Revista Integración
Escuela de Matemáticas
Universidad Industrial de Santander
Vol. 42, N° 2, 2024, pág. 1–10

Hiperespacios de absolutos de un espacio X

Alfredo Zaragoza ✉,
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Morelia, México.

Resumen. Dado un espacio Hausdorff X se le puede asociar un par (EX, k_X), donde EX es un espacio extremadamente disconexo y $k_X : EX \to X$ es una función θ-continua perfecta e irreducible. Al espacio EX se le conoce como el absoluto de X. En este trabajo vamos a estudiar cómo se comportan algunos hiperespacios del absoluto de un espacio X con la topología de Vietoris.

Palabras clave: Absoluto, función θ-continua, función perfecta e irreducible, hiperespacio.

MSC2010: 54B20, 54A10, 54F50, 4F65.

Hyperspaces of absolutes of a space X

Abstract. Given a Hausdorff space X, a pair (EX, k_X) can be associated with it, where EX is an extremely disconnected space, and $k_X : EX \to X$ is a perfect, irreducible and θ-continuous function. The space EX is known as the absolute of X. In this work, we are going to study how some hyperspaces of the absolute of a space X behave with the Vietoris topology.

Keywords: Hyperspace, perfect function, θ-continuous function, irreducible function.

1. Introducción

En este trabajo todos los espacios se asumirán Hausdorff, salvo que se especifique lo contrario. Dado un espacio Hausdorff X se le puede asociar una par (EX, k_X), donde EX es un espacio extremadamente disconexo y $k_X : EX \to X$ es una función θ-continua perfecta e irreducible. Al espacio EX se le conoce como el absoluto de X. Algunas de las propiedades de este espacio fueron estudiadas en [6].

E-mail: soad151192@icloud.com.
Recibido: 20 Mayo 2024. Aceptado: 23 Jun 2024.
Para citar este artículo: A. Zaragoza, Hiperespacios de absolutos de un espacio X, *Rev. Integr. Temas Mat.,* 42 (2024), No. 2, 1-10. doi: 10.18273/revint.v42n2-2024001

Sea X un espacio, definimos a $\mathcal{CL}(X) \subset \mathcal{P}(X)$ como el conjunto de todos los subconjuntos cerrados no vacíos de X; $\mathcal{K}(X)$ denota el subespacio de $\mathcal{CL}(X)$ que consiste en los subconjuntos compactos no vacíos de X; y para cualquier $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{F}_n(X)$ es el subespacio de $\mathcal{CL}(X)$ que consiste de todos los subconjuntos no vacíos que tienen cardinalidad menor o igual a n.

Para $n \in \mathbb{N}$ y subconjuntos $U_1, \ldots, U_n$ de un espacio X, denotamos por $\langle U_1, \ldots, U_n \rangle$ a la colección $\{F \in \mathcal{CL}(X) : F \subset \bigcup_{k \leq n} U_k, F \cap U_k \neq \emptyset, k \leq n\}$. Vamos a dotar a $\mathcal{CL}(X)$ con la topología de Vietoris cuya base canónica son todos los conjuntos de la forma $\langle U_1, \ldots, U_n \rangle$, donde U_k es un subconjunto abierto no vacío de X para cada $k \leq n$. En [3] se demostró que $\mathcal{CL}(\beta X)$ es homeomorfo a $\beta\mathcal{CL}(X)$ si y solo si $\mathcal{CL}(X)^2$ es pseudocompacto, donde βX es la compactación de Stone-Čech de X. Por otro lado, se sabe que $\mathcal{K}(X)$ es extremadamente disconexo si y solo si X es discreto (ver Proposición 3.3 en [4]). Esto implica que $\mathcal{K}(EX)$ no es extremadamente disconexo si X no es discreto. Esto implica que no podemos obtener un resultado similar al que se tiene con la compactación de Stone-Čech, es decir que si X no es discreto, entonces $\mathcal{K}(EX)$ no es homeomorfo a $E\mathcal{K}(X)$. En este trabajo vamos a demostrar el siguiente resultado, que relaciona $\mathcal{K}(EX)$ con $E\mathcal{K}(X)$.

Teorema 1.1. *Sea X un espacio Tychonoff, entonces $E\mathcal{K}(X)$ es homeomorfo a $E\mathcal{K}(EX)$.*

2. Preliminares

En esta sección vamos a definir el absoluto de un espacio X y enunciaremos algunas de las propiedades del absoluto de X que usaremos para demostrar el teorema principal del trabajo. Seguiremos la notación de [6].

