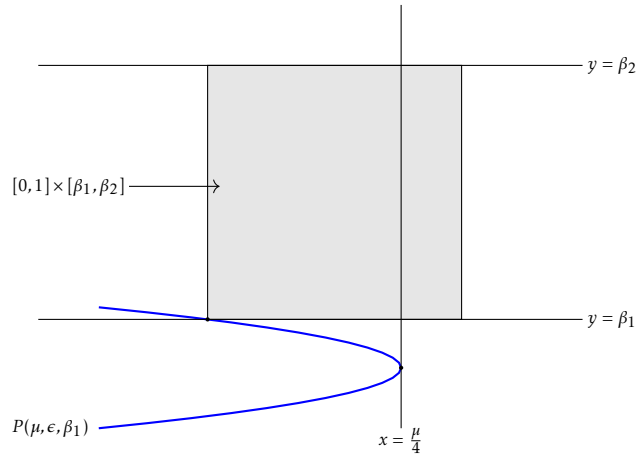


Figura 5. Ilustración de las preimágenes de las horizontales por los valores β_1 y β_2 deseados.

5. Sobre las componentes del mapa Skew

En esta sección analizamos la dinámica de las componentes del mapa skew, explorando la existencia de un compacto invariante. Para simplificar las cuentas para cada $x \in \mathbb{R}$ hacemos

$$h_x(y) = (\mu - \epsilon)y - \mu y^2 + \epsilon x, \text{ con } y \in \mathbb{R}; \tag{5.1}$$

obviamente $F_{\mu,\epsilon}(x, y) = (f_\mu(x), h_x(y))$, para todo $x, y \in \mathbb{R}$. Resaltamos que para todo $n \geq 1$ y $x, y \in \mathbb{R}$ se tiene

$$F_{\mu,\epsilon}^n(x, y) = (f_\mu^n(x), h_{x,n}(y)),$$

donde $h_{x,n}(y) = (h_{f_\mu^{n-1}(x)} \circ \dots \circ h_{f_\mu(x)} \circ h_x)(y)$.

Ahora profundizaremos en el entendimiento de h_x , primero notemos que $h'_x(y) = \mu - \epsilon - 2\mu y$, por lo que el único punto crítico de h_x es $d = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\epsilon}{\mu}\right)$ y el valor máximo de h_x es $M_x = \frac{(\mu - \epsilon)^2}{4\mu} + \epsilon x$. También es claro que un punto es fijo para h_x si y sólo si es raíz de $(\mu - \epsilon - 1)y - \mu y^2 + \epsilon x = 0$. Por tanto h_x tiene puntos fijos si y sólo si $x > -\frac{(\mu - \epsilon - 1)^2}{4\epsilon\mu}$; en tal caso, estos puntos fijos son dados por

$$\begin{cases} a(x) = \frac{1}{2\mu} \left(\mu - \epsilon - 1 - \sqrt{(\mu - \epsilon - 1)^2 + 4\epsilon\mu x} \right) \\ \widehat{a}(x) = \frac{\mu - \epsilon - 1}{\mu} - a(x), \end{cases} \tag{5.2}$$

obviamente $a(x)$ es la menor raíz de $(\mu - \epsilon - 1)y - \mu y^2 + \epsilon x = 0$. También es claro que si x es un punto fijo de f_μ , entonces $(x, a(x))$ es el punto fijo de $F_{\mu,\epsilon}$ en la fibra $\{x\} \times \mathbb{R}$ con menor ordenada; más precisamente

$$a(0) = \begin{cases} 0, & \text{si } \mu > 1 + \epsilon \\ \frac{\mu - \epsilon - 1}{\mu}, & \text{si } \mu \leq 1 + \epsilon \end{cases} \text{ y } a\left(\frac{\mu - 1}{\mu}\right) = -\frac{\epsilon}{\mu}.$$

Denotemos por $b(x)$ la otra preimagen de $a(x)$ según h_x ; es decir

$$b(x) = 1 - \frac{\epsilon}{\mu} - a(x), \tag{5.3}$$

en otras palabras

$$b(x) = \frac{1}{2\mu} \left(\mu - \epsilon + 1 + \sqrt{(\mu - \epsilon - 1)^2 + 4\epsilon\mu x} \right); \tag{5.4}$$

claramente $a(x) + b(x) = 2d$, $a(x) \leq 0$ y $b(x) > 0$. Por otra parte, es simple verificar que

$$\begin{cases} h'_x(a(x)) = 1 + \sqrt{(\mu - \epsilon - 1)^2 + 4\epsilon\mu x} \\ h'_x(\widehat{a}(x)) = 1 - \sqrt{(\mu - \epsilon - 1)^2 + 4\epsilon\mu x} \end{cases}; \tag{5.5}$$

Así, el gráfico de h_x tiene sus puntos fijos como lo indica la Figura 6, es decir: $(a(x), a(x))$ en el tercer cuadrante, $(\widehat{a}(x), \widehat{a}(x))$ en el primer cuadrante y $(a(x), b(x))$ en el cuarto cuadrante.

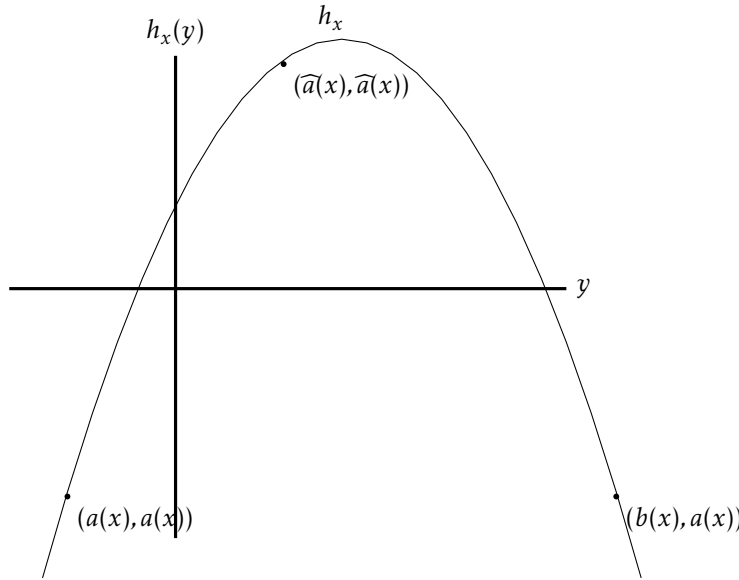


Figura 6. Gráfica de h_x , recordemos que $\widehat{a}(x)$ representa un punto fijo de h_x

Note que $a(x)$ siempre es repulsor y $\widehat{a}(x)$ puede transitar por una bifurcación “flip” en efecto tal bifurcación se caracteriza por la pérdida de hiperbolicidad de el punto fijo como consecuencia también se pierde estabilidad y periodicidad del sistema, anticipando la llegada de una cascada de duplicación de período, ver [13] [Capítulo 3] para más detalles.

