Revista Integración
Escuela de Matemáticas
Universidad Industrial de Santander
Vol. 26, No. 2, 2008, pág. 77–88

Teoría de gravitación no simétrica

Germán Rojas*

Resumen. Se efectúa la revisión de la *Teoría de gravitación no simétrica* desarrollada por el profesor John Moffat, como una alternativa que permite solucionar problemas de la Relatividad General al describir la estructura del universo a gran escala. Algunos aspectos relacionados con el carácter físico y geométrico de las estructuras de campo espacio-temporal no simétricas, son discutidos. También, el problema de explicar la expansión acelerada del universo, y algunos inconvenientes teóricos relacionados con energía y materia oscura, son tratados.

Abstract. It has been done the review of the *Nonsymmetric Gravitational Theory* developed by professor John Moffat, as an alternative to solve several problems of General Relativity when describing the large scale structure of the universe. Some aspects related to the physical and geometrical character of the nonsymmetric space-time field structures, are discussed. Also, the problem of explaining the accelerated expansion of the universe, and some theoretical difficulties related to both dark energy and matter, are treated.

1. Introducción

El modelo cosmológico estándar de la Relatividad General, ha tenido gran éxito al predecir fenómenos a pequeña escala, como los asociados a mediciones en el sistema solar, lentes gravitacionales, y algunos otros relacionados con campos gravitacionales fuertes, como los datos obtenidos de los pulsares binarios PSR 1913+16 [7], y el J0737-3039. Igualmente, ha tenido buena concordancia con aspectos asociados al origen del universo. Sin embargo, esta teoría presenta inconvenientes al tratar campos gravitacionales muy

Palabras y frases claves: Relatividad general, Teoría gravitación no simétrica
MSC2000: 83Cxx, 83C05, 83C15.
* Fundación Universitaria Católica Lumen Gentium, Cali, Colombia. *e-mail*: gerojas7@yahoo.com

fuertes, y la misma noción de espacio-tiempo pierde significado en las singularidades de estrellas en colapso, y en cosmología [8].

Se tiene también que el sorpresivo descubrimiento observacional de la expansión acelerada del universo, ha llevado a la postulación de alternativas a la Relatividad General, como es la introducción del concepto de energía oscura a manera de una constante cosmológica[1] positiva. Sin embargo, esta opción no es satisfactoria, ya que el valor predicho por el modelo estándar, y la teoría cuántica de campos para esta constante (interpretada como la densidad de energía del vacío), es muy grande comparado con el valor de la misma implicado por observaciones cosmológicas, mostrando una discrepancia con la teoría de 120 órdenes de magnitud [1].

Además de lo anterior, se cuenta con un problema adicional como lo es el de la materia oscura. Esta se ha incluido en los modelos cosmológicos como una necesidad para garantizar un universo cerrado, y ciertos efectos observados relacionados con las velocidades de rotación de halos galácticos, y la distribución de materia en algunas regiones del universo, que se justifica con la presencia de materia adicional a la visible. Sin embargo, se han postulado candidatos para este tipo de materia, los cuales no han podido ser detectados observacionalmente, y algunos de ellos tienen una naturaleza exótica o no convencional.

Por las anteriores razones, ha surgido la pregunta de si la Relatividad General describe correctamente la estructura del universo a gran escala. Por esto, se plantea la posibilidad de tener una teoría basada en una estructura de campo espacio-temporal no simétrica, que pueda reproducir los aciertos de la Relatividad General, y a la vez explicar satisfactoriamente el comportamiento del universo a gran escala.