Definición 2.1. Sea X un espacio topológico, decimos que X es **extremadamente disconexo** (ED) si para cada abierto U se tiene que $cl_X(U)$ es abierto.

Es fácil ver que todo espacio discreto es extremadamente disconexo. El Teorema 6.1.c de [6] demuestra que si X es un espacio extremadamente disconexo, entonces βX es extremadamente disconexo.

Definición 2.2. Sean X, Y dos espacios Hausdorff y $f : X \to Y$ una función:

1. f es una función **irreducible** si es sobreyectiva y cerrada tal que para cualquier $B \subset X$ cerrado propio se tiene que $f(B)$ es un subconjunto cerrado propio de Y.

2. f es una función **θ-continua** en $x_0 \in X$ si para cualquier subconjunto abierto V que contiene a $f(x_0)$, existe un subconjunto abierto U de X que contiene a x_0 tal que $f(cl_X(U)) \subset cl_Y(V)$. Y f es θ-continua si lo es en cada $x \in X$.

3. f es **perfecta** si es sobreyectiva, cerrada y para cualquier $y \in Y$, se tiene que $f^{-1}(y)$ es un subconjunto compacto de X.

Es claro que id_X es una función irreducible para cualquier espacio X. Más aún, cualquier homeomorfismo es una función irreducible. También es claro que si f es una función continua, entonces f es una función θ-continua. El siguiente resultado nos dice cuando una función θ-continua es continua.

Proposición 2.3. *Sea $f : X \to Y$ una función θ-continua, si Y es regular, entonces f es continua.*

Demostración. Supongamos que Y es regular. Sean $x \in X$ y U un subconjunto abierto de Y tal que $f(x) \in U$. Como Y es regular, entonces existe un subconjunto abierto W de Y tal que $f(x) \in W \subset cl_Y(W) \subset U$. Por otro lado, como f es θ-continua, existe un subconjunto abierto V de X tal que $x \in V$ y $f(cl_X(V)) \subset cl_Y(W)$. Es decir que $f(V) \subset U$. Por tanto, f es continua. ☑

Para un espacio X, consideremos el conjunto $\mathcal{R}(X) = \{A \subset X : A = cl_X(int_X(A))\}$. Este conjunto $\mathcal{R}(X)$ es el álgebra booleana de cerrados regulares de X.

Ahora definamos $\mathcal{S}$ como el conjunto $\{p \subset \mathcal{R}(X) : p$ es un ultrafiltro en $\mathcal{R}(X)\}$ y $\lambda(A) = \{p \in \mathcal{S} : A \in p\}$. Se sabe que $\beta = \{\lambda(A) : A \in \mathcal{R}(X)\}$ es una base para una topología de Hausdorff en $\mathcal{S}$ (ver [6] Teorema 3.2.b). Al espacio $\mathcal{S}$ con la topología generada por la base β se le conoce como el **espacio de Stone** asociado a $\mathcal{R}(X)$.

Definición 2.4. Sea X un espacio Hausdorff. Sea $EX = \{p \in \mathcal{S} : \bigcap p \neq \emptyset\}$ con la topología de subespacio de S. Sea $k_X : EX \to X$, definida por $k_X(p) = \bigcap p$. Al par (EX, k_X) se le conoce como **el absoluto de Iliadis** de X.

El espacio EX es un espacio ED, cero-dimensional y k_X una función θ-continua, perfecta e irreducible (ver Teorema 6.6.e de [6]). El siguiente teorema es importante ya que nos dice que el par (EX, k_X) de un espacio X es único, la prueba se puede consultar en ([6, pag. 463]).

Teorema 2.5. *Sean X un espacio y (Y, f) tal que Y es un espacio ED cero-dimensional y $f : Y \to X$ es una función θ-continua, perfecta e irreducible. Entonces existe un homeomorfismo $h : EX \to Y$ tal que $f \circ h = k_X$.*

Del teorema anterior se sigue que si X, Y son dos espacios Hausdorff y si existe una función $f : X \to Y$ θ-continua, perfecta e irreducible, entonces $(EX, f \circ k_X)$ es el absoluto de Y.

Definición 2.6. Sea X un espacio Hausdorff. Decimos que X es H-cerrado si toda cubierta abierta de X tiene una subfamilia finita cuya unión es densa en X.