Para cada $x \in [0, 1]$, el mapa h_x se escribe como $f_{\rho(x)}$, en forma más precisa se tiene

Lema 5.1. Dado $x \in [0, 1]$ fijo, el mapa h_x es topológicamente conjugado a un elemento $f_{\rho(x)}$ de la familia logística.

Demostración. Para $x \in [0, 1]$ fijo, escribimos $h_x(y) = -\mu y^2 + (\mu - \epsilon)y + \epsilon x$, consideremos la transformación afín, $\varphi(y) = \alpha y + \beta$ con α y β por determinar, su inversa es $\varphi^{-1}(y) = \frac{y-\beta}{\alpha}$, hagamos $g(y) := \varphi^{-1} \circ h_x \circ \varphi(y)$, entonces se cumplen las igualdades

$$\begin{aligned} g(y) &= \varphi^{-1} \circ h_x(\alpha y + \beta) = \varphi^{-1}(-\mu(\alpha y + \beta)^2 + (\mu - \epsilon)(\alpha y + \beta) + \epsilon x) \\ &= -\mu\alpha y^2 + (-2\mu\beta + (\mu - \epsilon))y - \frac{-\mu\beta^2 + (\mu - \epsilon)\beta + \epsilon x - \beta}{\alpha}. \end{aligned}$$

Tomando α, β tal que $-\mu\alpha = 1$ y $-2\mu\beta + (\mu - \epsilon) = 0$, entonces g se escribe como $g(y) = y^2 + k$, donde $k := \frac{-4\mu\epsilon x + 2(\mu - \epsilon)\beta - (\mu - \epsilon)^2}{4}$, el término sobrante.

Ahora tomamos una segunda transformación afín $\psi(y) = \gamma y + \delta$, tenemos que $\psi^{-1}(y) = \frac{y-\delta}{\gamma}$, obtenemos las igualdades

$$\begin{aligned} \psi^{-1} \circ g \circ \psi(y) &= \frac{(\gamma y + \delta)^2 + k - \delta}{\gamma} \\ &= \gamma y^2 + 2\delta y + \frac{\delta^2 - \delta + k}{\gamma}. \end{aligned}$$

Haciendo $\delta^2 - \delta + k = 0$, en particular tomando $\delta := \frac{1 + \sqrt{1-4k}}{2}$, la raíz positiva y $\gamma := -(1 + \sqrt{1-4k})$, entonces resulta $\psi^{-1} \circ g \circ \psi(y) = (1 + \sqrt{1-4k})y(1-y)$. Elijiendo $\rho(x) = 1 + \sqrt{1-4k}$, entonces $\psi^{-1} \circ g \circ \psi$ es $f_{\rho(x)}$, por transitividad de la conjugación, también h_x es conjugada a $f_{\rho(x)}$, lo cual concluye la prueba. \square

Esquemáticamente ilustramos el lema anterior donde la parábola de h_x se ve como lo ilustra la Figura 7.

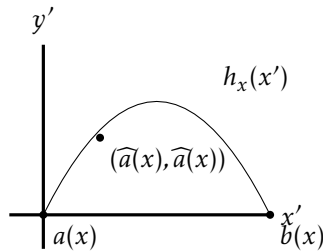


Figura 7. Gráfica de h_x , en los nuevos $x' - y'$.

Así, la conjugación lleva la parábola h_x en la logística cuya gráfica es dada en la Figura 8.

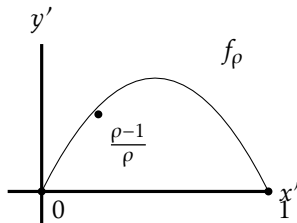


Figura 8. Gráfica de f_{ρ} . Recuerde que $(\frac{\rho-1}{\rho})$ representa un punto fijo de f_{ρ} .

Note que los intervalos $I_x = [a(x), b(x)]$ son estrictamente crecientes: $I_{x_1} \subsetneq I_{x_2}$ siempre que $x_2 > x_1$; esto es, $a(x_2) < a(x_1)$ y $b(x_2) > b(x_1)$ para todo $x_2 > x_1$; también es claro que

$$\begin{cases} h_x(t) < t, \text{ para todo } t < a(x) \\ h_x((b(x), +\infty)) = (-\infty, a(x)) \\ h_x^n(t) \rightarrow -\infty \text{ cuando } n \rightarrow +\infty, \text{ cualquiera sea } t \notin [a(x), b(x)] \end{cases} \quad (5.6)$$

Adicionalmente, como $\{x\} \times \mathbb{R}$ es mapeado por $F_{\mu, \epsilon}$ en $\{f_\mu(x)\} \times \mathbb{R}$ y $f_\mu^n(t) \rightarrow -\infty$ si $n \rightarrow +\infty$, para todo $t \notin [0, 1]$, las órbitas acotadas de $F_{\mu, \epsilon}$ viven en la banda $[0, 1] \times \mathbb{R}$; es esta la razón por la que se considera solamente $x \in [0, 1]$ al analizar los puntos con órbitas acotadas. Note adicionalmente que si x es cualquier punto en $[0, 1]$, entonces en el intervalo I_x hay puntos cuya h_x -órbita (positiva) se sale de I_x si y sólo si $\mu > 4a(x)$; esto sigue de la conocida propiedad que en $[0, 1]$ hay puntos cuya f_ρ -órbita abandona este intervalo si y sólo si $\rho > 4$. Dicho de otra manera: el valor máximo M_x de la función h_x excede a $b(x)$ si y sólo si $(b(x) - a(x))\mu > 4$. Como

$$b(x) - a(x) = \frac{1}{\mu} \left(1 + \sqrt{(\mu - \epsilon - 1)^2 + 4\epsilon\mu x} \right),$$

se tiene que

$$M_x > b(x) \text{ si y sólo si } (\mu - \epsilon - 1)^2 + 4\epsilon\mu x > 9; \quad (5.7)$$

en particular, $M_x > b(x)$ para cada $x \in [0, 1]$ si y sólo si $\mu > 4 + \epsilon$.