La *Teoría de gravitación no simétrica (NGT)*, cuya revisión se desarrolla en este artículo, presenta una extensión física no trivial de la Relatividad General. El estudio de la NGT ha concluido que la misma está libre de inconsistencias [7]. La componente antisimétrica del campo fundamental en la NGT, corresponde a un campo masivo de *Kalb-Ramond* de rango finito, que se identifica con una quinta fuerza gravitacional de tipo repulsivo, y genera una geometría *no Riemanniana.*

La NGT concuerda con los datos actuales de aceleración del universo, halos de materia oscura en las galaxias, lentes gravitacionales, y comportamiento de cúmulos, al igual que con los resultados observacionales estándar, sin necesidad de invocar la dominancia de materia oscura exótica, ni energía oscura.

[1] La cual ya había sido utilizada por Einstein para justificar un universo estático.

Además, se desarrolla en el presente artículo un análisis del carácter físico y geométrico de la estructura espacio-temporal no simétrica.

2. Estructuras de espacio–tiempo no simétricas: aspectos físicos y geométricos

La Teoría de la Relatividad General de *Einstein* (y en general, la mayoría de las teorías físicas), se basa en una estructura simétrica, lo que quiere decir que la variedad en la cual se establece está libre de *torsión*. Esto se debe a varios motivos, uno de ellos es que las predicciones de la teoría son bastantes acertadas bajo ciertas condiciones, como la ausencia de campos gravitacionales muy fuertes, y el no requerimiento de cuantización de la misma, lo que sugiere que la torsión es innecesaria para obtener una teoría consistente. La segunda razón es que la presencia de torsión no había sido detectada experimentalmente [*J. Baez: Com. Pers.*[2]], aunque no exista evidencia fenomenológica, ni predicciones teóricas que nieguen la existencia definitiva de torsión en el espacio-tiempo[3]. La otra razón es la tendencia a plantear teorías "elegantes" o fáciles de manejar (lo cual no tiene necesariamente una justificación lógica), característica que poseen las teorías simétricas, las que en general han dado resultados relativamente satisfactorios.

De otro lado, el planteamiento de teorías no simétricas, inicialmente propuesto por el mismo *Einstein* junto con *Straus* (1946), surge como un intento para desarrollar una teoría de campo unificado entre el Electromagnetismo y la Gravitación [5]. El otro interés para el desarrollo de teorías basadas en estructuras no simétricas, es el de poder introducir la idea de Gravitación en el esquema de teorías de calibración, con el fin de intentar incluirla en "modelos de calibración unificados" (lo que ha sido difícil con la Relatividad General), los cuales han tenido algún éxito como teorías de unificación de fuerzas no gravitacionales [5].

Una consecuencia de la introducción de torsión es que la métrica[4] pierde su carácter de tensor fundamental. Sin embargo, es posible extender este concepto de tensor (campo) fundamental (como fue mostrado por Einstein y Straus en 1946) introduciendo un tensor invertible $g_{\mu\nu}$ [5], el cual se puede expresar como $g_{\mu\nu} = g_{(\mu\nu)} + g_{[\mu\nu]}$, con $g_{(\mu\nu)} = \frac{1}{2}(g_{\mu\nu} + g_{\nu\mu})$ y $g_{[\mu\nu]} = \frac{1}{2}(g_{\mu\nu} - g_{\nu\mu})$. Claramente $g_{(\mu\nu)}$ es simétrico y se identifica con la métrica, mientras $g_{[\mu\nu]}$ es la parte antisimétrica.

[2]Comunicación personal.

[3]En el desarrollo de este artículo se trabajará con un espacio-tiempo de cuatro dimensiones.

[4]Se seguirán utilizando los términos métrica y tensor métrico indistintamente.

En la *"Teoría de gravitación no simétrica"* (NGT) de *Moffat*, $g_{(\mu\nu)}$ igualmente se identifica con la métrica y es de carácter gravitacional, mientras que $g_{[\mu\nu]}$ haga parte del campo gravitacional se puede interpretar como una quinta fuerza gravitacional [7], con posibles nuevos acoplamientos a la materia [9]. En este caso el campo $g_{[\mu\nu]}$ se considera masivo (como se puede ver en el término cinético del Lagrangiano de la teoría) y corresponde a un campo de *Kalb-Ramond* [7].