Es conocido que si X es un espacio regular y H-cerrado, entonces X es compacto. En efecto, sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X. Como X es regular, para cada $U \in \mathcal{U}$ existe $V \subset X$ abierto tal que $cl_X(V) \subset U$. Sea $\mathcal{V} = \{V : cl_X(V) \subset U, U \in \mathcal{U}\}$. Entonces $\mathcal{V}$ es cubierta abierta de X. Como X es H-cerrado, entonces existen $V_1, \ldots, V_n$ tales que $X = cl_X(\bigcup_{k=1}^n V_k)$. Esto implica que $X \subset \bigcup_{k=1}^n U_k$, es decir X es compacto. La prueba del siguiente Teorema se puede consultar el Teorema 6.9.d en [6].

Teorema 2.7. *Sea X un espacio Hausdorff. Entonces X es H-cerrado si y solo si EX es compacto.*

Recodemos que una familia $\mathcal{M}$ de abiertos de un espacio topológico X es una π-base si para cualquier subconjunto abierto U de X existe $V \in \mathcal{M}$ tal que $V \subset U$. Definimos el

π-peso de X como el mínimo cardinal κ tal que existe una π-base $\mathcal{M}$ de X con $|\mathcal{M}| = \kappa$ y lo denotamos como $\pi w(X)$ Para la demostración del siguiente Teorema vea ([6, pag. 482]).

Teorema 2.8. *Sea X un espacio sin puntos aislados y con π-peso numerable, entonces EX es homeomorfo a $E2^\omega$.*

El siguiente corolario se sigue del Teorema 2.8.

Corolario 2.9. *Si X es H-cerrado sin puntos aislados y con π-peso numerable, entonces EX es homeomorfo a $E2^\omega$.*

3. Prueba del teorema

En esta parte del trabajo vamos a demostrar el resultado principal. Antes vamos a dar algunos resultados que nos ayudarán. Dada un función $f : X \to Y$ definimos las siguientes funciones inducidas por f:

1. $\hat{f} : \mathcal{CL}(X) \to \mathcal{P}(Y)$ dada por $\hat{f}(K) = f(K)$.
2. $f' = \hat{f} \restriction \mathcal{K}(X)$.
3. $f_n = \hat{f} \restriction \mathcal{F}_n(X)$.

Notemos que si f es cerrada, entonces $\hat{f}[\mathcal{CL}(X)] \subset \mathcal{CL}(Y)$ y si f es continua, entonces $f'[\mathcal{K}(X)] \subset \mathcal{K}(Y)$. A continuación vamos a demostrar algunas propiedades de las funciones definidas anteriormente.

Se sabe que para que el espacio $\mathcal{CL}(X)$ sea Hausdorff es necesario que X sea regular (ver Teorema 4.9 en [5]). Supongamos que $\mathcal{CL}(X)$ y $\mathcal{CL}(Y)$ son espacios Hausdorff, entonces por la Proposición 2.3 una función $f : X \to Y$ que es θ-continua y cerrada es continua (ver Teorema 5.10 en [5]), por tanto es $\hat{f}$ continua, así $\hat{f}$ es θ-continua.

Vamos a demostrar que la funciones $(k_X)'$ y $(k_X)_n$ inducidas por la función k_X son θ-continuas, perfectas e irreducibles.

Proposición 3.1. *Sea $f : X \to Y$ una función θ-continua y $\mathcal{H} \subset \mathcal{K}(X)$. Supongamos que $f'[\mathcal{H}] \subset \mathcal{K}(Y)$, entonces $g = f' \restriction \mathcal{H}$ es una función θ-continua.*

Demostración. Sea $K \in \mathcal{H}$ y $\mathcal{U} = \langle U_1, \dots, U_m\rangle$ un subconjunto abierto de $\mathcal{K}(Y)$ tal que $g(K) \in \mathcal{U}$. Para cualquier $y \in g(K)$, definimos la vecindad $V_y = \bigcap\{U_j : y \in U_j\}$. Para cada $x \in K$, como f es θ-continua, existe un subconjunto abierto W_x de X tal que $x \in W_x$ y $f(cl_X(W_x)) \subset cl_Y(V_{f(x)})$.