6. Detección de un buen compacto invariante

Este apartado de nuestro estudio tiene como meta detectar un compacto invariante Q tal que la dinámica del acoplamiento skew $F_{\mu, \epsilon}$ fuera de Q sea trivial, es decir todo punto fuera de Q tenga ω -límite vacío este es el resultado principal de nuestra investigación, el cual enunciamos a continuación

Teorema 6.1. *El sistema (1.3) admite un conjunto compacto invariante Q tal que su complemento es positivamente invariante y todo punto en Q^c tiene conjunto ω -límite vacío.*

Demostración. Recordemos que dado un número real β , la imagen de la recta horizontal $y = \beta$ es la parábola $P(\mu, \epsilon, \beta)$ de ecuación:

$$x = \frac{\mu}{4} - \frac{\mu}{\epsilon^2} \left(y - (\mu - \epsilon)\beta + \mu\beta^2 - \frac{\epsilon}{2} \right)^2. \quad (6.1)$$

Al hacer uso de la función h_x ($h_x(y) = f_\mu(y) - \epsilon y + \epsilon x$), la expresión de arriba es:

$$x = \frac{\mu}{4} - \frac{\mu}{\epsilon^2} \left(y - h_0(\beta) - \frac{\epsilon}{2} \right)^2. \quad (6.2)$$

Note que cuando $\beta = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\epsilon}{\mu} \right)$, esta parábola es la de valores críticos

$$x = \frac{\mu}{4} - \frac{\mu}{\epsilon^2} \left(y - \frac{\mu}{4} - \frac{\epsilon^2}{4\mu} \right)^2, \quad x \leq \frac{\mu}{4}, \quad (6.3)$$

cuyas ramas inferior y superior son dadas, respectivamente, por

$$y = \frac{\mu^2 + \epsilon^2}{4\mu} - \frac{\epsilon}{2} \sqrt{1 - \frac{4x}{\mu}} \quad \text{y} \quad y = \frac{\mu^2 + \epsilon^2}{4\mu} + \frac{\epsilon}{2} \sqrt{1 - \frac{4x}{\mu}}. \quad (6.4)$$

En general, las ramas superior e inferior de la parábola $P(\mu, \epsilon, \beta)$ son dadas por

$$y = h_0(\beta) + \frac{\epsilon}{2} \pm \frac{\epsilon}{2} \sqrt{1 - \frac{4x}{\mu}}, \quad x \leq \frac{\mu}{4}; \quad (6.5)$$

en particular los valores de y en la expresión anterior cuando $x = 0$ son

$$y = h_0(\beta) + \frac{\epsilon}{2} \pm \frac{\epsilon}{2}.$$

Deseamos un valor de β de forma que $h_1(\beta) = \beta$, así β es $a(1)$ ó $\widehat{a}(1)$; tomamos el menor de ellos, $a(1)$, y definimos el compacto Q dado por el rectángulo $[0, 1] \times [a(1), b(1)]$. De lo discutido se desprende lo siguiente:

1. $Q \cap P(\epsilon, \mu, a(1)) = Q \cap P(\epsilon, \mu, b(1)) = \{(0, a(1))\}$.
2. Dado $\beta \notin [a(1), b(1)]$, si $(0, y_\beta)$ es el punto de intersección entre la rama superior de $P(\epsilon, \mu, \beta)$ y Q . Si $\beta < a(1)$, entonces $y_\beta < \beta$; por lo que la ordenada de $F_{\mu, \epsilon}(x, \beta)$, para cualquier x , es menor que β .

Sean $Q^+ = ([0, 1] \times \mathbb{R}) \cap \{(x, y) : y > b(1)\}$ y $Q^- = ([0, 1] \times \mathbb{R}) \cap \{(x, y) : y < a(1)\}$, de lo anterior se deduce que $F_{\mu, \epsilon}(Q^+) \subset Q^-$ y que $F_{\mu, \epsilon}(Q^-) \subset Q^-$; de hecho, también permite concluir que los puntos en Q^- tienen órbita no acotada. En realidad esto es una situación particular de la propiedad general que se enuncia en el siguiente resultado que puede encontrarse en [12], Lema 2.1.

Lema 6.2. Sean $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua, $W \subset \mathbb{R}^n$ tal que $F(W) \subset W$. Si existe una función continua $L : W \rightarrow \mathbb{R}$ tal que la diferencia orbital $\Delta L = L \circ F - L$ sea definida (positiva o negativa), entonces los puntos en W tienen órbita no acotada.

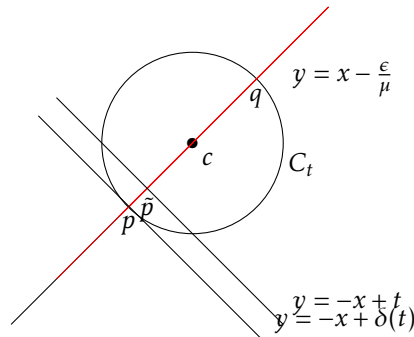
Una función L como en el Lema anterior se le llama *función de Lyapunov* asociada a F en el conjunto W . Note que en nuestro caso basta considerar $W = Q^-$ y $L : Q^- \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $L(x, y) = y$ para cada $(x, y) \in Q^-$. De acá tenemos que ∞ sea un atractor para $F_{\mu, \epsilon}$; además, si $ext Q$ es la componente no acotada del complemento de Q ($int Q$ es la respectiva componente acotada), entonces $ext Q \subset B_\infty$ y así se tiene

$$B_\infty = \bigcup_{n \geq 0} F_{\mu, \epsilon}^{-n}(ext Q) \quad \text{y} \quad \Lambda := \mathbb{R}^2 \setminus B_\infty = \bigcap_{n \geq 0} F_{\mu, \epsilon}^{-n}(Q). \quad (6.6)$$

Note que Λ es el conjunto de puntos cuyas órbitas son acotadas; observe también que Λ es completamente invariante; esto es, $F_{\mu, \epsilon}^{-1}(\Lambda) = \Lambda$.

La vecindad Q arriba considerada no es la única con la propiedad descrita. Otra forma de obtener una tal vecindad es la siguiente. Primero considere cualquier $t < \frac{\mu}{2}(1 + \frac{\epsilon^2}{\mu^2})$, es simple verificar que la preimagen, según $F_{\mu, \epsilon}$, de la recta definida por $y = -x + t$ es la circunferencia C_t (ver Figura 9) cuya ecuación es

$$(x - \frac{1}{2}(1 + \frac{\epsilon}{\mu}))^2 + (y - \frac{1}{2}(1 - \frac{\epsilon}{\mu}))^2 = \frac{1}{2}(1 + \frac{\epsilon^2}{\mu^2}) - \frac{t}{\mu}. \quad (6.7)$$

Figura 9. Circunferencia C_t

Claramente todas estas circunferencias tienen el mismo centro en el punto $c = (c_1, c_2)$, donde $c_1 = \frac{1}{2}(1 + \frac{\epsilon}{\mu})$ y $c_2 = \frac{1}{2}(1 - \frac{\epsilon}{\mu})$.

Definamos $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ por $g(x, y) = f_\mu(x) + h_x(y)$ para cada $x, y \in \mathbb{R}$; note que la curva de nivel t ; i.e. $g^{-1}(t)$, es justamente C_t si $t < \frac{\mu}{2}(1 + \frac{\epsilon^2}{\mu^2})$; además, el único punto crítico de g es el centro de las circunferencias C_t , adicionalmente:

$$g^{-1}(t) = \emptyset \text{ si } t > \frac{\mu}{2}(1 + \frac{\epsilon^2}{\mu^2}), \text{ y } g^{-1}(\frac{\mu}{2}(1 + \frac{\epsilon^2}{\mu^2})) = (\frac{1}{2}(1 + \frac{\epsilon}{\mu}), \frac{1}{2}(1 - \frac{\epsilon}{\mu}));$$

así que $\{C_t\}_t$, con $t < \frac{\mu}{2}(1 + \frac{\epsilon^2}{\mu^2})$, es una partición de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(\frac{1}{2}(1 + \frac{\epsilon}{\mu}), \frac{1}{2}(1 - \frac{\epsilon}{\mu}))\}$; observe que mientras mayor sea el valor del nivel, menor es el radio de la respectiva circunferencia. Por otra parte, el lugar geométrico donde ocurren las tangencias de las circunferencias C_t con rectas $y = -x + \delta$ es dado por la recta de ecuación $y = x - \frac{\epsilon}{\mu}$; tales puntos le llamaremos *puntos de tangencia antidiagonal*, los cuales se ilustran en rojo en la Figura 9. En consecuencia los puntos de tangencias antidiagonal de C_t son aquellos que resuelven

$$g(x, y) = t \text{ y } y = x - \frac{\epsilon}{\mu};$$

podemos ver que estos puntos son: $p = (x_-, x_- - \frac{\epsilon}{\mu})$ y $q = (x_+, x_+ - \frac{\epsilon}{\mu})$, donde

$$x_\pm = \frac{1}{2\mu} \left(\mu + \epsilon \pm \sqrt{\mu^2 + \epsilon^2 - 2t\mu} \right).$$

Con estas observaciones note que la recta antidiagonal tangente a C_t en p es la dada por $y = -x + \delta(t)$ donde

$$\delta(t) = 1 - \frac{1}{\mu} \sqrt{\mu^2 + \epsilon^2 - 2\mu t}, \text{ con } t \leq \frac{1}{2\mu}(\mu^2 + \epsilon^2). \quad (6.8)$$

Observe que los puntos fijos de $t \mapsto \delta(t)$ son aquellos valores t tales que la recta que genera a C_t ($y = -x + t$) coincide con la recta antidiagonal tangente ($y = -x + \delta(t)$) a C_t en el punto p . Es simple mostrar que $t \mapsto \delta(t)$ tiene a lo más dos puntos fijos y siempre uno de ellos es negativo. Si β es el menor de tales puntos fijos, entonces

$$\beta = \frac{\mu-1}{\mu} - \frac{1}{\mu} \sqrt{(\mu-1)^2 + \epsilon^2}. \quad (6.9)$$

Con esta selección del punto fijo β siguen inmediatamente:

- La recta $y = -x + \beta$ no solo genera a C_β como preimagen sino que también es tangente antidiagonal por el respectivo punto p .
- Para cada $t < \beta$, la recta $y = -x + t$ (que genera a C_t como preimagen) está por debajo de $y = -x + \delta(t)$ (tangente antidiagonal a C_t) y $C_\beta \subset \text{int } C_t$.
- Mientras que para cada $t > \beta$, la recta $y = -x + t$ está por encima de $y = -x + \delta(t)$ y en este caso $C_t \subset \text{int } C_\beta$.

Para el β seleccionado denotamos por W el semiespacio definido por todos los (x, y) tales que $y < -x + \beta$. Es simple mostrar que $F_{\mu, \epsilon}(W) \subset W$ y al considerar la función L dada por $L(x, y) = x + y$ se tiene $\Delta L < 0$ en W . De esta forma, al usar el Lema 6.2 se deduce que $\text{ext } C_\beta \subset B_\infty$, y por tanto la validez de (6.6) con $\Gamma = C_\beta$. La Figura 10 ilustra lo anterior. Esto nos da otra construcción de un tal Q y concluye la prueba.

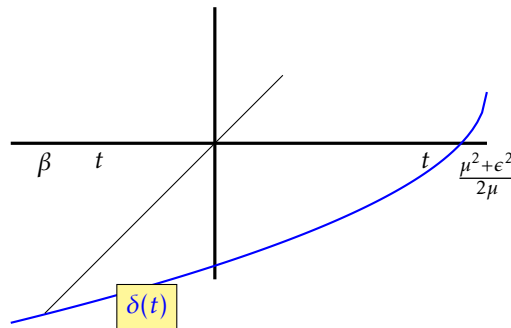


Figura 10. Significado geométrico de $\delta(t)$.

□

En lo que sigue analizamos algunas propiedades de los conjuntos invariantes construidos.

7. Posiciones relativas

Fijemos $Q = [0, 1] \times [a(1), b(1)]$ como la primera aproximación compacta para describir el conjunto de puntos con órbitas acotadas (complemento de la cuenca B_∞ del atractor en el infinito). En adelante este conjunto es denotado por $\Lambda_{\mu, \epsilon}$ pues depende de los parámetros ϵ y μ ; ya sabemos que $\Lambda_{\mu, \epsilon} = \bigcap_{n \geq 0} F_{\mu, \epsilon}^{-n}(Q)$. Dado que queremos analizar preimágenes de Q , es importante conocer las posiciones relativas de Q y el conjunto de valores críticos J_1 : unión del rayo $\{(\frac{\mu}{4}, t) : t \leq \frac{\mu^2 + \epsilon^2}{4\mu}\}$ y la parábola crítica $P(\mu, \epsilon, \frac{1}{2}(1 - \frac{\epsilon}{\mu}))$. Para esto debe tenerse en cuenta:

1. La ordenada $b(1)$ de los vértices superiores de Q .
2. Las ordenadas de los puntos de intersección de $P(\mu, \epsilon, \frac{1}{2}(1 - \frac{\epsilon}{\mu}))$ con el eje $x = 0$, estos son: $\frac{\mu}{4} + \frac{\epsilon^2}{4\mu} - \frac{\epsilon}{2}$ y $\frac{\mu}{4} + \frac{\epsilon^2}{4\mu} + \frac{\epsilon}{2}$, los mismos corresponden con los valores máximos de las funciones h_0 y h_1 respectivamente.

3. El vértice $(\frac{\mu}{4}, \frac{\mu}{4} + \frac{\epsilon^2}{4\mu})$ de la parábola $P(\mu, \epsilon, \frac{1}{2}(1 - \frac{\epsilon}{\mu}))$.