Entonces $\{W_x : x \in K\}$ es una cubierta abierta de K en X. Como K es un subconjunto compacto X, existen $x_1, \dots, x_k \in K$ tales que $K \subset \bigcup_{i=1}^k W_{x_i}$. Para cada $i \leq m$, sea $y_i \in f[K] \cap U_i$ y sea $z_i \in X$ tal que $f(z_i) = y_i$. Definimos $\mathcal{W} := \langle W_{x_1}, \dots, W_{x_k}, W_{z_1}, \dots, W_{z_m}\rangle$, note que $K \in \mathcal{W}$.

Vamos a demostrar que $g(cl_{\mathcal{H}}(\mathcal{W})) \subset cl_{\mathcal{K}(Y)}(\mathcal{U})$.

Dado que para $x \in \{x_1, \ldots, x_k, z_1, \ldots, z_m\}$, se tiene que $f(cl_X(W_x)) \subset cl_Y(V_{f(x)})$, entonces

$$\begin{aligned} g(cl_{\mathcal{H}}(\langle W_{x_1}, \ldots, W_{x_k}, W_{z_1}, \ldots, W_{z_m}\rangle) &= g(\langle cl_X(W_{x_1}), \ldots, cl_X(W_{x_k}), cl_X(W_{z_1}), \ldots, cl_X(W_{z_m})\rangle) \\ &\subset \langle cl_X(V_{f(x_1)}), \ldots, cl_X(V_{f(x_k)}), cl_X(V_{f(z_1)}), \ldots, cl_X(V_{f(z_m)})\rangle \end{aligned}$$

Por otro lado dado por la elección de los conjuntos $V_{f(x)}$ con $x \in \{x_1, \ldots, x_k, z_1, \ldots, z_m\}$, se tiene que

$$cl_{\mathcal{K}(Y)}(\langle V_{f(x_1)}, \ldots, V_{f(x_k)}, V_{f(z_1)}, \ldots, V_{f(z_m)}\rangle) \subset cl_{\mathcal{K}(Y)}(\langle U_1, \ldots, U_m\rangle).$$

Esto prueba lo que queríamos. Por lo tanto g es θ-continua.

☑

Si f y g son como en la proposición anterior y g es θ-continua, entonces $g \restriction \mathcal{F}_1(X)$ es θ-continua, esto implica que f es θ-continua. El siguiente Corolario es inmediato de la proposición anterior, dado que la restricción de una función θ-continua es θ-continua.

Corolario 3.2. *Si $f : X \to Y$ es una función θ-continua, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ la función f_n es θ-continua.*

De los resultados anteriores tenemos que en general $(k_X)_n$ es θ-continua y $(k_X)'$ es θ-continua si $(k_X)'[\mathcal{K}(X)] \subset \mathcal{K}(Y)$. A continuación vamos a demostrar que si f es irreducible, entonces las funciones inducidas son irreducibles.

Lema 3.3. *Sea $f : X \to Y$ es una función irreducible. Entonces se cumple lo siguiente:*

1. *$\hat{f} : \mathcal{CL}(X) \to \mathcal{CL}(Y)$, para cada subconjunto cerrado de propio de $\mathcal{A}$ de $\mathcal{CL}(X)$ se cumple que $\hat{f}(\mathcal{A}) \neq \mathcal{CL}(Y)$.*
2. *$f'[\mathcal{K}(X)] \subset \mathcal{K}(Y)$, para cada subconjunto cerrado de propio de $\mathcal{A}$ de $\mathcal{K}(X)$ se cumple que $f'(\mathcal{A}) \neq \mathcal{K}(Y)$.*
3. *f_n para cada subconjunto cerrado de propio de $\mathcal{A}$ de $\mathcal{F}_n(X)$ se cumple que $f_n(\mathcal{A}) \neq \mathcal{F}_n(Y)$.*