Para facilitar, posiblemente, las notaciones y cuentas hagamos

$$D = \frac{\mu}{4} + \frac{\epsilon^2}{4\mu} - b(1), D_1 = \frac{\mu}{4} + \frac{\epsilon^2}{4\mu} - \frac{\epsilon}{2} - b(1) \text{ y } D_2 = \frac{\mu}{4} + \frac{\epsilon^2}{4\mu} + \frac{\epsilon}{2} - b(1).$$

Una cuenta directa muestra, con $\delta = \sqrt{(\mu - \epsilon - 1)^2 + 4\epsilon\mu}$, que:

$$\begin{cases} D = \frac{1}{4\mu}(\delta - 1 - \sqrt{4 + 2\epsilon\mu})(\delta - 1 + \sqrt{4 + 2\epsilon\mu}) \\ D_1 = \frac{1}{4\mu}(\delta - 1 + 2\sqrt{1 + \epsilon\mu})(\delta - 1 - 2\sqrt{1 + \epsilon\mu}) \\ D_2 = \frac{1}{4\mu}(\delta - 3)(\delta + 1) \end{cases} \quad (7.1)$$

Una primera observación obvia: cada uno de los segundos factores en las expresiones anteriores son positivas para todo valor $\mu > 1$ y $\epsilon \in (0, 1)$; basta observar que $\delta > 0$ y que $2\sqrt{1 + \epsilon\mu} > \sqrt{4 + 2\epsilon\mu} > 2$; de donde

$$D > 0 \iff \mu^2 - 2\mu + \epsilon^2 + 2\epsilon - 4 - 2\sqrt{4 + 2\epsilon\mu} > 0. \quad (7.2)$$

$$D_1 > 0 \iff \mu^2 - 2\mu + \epsilon^2 + 2\epsilon - 4 - 2\epsilon\mu - 4\sqrt{1 + \epsilon\mu} > 0. \quad (7.3)$$

$$D_2 > 0 \iff \mu > 1 - \epsilon + \sqrt{9 - 4\epsilon}. \quad (7.4)$$

Es fácil ver que (7.2) se cumple para todo $\mu \geq 4 + \epsilon$ y $\epsilon \in (0, 1)$. Tampoco es difícil verificar que $D < 0$ para cada $\epsilon \in (0, 1)$ y todo $1 < \mu \leq 3$; así mismo, $D < 0$ si $\mu = 4 - \epsilon$, cualquiera sea $0 < \epsilon < 1$. Sin embargo, para cada $\mu \leq 4$ cercano a 4, siempre hay algún $\epsilon \in (0, 1)$ de forma que $D > 0$. Para mostrar esto fijemos cualquier $\mu > 1$, dado que $\sup_{\epsilon \in (0, 1)} \frac{\mu^2 + \epsilon^2}{4\mu} = \frac{\mu^2 + 1}{4\mu}$ y $\sup_{\epsilon \in (0, 1)} b(1) = \frac{1}{2\mu}(\mu + \sqrt{\mu^2 + 4})$ sigue inmediatamente que $\sup_{\epsilon \in (0, 1)} \frac{\mu^2 + \epsilon^2}{4\mu} > \sup_{\epsilon \in (0, 1)} b(1)$ si y sólo si $(\mu - 1)^2 > 2\sqrt{\mu^2 + 4}$. Observe que esta desigualdad es válida para $\mu = 4$, luego por continuidad existe $\delta > 0$ tal que para todo $0 < \rho < \delta$ la desigualdad continua siendo válida para $\mu = 4 - \rho$. De esta forma, para todo $\rho \in (0, \delta)$ y cada $\epsilon \in (0, 1)$ se cumple $\sup_{\epsilon \in (0, 1)} \frac{\mu^2 + \epsilon^2}{4\mu} > b(1)$; de acá que para cada $\rho \in (0, \delta)$ podemos elegir $\epsilon \in (0, 1)$ de manera que (7.2) valga para este ϵ y $\mu = 4 - \rho$.

En cuanto a D_1 , no es difícil ver que $D_1 < 0$ para todo $\mu \leq 4 + \epsilon$ y cada $\epsilon \in (0, 1)$. De hecho, dado que $(\mu - \epsilon - 1)^2 + 4\epsilon\mu > (\mu - \epsilon - 1)^2$ se tiene $b(1) > \frac{\mu - \epsilon}{\mu}$ cualesquiera sean $\mu > 1$ y $\epsilon \in (0, 1)$; y como $\frac{\mu - \epsilon}{\mu} > \frac{(\mu - \epsilon)^2}{4\mu}$ si y sólo si $\mu \leq 4 + \epsilon$, la afirmación sigue. También se muestra que $D_1 > 0$ para todo $\epsilon \in (0, 1)$ y $\mu \geq 5 + \epsilon$. Además, cuando $\mu = 5$ se tiene que D_1 varía de signo con ϵ ; de hecho $D_1 > 0$ si ϵ es próximo de 0, y es negativo si ϵ es cercano a 1.

Con relación a D_2 dado que

$$\inf_{\epsilon \in (0, 1)} (1 - \epsilon + \sqrt{9 - 4\epsilon}) = \sqrt{5} \text{ y } \sup_{\epsilon \in (0, 1)} (1 - \epsilon + \sqrt{9 - 4\epsilon}) = 4$$

se puede demostrar sin dificultad:

- a) Para todo $\mu \geq 4$ y $\epsilon \in (0, 1)$, $D_2 > 0$.
- b) Para cada $\mu \leq \sqrt{5}$ se tiene $D_2 < 0$.
- c) Cuando μ varía en el intervalo $(\sqrt{5}, 4)$, D_2 cambia de signo.

Las siguientes gráficas en Figura 11 evidencian numéricamente lo anterior.