$\hat{f}$, f' f_n

Demostración. Vamos a demostrar 1, los otros incisos se prueban de manera análoga. 1. Veamos que $\hat{f}$ es irreducible. Sea $\mathcal{C}$ un subconjunto cerrado propio de $\mathcal{CL}(X)$. Entonces $\mathcal{CL}(X) \setminus \mathcal{C}$ es un subconjunto abierto no vacío. Sea $U = \langle U_1 \ldots, U_m\rangle$ un subconjunto abierto canónico no vació tal que $U \subset \mathcal{CL}(X) \setminus \mathcal{C}$. Afirmamos que para cada $k \in \{1, \ldots, m\}$ existe $y_k \in Y$ tal que $f^{-1}(y_k) \subset U_k$. Supongamos lo contrario, es decir que existe $k \in \{1, \ldots, m\}$ tal que para toda $y \in Y$ sucede que $f^{-1}(y) \nsubseteq U_k$. Esto implica que $f^{-1}(y) \cap (X \setminus U_k) \neq \emptyset$ para cada $y \in Y$. Se sigue que $f(X \setminus U_k) = Y$, lo cual contradice el hecho de que f sea irreducible. Por tanto para cada $k \in \{1, \ldots, m\}$ existe $y_k \in Y$ tal que $f^{-1}(y_k) \subset U_k$. Sea $B = \{y_1, \ldots, y_m\}$, y para $k \leq m$ sea $x_k \in f^{-1}(y_k)$, entonces $\{x_1, \ldots, x_m\} \in U$ y $\hat{f}(\{x_1, \ldots, x_m\}) = B \in \mathcal{K}(Y) \setminus \hat{f}(\mathcal{C})$. Así, $\hat{f}$ es irreducible. ☑

Si las funciones $\hat{f}$, f', y f_n son cerradas, entonces Lema anterior se tiene que $\hat{f}$, f', y f_n son irreducibles. El siguiente resultado nos da condiciones para que una función f sea irreducible cuando sus funciones inducidas son irreducibles.

Lema 3.4. *Sea $f : X \to Y$ es una función. Entonces se cumple lo siguiente:*

1. *Si $\hat{f} : \mathcal{CL}(X) \to \mathcal{CL}(Y)$ es irreducible y f es continua, entonces f es irreducible.*
2. *Si $f'[\mathcal{K}(X)] \subset \mathcal{K}(Y)$, y f' es irreducible, perfecta y continua, entonces f es irreducible.*
3. *Si f_n es irreducible, entonces f es irreducible.*

Demostración. Vamos a demostrar 1, los otros incisos se prueban de manera análoga. Supongamos que $\hat{f}$ es irreducible y que f no es irreducible. Entonces existe un subconjunto cerrado propio A de X tal que $f(A) = Y$. Dado que f es continua se tiene que $\hat{f}[\mathcal{CL}(A)] = \mathcal{CL}(Y)$. Lo cual es una contradicción. ☑

Ahora vamos a demostrar que si f es perfecta, entonces las funciones f' y f_n son perfectas. Para evitar la condición $f'[\mathcal{K}(X)] \subset \mathcal{K}(Y)$, en este caso vamos a considerar espacios Tychonoff.

Lema 3.5. *Sean X, Y dos espacios Tychonoff y sea $f : X \to Y$ una función continua. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *f es una función perfecta.*
2. *f' es una función perfecta.*
3. *f_n es una función perfecta.*

Demostración. $1 \to 2$. Supongamos que f es una función perfecta, entonces f' es perfecta. Como f es una función continua y X, Y son espacios Tychonoff, entonces existe una función continua $F : \beta X \to \beta Y$ que extiende a f. Como βX y βY son compactos, entonces $\mathcal{K}(\beta X)$ y $\mathcal{K}(\beta Y)$ son compactos (ver Teorema 4.2 en [5]). Entonces $F' : \mathcal{K}(\beta X) \to \mathcal{K}(\beta Y)$ es una función perfecta y continua. Notemos que $\mathcal{K}(Y)$ es un subespacio de $\mathcal{K}(\beta Y)$. Entonces $F' \restriction (F')^{-1}((\mathcal{K}(Y)) : (F')^{-1}(\mathcal{K}(Y)) \to \mathcal{K}(Y)$ es una función perfecta. Como f es perfecta, se tiene que $F(\beta X \setminus X) \subset \beta Y \setminus Y$ (ver [2, pag. 186]). Esto implica que $(F')^{-1}(\mathcal{K}(Y)) = \mathcal{K}(X)$. Por lo tanto $F' \restriction (F')^{-1}(\mathcal{K}(Y)) = f'$. Así, f' es una función perfecta.