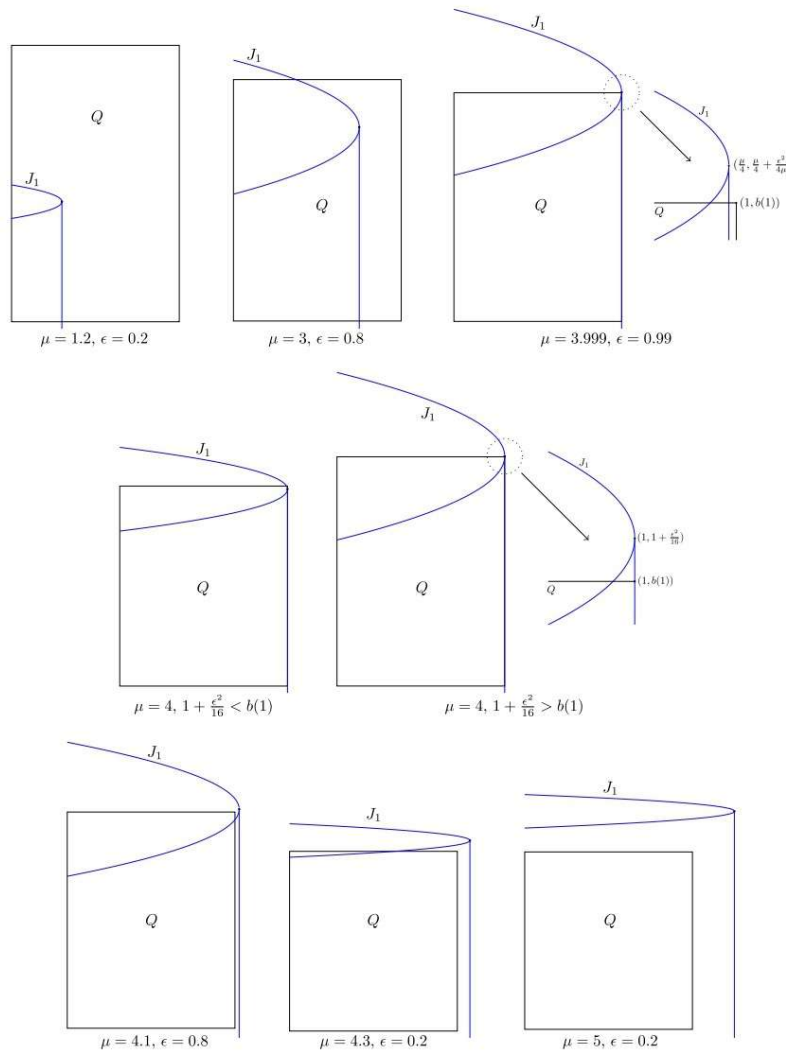


Figura 11. Posiciones relativas

8. Comentarios sobre preimágenes

Consideremos cualquier punto $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ que admita preimágenes; es decir, que exista al menos un punto (x, y) tal que $F_{\mu, \epsilon}(x, y) = (u, v)$; esto equivale a $f_\mu(x) = u$ y $h_x(y) = v$; recuerde que $h_x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es definida, para cada $x \in \mathbb{R}$, fijo por $h_x(t) = (\mu - \epsilon)t - \mu t^2 + \epsilon x$, cualquiera sea $t \in \mathbb{R}$; recuerde además que

$$\text{máx } f_\mu = \frac{\mu}{4} \text{ y } \text{máx } h_x = \frac{(\mu - \epsilon)^2}{4\mu} + \epsilon x.$$

Es claro que $f_\mu(x) = u$ admite solución en x si y sólo si $u \leq \frac{\mu}{4}$; en tal caso

$$x_-(u) = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4u}{\mu}} \right) \text{ y } x_+(u) = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4u}{\mu}} \right) \quad (8.1)$$

definen las soluciones de $f_\mu(x) = u$. Por otra parte, para cada uno de los valores u -dependientes de arriba, $x_-(u)$ y $x_+(u)$, la ecuación $h_x(y) = v$ admite soluciones si y sólo si $v \leq \text{máx } h_x$; es decir

$$v \leq \frac{\mu^2 + \epsilon^2}{4\mu} - \frac{\epsilon}{2} \sqrt{1 - \frac{4u}{\mu}}, \text{ o bien } v \leq \frac{\mu^2 + \epsilon^2}{4\mu} + \frac{\epsilon}{2} \sqrt{1 - \frac{4u}{\mu}}; \quad (8.2)$$

en cualquiera de estos casos, las soluciones en y de $h_x(y) = v$ son descritas por

$$y = \frac{1}{2\mu} \left(\mu - \epsilon \pm \sqrt{(\mu - \epsilon)^2 + 4\epsilon\mu x - 4\mu v} \right). \quad (8.3)$$

Las desigualdades en (8.2) determinan lugares geométricos distinguidos e importantes para el análisis y descripción de la dinámica de $F_{\mu, \epsilon}$. La primera de estas desigualdades corresponde a la clausura de la región abierta Z_4 cuya frontera es la rama inferior de la parábola $P(\mu, \epsilon, \frac{1}{2}(1 - \frac{\epsilon}{\mu}))$ y el rayo $\{(\frac{\mu}{4}, t) : t \leq \frac{\mu^2 + \epsilon^2}{4\mu}\}$; la segunda desigualdad define justamente el epigrafo de $P(\mu, \epsilon, \frac{1}{2}(1 - \frac{\epsilon}{\mu}))$, denotamos por Z_2 el interior de este epigrafo, ver Figura 12.

Analicemos el comportamiento de los puntos en cada una de las zonas arriba descritas.

• **Caso A.** $v \leq \frac{\mu^2 + \epsilon^2}{4\mu} - \frac{\epsilon}{2} \sqrt{1 - \frac{4u}{\mu}}$. Obviamente $v \leq \frac{\mu^2 + \epsilon^2}{4\mu}$ e inmediato verificar que $u \geq \frac{\mu}{4} - \frac{\mu}{\epsilon^2} \left(v - \frac{\mu^2 + \epsilon^2}{4\mu} \right)^2$. Note que en estas condiciones $(\mu - \epsilon)^2 + 4\epsilon\mu x_-(u) - 4\mu v \geq 0$ y claramente $(\mu - \epsilon)^2 + 4\epsilon\mu x_+(u) - 4\mu v \geq 0$, de manera que (8.3) tiene sentido tanto para $x = x_-(u)$ como para $x = x_+(u)$; por lo cual $F_{\mu, \epsilon}^{-1}(u, v)$ contiene a los más cuatro puntos:

$$(x_-(u), y_-(u, v)), (x_-(u), y_+(u, v)), (x_+(u), y_-(u, v)), (x_+(u), y_+(u, v)), \quad (8.4)$$

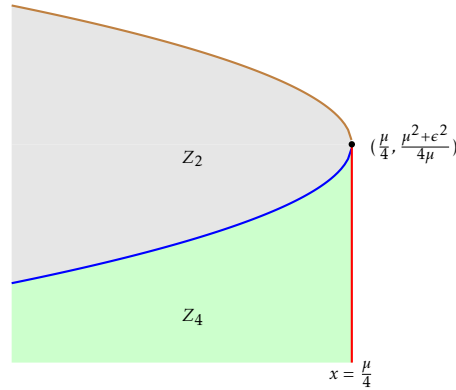


Figura 12. Ilustración del conjunto de valores críticos $J_1 = P(\mu, \epsilon, \frac{1}{2}(1 - \frac{\epsilon}{\mu})) \cup \{(\frac{\mu}{4}, t) : t \leq \frac{\mu^2 + \epsilon^2}{4\mu}\}$ junto a las clausuras de las zonas Z_2 y Z_4 .

siendo que

$$\begin{aligned}
 y_-(u, v) &= \frac{1}{2\mu} \left(\mu - \epsilon - \sqrt{(\mu - \epsilon)^2 + 4\epsilon\mu x_-(u) - 4\mu v} \right) \\
 y_+(u, v) &= \frac{1}{2\mu} \left(\mu - \epsilon + \sqrt{(\mu - \epsilon)^2 + 4\epsilon\mu x_-(u) - 4\mu v} \right) \\
 y_-(u, v) &= \frac{1}{2\mu} \left(\mu - \epsilon - \sqrt{(\mu - \epsilon)^2 + 4\epsilon\mu x_+(u) - 4\mu v} \right) \\
 y_+(u, v) &= \frac{1}{2\mu} \left(\mu - \epsilon + \sqrt{(\mu - \epsilon)^2 + 4\epsilon\mu x_+(u) - 4\mu v} \right)
 \end{aligned} \tag{8.5}$$

Aprovechamos las expresiones en (8.1), (8.4) y (8.5) para hacer algunas precisiones sobre el caso que estamos tratando: **A1.A1**.