$2 \to 3$. Por 2 se tiene que $f' : \mathcal{K}(X) \to \mathcal{K}(Y)$ es perfecta. Como $\mathcal{F}_n(X)$ es cerrado en $\mathcal{K}(X)$, entonces $f_n = f' \restriction \mathcal{F}_n(X) : \mathcal{F}_n(X) \to f'(\mathcal{F}_n(X))$ es perfecta. No es difícil ver que $f'(\mathcal{F}_n(X)) = \mathcal{F}_n(Y)$. $3 \to 1$. Supongamos que f_n es una función perfecta. Dado que $\mathcal{F}_1(X)$ es un subconjunto cerrado de $\mathcal{K}(X)$, entonces $f' \restriction \mathcal{F}_1(X)$ es perfecta. Esto implica que f es perfecta. ☑

Note que es necesario pedir en el Lema 3.5 que f sea continua, ya que si solo pedimos que la función fuera θ-continua, la función inducida en general no estaría bien definida, ya que la imagen θ-continua de un compacto no necesariamente es compacto. Respecto a esto tenemos la siguiente pregunta:

Sea $f : X \to Y$ una función θ-continua que manda compactos en compactos. ¿Es f continua?.

Con los resultados anteriores ya estamos listos para demostrar el resultado principal. Pero antes vamos a analizar de algunas relaciones que hay entre EX y $E\mathcal{CL}(X)$.

Teorema 3.6. *Sea $f : X \to Y$ una función perfecta. Entonces existe $C \subset X$ cerrado tal que $f(C) = Y$ y $f \restriction C$ es irreducible.*

Utilizaremos el Teorema anterior para demostrar el siguiente resultado. La prueba del Teorema anterior consultar el Teorema 6.5.c de [6].

Proposición 3.7. *Sea X un espacio. Si $\mathcal{F}_1(X) \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{CL}(X)$ y $\mathcal{H}$ es regular, entonces existe un subconjunto cerrado C de $E\mathcal{H}$ tal que EC es homeomorfo a EX.*

Demostración. Como $\mathcal{H}$ es regular, por la Proposición 2.3 tenemos que $k_{\mathcal{H}}$ es continua. Por tanto $f = k_{\mathcal{H}} \restriction k_{\mathcal{H}}^{-1}(\mathcal{F}_1(X)) : k_{\mathcal{H}}^{-1}(\mathcal{F}_1(X)) \to \mathcal{F}_1(X)$ es continua perfecta y sobreyectiva. Por el Teorema 3.6, existe un subconjunto cerrado C de $k_{\mathcal{H}}^{-1}(\mathcal{F}_1(X))$, tal que $g = f \restriction C$ es irreducible. Entonces $g \circ k_C : EC \to \mathcal{F}_1(X)$ es continua, perfecta e irreducible. Por el Teorema 2.5, tenemos que EC es homeomorfo a EX. Note que C es cerrado en $E\mathcal{H}$ ya que $k_{\mathcal{H}}^{-1}(\mathcal{F}_1(X))$ es cerrado en $E\mathcal{H}$. ☑

El siguiente corolario sigue de la proposición anterior.

Corolario 3.8. *Sea X un espacio.*

1. *Si X normal existe un subconjunto cerrado C de $E\mathcal{CL}(X)$ tal que EC es homeomorfo a EX.*
2. *Si X es Tychonoff, existe un subconjunto cerrado C de $E\mathcal{K}(X)$ tal que EC es homeomorfo a EX.*
3. *Si X es Tychonoff, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un subconjunto cerrado C de $E\mathcal{F}_n(X)$ tal que EC es homeomorfo a EX.*

En los siguientes resultados daremos condiciones para que $E\mathcal{CL}(X)$ y EX sean homeomorfos. Pero antes enunciaremos el siguiente lema que sera de utilidad.

Lema 3.9 ([1])**.** *Sea X un espacio topológico, entonces $\pi\omega(X) = \pi\omega(\mathcal{CL}(X))$.*

Proposición 3.10. *Sea X un espacio topológico compacto, sin puntos aislados y con $\pi\omega(X) = \omega$. Entonces $E\mathcal{CL}(X)$ y EX son homeomorfos.*

Demostración. Por el Lema 3.9, tenemos que $\mathcal{CL}(X)$ tiene π-peso numerable. Como X es compacto, entonces $\mathcal{CL}(X)$ es compacto (ver Teorema 4.2 en [5]). Así, para ver que $E\mathcal{CL}(X)$ es homeomorfo a EX basta demostrar que $\mathcal{CL}(X)$ no tiene puntos aislados y por el Corolario 2.9 terminaríamos. Veamos que $\mathcal{CL}(X)$ no tiene puntos aislados. Sea $K \in \mathcal{CL}(X)$ y $\langle U_1, \dots, U_n \rangle$ un subconjunto abierto de $\mathcal{CL}(X)$ que contiene a K. Entonces

$K \cap U_k \neq \emptyset$ para todo $k \leq n$. Sea $x_k \in K \cap U_k$. Entonces $x_k \in U_k$ para todo $k \leq n$. Dado que X no tiene puntos aislados, existe $y_k \in U_k$ tal que $y_k \neq x_k$. Sea $F = \{y_1, \dots, y_n\}$, entonces $F \neq K$ y $F \in \langle U_1, \dots, U_n \rangle$. Esto prueba que $\mathcal{CL}(X)$ no tiene puntos aislados. ☑

Un hecho conocido acerca de la normalidad en $\mathcal{CL}(X)$ es el siguiente teorema:

Teorema 3.11 ([7, Velicko]). *Sea X un espacio Tychonoff. Entonces X es compacto si y solo si $\mathcal{CL}(X)$ es normal.*

Usando este teorema podemos demostrar el siguiente resultado.

Corolario 3.12. *Sea X un espacio normal. Si $E\mathcal{CL}(X)$ y EX son homeomorfos, entonces X es compacto.*

Demostración. Como X es normal, entonces $\mathcal{CL}(X)$ es regular, por la Proposición 2.3 tenemos que las funciones $k_{\mathcal{CL}(X)}$ y k_X son continuas y perfectas. Por tanto EX es normal. Así, $E\mathcal{CL}(X)$ es normal, ya que EX y $E\mathcal{CL}(X)$ son homeomorfos. Esto implica que $E\mathcal{CL}(X)$ es normal. Como $k_{\mathcal{CL}(X)}$ es continua y cerrada, se sigue que $\mathcal{CL}(X)$ es normal, por el Teorema 3.11 X es compacto. ☑

De los Corolarios 3.10 y 3.12 se tiene el siguiente resultado.

Corolario 3.13. *Sea X un espacio normal sin puntos aislados con $\pi\omega(X) = \omega$. Entonces X es compacto si y solo si $E\mathcal{CL}(X)$ y EX son homeomorfos.*

Ahora demostraremos el teorema principal de este trabajo y analizaremos algunas de sus consecuencias.

Demostración del Teorema 1.1

Demostración. Sea X un espacio Tychonoff, entonces $k_X : EX \to X$ es una función continua, perfecta e irreducible. Por los Lemas 3.4 y3.5, $(k_X)' : \mathcal{K}(EX) \to \mathcal{K}(X)$ es continua, perfecta e irreducible. Además $k_{\mathcal{K}(EX)} : E\mathcal{K}(EX) \to \mathcal{K}(EX)$ es continua, perfecta e irreducible. Entonces $(k_X)' \circ k_{\mathcal{K}(EX)} : E\mathcal{K}(EX) \to \mathcal{K}(X)$ es continua, perfecta e irreducible. Por el Teorema 2.5, $E\mathcal{K}(X)$ es homeomorfo a $E\mathcal{K}(EX)$. ☑

El siguiente resultado es análogo al Corolario 3.12.

Proposición 3.14. *Sea X un espacio Hausdorff y H-cerrado. Si $E\mathcal{K}(X)$ es homeomorfo a EX, entonces X es compacto.*

Demostración. Por el Teorema 2.7, EX es compacto. Así $E\mathcal{K}(X)$ es compacto, de esto resulta que $\mathcal{K}(X)$ es H-cerrado. Esto implica que $\mathcal{K}(X) = \mathcal{CL}(X)$ ya que $\mathcal{K}(X)$ es denso y cerrado en $\mathcal{CL}(X)$. Se sigue que X es compacto. ☑

Del Teorema 1.1 se tiene el siguiente resultado.

Corolario 3.15. *Sea X un espacio compacto, entonces $E\mathcal{CL}(X)$ es homeomorfo a $E\mathcal{CL}(EX)$.*

Por último analizaremos la relación que hay entre $E\mathcal{F}_n(X)$ y $\mathcal{F}_n(EX)$.