1. Si $u = \frac{\mu}{4}$ y $v = \frac{\mu^2 + \epsilon^2}{4\mu}$, entonces los pares ordenados en (8.4) son coincidentes con el punto crítico $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}(1 - \frac{\epsilon}{\mu}))$; es decir

$$F_{\mu, \epsilon}^{-1}\left(\frac{\mu}{4}, \frac{\mu^2 + \epsilon^2}{4\mu}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\epsilon}{\mu}\right)\right).$$

Por otra parte, si $u = \frac{\mu}{4}$ y $v < \frac{\mu^2 + \epsilon^2}{4\mu}$, entonces además de $x_-(u) = x_+(u) = \frac{1}{2}$ se tiene

$$y_-(u, v) = y_+(u, v), \quad y_-(u, v) = y_+(u, v) \quad \text{y} \quad (\mu - \epsilon)^2 + 4\epsilon\mu x_{\pm}(u) - 4\mu v > 0;$$

en consecuencia todo punto en el rayo $\{(\frac{\mu}{4}, v) : v < \frac{\mu^2 + \epsilon^2}{4\mu}\}$ tiene exactamente dos preimágenes, estas se ubican simétricamente respecto del punto crítico $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}(1 - \frac{\epsilon}{\mu}))$. Observe que en cuanto v recorre $(-\infty, \frac{\mu^2 + \epsilon^2}{4\mu})$, las preimágenes de (u, v) recorren toda la línea crítica ℓ_1 ($x = \frac{1}{2}$).

2. Si (u, v) está en la rama inferior de $P(\mu, \epsilon, \frac{1}{2}(1 - \frac{\epsilon}{\mu}))$, excepto el valor crítico

$(\frac{\mu}{4}, \frac{\mu^2+\epsilon^2}{4\mu})$; es decir: $v = \frac{\mu^2+\epsilon^2}{4\mu} - \frac{\epsilon}{2} \sqrt{1 - \frac{4u}{\mu}}$ y $u < \frac{\mu}{4}$, entonces se muestra:

$$x_-(u) < x_+(u), y_-(u, v) = y_+^-(u, v) = \frac{1}{2}(1 - \frac{\epsilon}{\mu}) \text{ y } (\mu - \epsilon)^2 + 4\epsilon\mu x_+(u) - 4\mu v > 0.$$

Por tanto $F_{\mu, \epsilon}^{-1}(u, v)$ contiene exactamente tres puntos:

$$(x_-(u), \frac{1}{2}(1 - \frac{\epsilon}{\mu})), (x_+(u), y_+^-(u, v)) \text{ y } (x_+(u), y_+^+(u, v)).$$

Haciendo uso de las fórmulas en (8.5) y el hecho que (u, v) está en la rama inferior de $P(\mu, \epsilon, \frac{1}{2}(1 - \frac{\epsilon}{\mu}))$ se deduce por un lado que

$$\frac{\mu}{2\epsilon} (y_+^+(u, v) - \frac{1}{2}(1 - \frac{\epsilon}{\mu}))^2 = x_+(u) - \frac{1}{2};$$

y además, al recorrer (u, v) la rama inferior de $P(\mu, \epsilon, \frac{1}{2}(1 - \frac{\epsilon}{\mu}))$, $(x_-(u), \frac{1}{2}(1 - \frac{\epsilon}{\mu}))$ y el par de puntos $(x_+(u), y_+^-(u, v)), (x_+(u), y_+^+(u, v))$ recorren, respectiva y unívocamente, el rayo:

$$\ell'_2 = \{(t, \frac{1}{2}(1 - \frac{\epsilon}{\mu})) : t \leq \frac{1}{2}\} \quad (8.6)$$

y la parábola $\tilde{\ell}_2$ de ecuación

$$\tilde{\ell}_2 : \frac{\mu}{2\epsilon} (y - \frac{1}{2}(1 - \frac{\epsilon}{\mu}))^2 = x - \frac{1}{2}. \quad (8.7)$$

Ver Figura 13 para una ilustración geométrica.

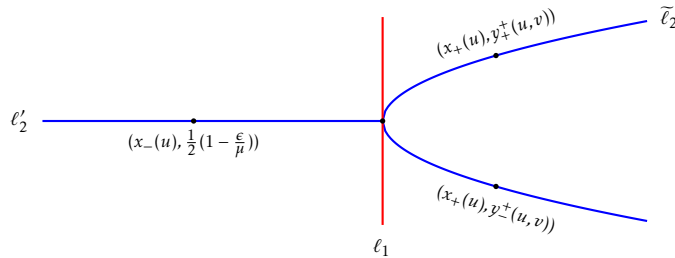


Figura 13. Ilustración de la ubicación las preimagen de un punto (u, v) en la rama inferior de la parábola $P(\mu, \epsilon, \frac{1}{2}(1 - \frac{\epsilon}{\mu}))$.

3. Supongamos ahora que (u, v) está en la región abierta Z_4 cuya frontera es la rama inferior de $P(\mu, \epsilon, \frac{1}{2}(1 - \frac{\epsilon}{\mu}))$ y el rayo $\{(\frac{\mu}{4}, y) : y \leq \frac{\mu^2+\epsilon^2}{4\mu}\}$. Esto significa que

$$u < \frac{\mu}{4} \text{ y } v < \frac{\mu^2+\epsilon^2}{4\mu} + \frac{\epsilon}{2} \sqrt{1 - \frac{\epsilon}{\mu}}.$$

Atendiendo a estas condiciones y a las fórmulas en (8.1) y (8.5) se tiene

$$x_-(u) < \frac{1}{2} < x_+(u) \text{ y } y_+^-(u, v) < y_+^-(u, v) < \frac{1}{2}(1 - \frac{\epsilon}{\mu}) < y_+^-(u, v) < y_+^+(u, v);$$

de donde se desprenden las siguientes conclusiones:

A3.1 Los puntos $(x_-(u), y_-(u, v))$ y $(x_-(u), y_+^-(u, v))$ se disponen simétricamente con respecto al rayo crítico ℓ'_2 .

A3.2 Los puntos $(x_+(u), y_-^+(u, v))$ y $(x_+(u), y_+^+(u, v))$ se ubican al lado derecho de ℓ_1 y son simétricos con respecto de ℓ_2 pero fuera del epigrafo de la parábola $\tilde{\ell}_2$, (8.7).

La ubicación de estos cuatro puntos se distribuye conforme indica la Figura 14.