Proposición 3.16. *Sea X un espacio Hausdorff, y $n \in \mathbb{N}$. Entonces los siguientes enunciados se cumplen.*

1. *Si X no tiene puntos aislados, entonces $\mathcal{F}_n(X)$ no tiene puntos aislados.*
2. *Si X es H-cerrado, entonces $\mathcal{F}_n(X)$ es H-cerrado.*
3. *$\pi\omega(\mathcal{F}_n(X)) = \pi\omega(X)$.*

Demostración. (1) Como X no tiene puntos aislados, entonces X^n no tiene puntos aislados. Consideremos la función $f_n : X^n \to \mathcal{F}_n(X)$ dada por $f(x_1, \ldots, x_n) = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Sea $y \in \mathcal{F}_n(X)$ y U un subconjunto abierto en $\mathcal{F}(X)$ tal que $y \in U$. Como f_n es continua, entonces $f_n^{-1}(U)$ es un subconjunto abierto en X^n. Como X^n no tiene puntos aislados, entonces $f_n^{-1}(U)$ es infinito. Además $f_n^{-1}(y)$ es finita, entonces existe $z \in f_n^{-1}(U)$ tal que $z \notin f_n^{-1}(y)$. Note que $f_n(z) \in U$ y que $f_n(z) \neq y$. Por tanto $\mathcal{F}_n(X)$ no tiene puntos aislados.

(2) Se sigue del hecho de que X^n es H-cerrado y que $f : X^n \to \mathcal{F}_n(X)$ dada por $f(x_1, \ldots, x_n) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ es continua y sobreyectiva ver ([6, pág. 302]).

(3) La demostración es similar a la del Lema 3.9.

☑

Corolario 3.17. *Sea X un espacio Hausdorff tal que X es H-cerrado sin puntos aislados y con π-peso numerable. Entonces EX es homeomorfo a $E\mathcal{F}_n(X)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Por la Proposición 3.16 y del Corolario 2.9, se tiene el resultado. ☑

Corolario 3.18. *Sea X un espacio Hausdorff tal que X es H-cerrado sin puntos aislados y con π-peso numerable. Si $n, m \in \mathbb{N}$, entonces $E\mathcal{F}_n(X)$ es homeomorfo a $E\mathcal{F}_m(X)$.*

Demostración. Es inmediato del Corolario 3.17. ☑

Proposición 3.19. *Sea X un espacio Hausdorff y $n \in \mathbb{N}$. Entonces existe un subconjunto cerrado C de X^n tal que EC es homeomorfo a $E\mathcal{F}_n(X)$.*

Demostración. Sea $f : X^n \to \mathcal{F}_n(X)$ dada por $f(x_1, \ldots, x_n) = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Entonces f es continua y perfecta. Por el Teorema 3.6, existe un subconjunto cerrado C de X^n tal que $g = f \upharpoonright C : C \to \mathcal{F}_n(X)$ es continua perfecta e irreducible. Entonces $g \circ k_C$ es una función θ-continua irreducible y perfecta. Por la Proposición 3.6, se tiene que EC es homeomorfo a $E\mathcal{F}_n(X)$. ☑

Teorema 3.20. *Sea X un espacio Tychonoff y sea $n \in \mathbb{N}$, entonces $E\mathcal{F}_n(X)$ es homeomorfo a $E\mathcal{F}_n(EX)$.*

Demostración. La demostración es análoga a la del Teorema 1.1. ☑

Agradecimientos: El autor agradece a CONACHyT por el apoyo de la beca posdoctoral con número (696239). Agradece a el Dr. R. Rojas-Hernández, por su apoyo y la dirección este trabajo y le agradece al árbitro sus comentarios.

Referencias

[1] Beshimov R.B., "On some cardinal invariants of hyperspaces", *Mathematychni Studii*, 24 (2005), No. 2, 197–202.

[2] Engelking R., *General Topology*, Heldermann Verlag, Sigma Series in Pure Mathematics, vol. 6, 1989.

[3] Ginsburg J., "On the Stone-Čech Compactification of the Space of Closed Sets", *Trans. Amer. Math. Soc.*, 215 (1976), 301–311. doi: 10.2307/1999729.

[4] Hernández-Gutiérrez R. and Tamariz-Mascarúa A., "Disconnedctedness properties of hyperspaces", *Comment. Math. Univ. Carolin.*, 52 (2011), No. 4, 569–591.

[5] Michael E., "Topologies on spaces of subsets", *Trans. Amer. Math. Soc.*, 71 (1951), No. 1, 152–182. doi:10.1090/S0002-9947-1951-0042109-4.

[6] Porter J. and Woods R., *Extensions and Absolutes of Hausdorff Spaces*, Springer-Verlang, New York, 1988. doi: 10.1007/978-1-4612-3712-9

[7] Velicko N.V., "The space of closed subsets", Sibirsk. Mat. Z., 16 (1975), No 3, 627–629. doi: 10.1007/BF01127055.