• **Caso B.** $v \leq \frac{\mu^2 + \epsilon^2}{4\mu} + \frac{\epsilon}{2} \sqrt{1 - \frac{4u}{\mu}}$. Esto indica que (u, v) está en el epigrafo de $P(\mu, \epsilon, \frac{1}{2}(1 - \frac{\epsilon}{\mu}))$. Dado que hemos analizado el caso en que (u, v) esté en la rama inferior de $P(\mu, \epsilon, \frac{1}{2}(1 - \frac{\epsilon}{\mu}))$, supondremos que (u, v) está por encima de esa rama, es decir: $v > \frac{\mu^2 + \epsilon^2}{4\mu} - \frac{\epsilon}{2} \sqrt{1 - \frac{4u}{\mu}}$; luego no es difícil ver que:

$$(\mu - \epsilon)^2 + 4\epsilon\mu x_+(u) - 4\mu v \geq 0 \text{ y } (\mu - \epsilon)^2 + 4\epsilon\mu x_-(u) - 4\mu v < 0,$$

por lo que de (8.3) sigue que a lo más hay dos puntos (x, y) en $F_{\mu, \epsilon}^{-1}(u, v)$:

$$(x_+(u), y_-^+(u, v)) \text{ y } (x_+(u), y_+^+(u, v)).$$

B1.B1.

1. Supongamos que el punto (u, v) está sobre la rama superior de $P(\mu, \epsilon, \frac{1}{2}(1 - \frac{\epsilon}{\mu}))$, esto es: $v = \frac{\mu^2 + \epsilon^2}{4\mu} + \frac{\epsilon}{2} \sqrt{1 - \frac{4u}{\mu}}$. En este caso $y_-^+(u, v) = y_+^+(u, v) = \frac{1}{2}(1 - \frac{\epsilon}{\mu})$, por tanto $F_{\mu, \epsilon}^{-1}(u, v)$ es un único punto: $(x_+(u), \frac{1}{2}(1 - \frac{\epsilon}{\mu}))$; además, al recorrer (u, v) esa rama de $P(\mu, \epsilon, \frac{1}{2}(1 - \frac{\epsilon}{\mu}))$, $F_{\mu, \epsilon}^{-1}(u, v)$ recorre unívocamente el rayo $\ell''_2 = \{(t, \frac{1}{2}(1 - \frac{\epsilon}{\mu})) : t \geq \frac{1}{2}\}$.

2. Si (u, v) está en el interior del epigrafo de $P(\mu, \epsilon, \frac{1}{2}(1 - \frac{\epsilon}{\mu}))$, entonces

$$(\mu - \epsilon)^2 + 4\epsilon\mu x_+(u) - 4\mu v > 0 \text{ y } (\mu - \epsilon)^2 + 4\epsilon\mu x_-(u) - 4\mu v < 0.$$

De acá entonces que $F_{\mu, \epsilon}^{-1}(u, v)$ contenga exactamente dos puntos:

$$(x_+(u), y_-^+(u, v)) \text{ y } (x_+(u), y_+^+(u, v));$$

también se deduce que estos puntos se encuentran en el interior del epigrafo de la parábola $\tilde{\ell}_2$ y se disponen simétricamente con respecto al rayo ℓ''_2 ; ver Figura 14.

En este trabajo hemos usado varias técnicas que para determinados parámetros (μ, ϵ) nos permiten detectar un conjunto compacto invariante para (1.3), con lo cuál tenemos herramientas para estudiar zonas ricas en dinámica. En particular, se tienen zonas donde las órbitas son acotadas y otras donde no son acotadas.

Agradecimientos: Los autores expresan su agradecimiento al prof. Neptalí Romero de la UCLA en Venezuela por su estímulo e interesantes discusiones. También agradecemos a los árbitros anónimos por sus observaciones que ayudaron a mejorar el presente trabajo.

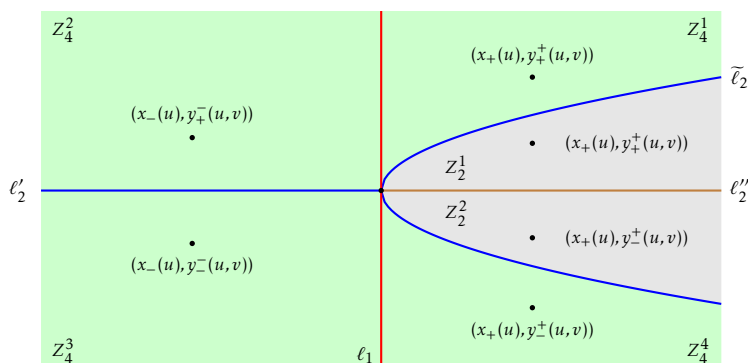


Figura 14. Ubicación de los cuatro puntos en $F_{\mu, \epsilon}^{-1}(u, v)$ cuando (u, v) está en la región abierta Z_4 (zona en verde), y ubicación de las dos preimágenes cuando (u, v) está en Z_2 (zona en gris).

Referencias

- [1] L. M. Abramov and V. A. Rohlin, *Vestnik Leningrad. Univ.* **17(7)** (1962), 5–13; English transl., *Amer. Math. Soc. Transl.* **48(2)** (1965), 255–265.
- [2] R. L. Adler, A note on the entropy of skew product transformations, *Proc. Amer. Math. Soc.* **14** (1963), 665–669.
- [3] L. Alsedà and M. Misiurewicz, Skew Product Attractors and Concavity. *Proc. Amer. Math. Soc.* **143** (2015), 703–716.
- [4] Hirotada Anzai. Ergodic Skew Product Transformations on the Torus. *Osaka Math. J.* **3(1)**, (1951) 83–99.
- [5] L. J. Díaz, S. Esteves and J. Rocha. Skew product cycles with rich dynamics: From totally non-hyperbolic dynamics to fully prevalent hyperbolicity. *Dyn. Syst.* **31(1)**. (2016) 1–40.
- [6] L. S. Efremova. Small C^1 -smooth perturbations of skew products and the partial integrability property. *Appl. Math. Nonlinear Sci.* **5(2)** (2020) 317–328.
- [7] S. Fadaei, G. Keller and F. H. Ghane. Invariant graphs for chaotically driven maps. *Nonlinearity*. **31**. (2018) 5329–5349.
- [8] M. Hasler. Synchronization of chaotic systems and transmission of information. *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.* **8(4)** (1998) 647–659.
- [9] M. Hasler and Y. L. Maistrenko. An introduction to synchronization of chaotic systems: Coupled skew tent maps. *IEEE Trans. Circuits Syst.* **144** (1997) 856 - 866.
- [10] W. Parry. Ergodic properties of affine transformations and flows on nilmanifolds. *Amer. J. Math.* **91**, (1969) 757–771.
- [11] Jana Rodríguez Hertz and Raúl Ures. *On the Three-Legged Accesibility Property*. New Trends in One-Dimensional Dynamics. María José Pacífico and Pablo Guarino (eds.) Springer Proceedings in Mathematics & Statistics. **285** (2019) 239–248.
- [12] N. Romero, A. Rovella and R. Vivas. Invariant Manifolds and Synchronization for Coupled Logistic Mappings. *Int. J. Pure Appl. Math. Sci.* **4(1)** (2007) 39–57.

- [13] Stephen Wiggins. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. Springer, (1990).
- [14] D. Lind and B. Marcus (1995) *An Introduction to Symbolic Dynamics and Coding*. Cambridge University Press, Cambridge.