En general, el tensor de torsión no puede ser identificado naturalmente con algún tipo de fuerza fundamental determinada, ya que la torsión es por sí misma un tensor, de modo que no hay manera de distinguirla de algún otro campo tensorial [2] asociado a alguna fuerza fundamental específica. Esta es una de las razones por la cual las teorías de gravitación con torsión no han sido tenidas muy en cuenta. Sin embargo, el carácter de la parte antisimétrica del tensor fundamental puede interpretarse de acuerdo a los requerimientos de cada teoría. Al igual que en el tensor fundamental, la presencia de torsión se manifiesta en la forma de la conexión lineal[5] introduciendo en esta una parte antisimétrica: $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \Gamma^{\alpha}_{(\mu\nu)} + \Gamma^{\alpha}_{[\mu\nu]}$.

En Relatividad General se tienen dos condiciones naturales, una para la métrica (aunque puede ser interpretada como un requerimiento para la conexión), la condición de compatibilidad métrica, la cual expresa que la derivada covariante de la métrica es cero: $\nabla_{\lambda}\, g_{(\mu\nu)} = 0$. Esta condición se debe a la necesidad de garantizar que la medida de un vector no se modifique al transportarlo paralelamente a lo largo de una curva dada [2].

La segunda condición se establece sobre la conexión, y considera que esta debe ser simétrica en sus índices covariantes ($\Gamma^{\lambda}_{[\mu\nu]} = 0$) con el fin de garantizar la ausencia de torsión, y por ende una estructura de espacio-tiempo simétrica. La primera condición permite establecer 40 ecuaciones y la segunda 24 ecuaciones más [*B. McInnes: Com. Pers.*]. Las incógnitas de estas ecuaciones son las componentes de la métrica, y de la conexión lineal, esta última tiene 64 componentes, por lo cual con las 64 ecuaciones es posible encontrar todas las componentes de la conexión en términos de la métrica. Si alguna de las dos condiciones no se tuviera, sería posible introducir en la teoría cualquier conexión (sin que necesariamente sea función únicamente de la métrica, como sucede en principio para estructuras no simétricas) que permita establecer un principio de covarianza.

En una teoría no simétrica, la torsión no es cero ($\Gamma^{\lambda}_{[\mu\nu]} \neq 0$) y únicamente la parte simétrica del tensor fundamental cumple con la condición de ser una constante covariante,

[5] Se seguirá utilizando el termino *conexión* o *conexión lineal*, a diferencia del término *derivada covariante*, para referirse a los coeficientes de conexión.

ya que es natural garantizar la conservación de la norma de los vectores transportados paralelamente. No obstante, en toda estructura no simétrica es posible establecer una *"condición de compatibilidad generalizada"* que permite obtener de forma *única* la conexión en términos del tensor fundamental $g_{\mu\nu}$ [*B. McInnes: Com. Pers.*], según el procedimiento desarrollado por *M. A. Tonnelat* en 1955 [5]. Esta condición de compatibilidad generalizada es

$$\partial_\lambda g_{\mu\nu} - g_{\rho\nu}\Gamma^\rho_{\mu\lambda} - g_{\mu\rho}\Gamma^\rho_{\lambda\nu} = 0^6, \tag{1}$$

la cual genera 64 ecuaciones para 64 componentes de la conexión lineal. Como se puede ver, esto no garantiza que la conexión sea compatible con el tensor fundamental ya que en el segundo término (o tercero, dependiendo de la notación empleada) los índices de la conexión están permutados con respecto a la expresión para la derivada covariante de dicho tensor. También se ve claramente que para el caso de una estructura simétrica, la condición de compatibilidad generalizada se reduce a la condición de constante covariante para la métrica.

Si no se pudiera establecer una relación de compatibilidad generalizada en una teoría no simétrica, se presentarían algunos inconvenientes: El primero de ellos esta asociado al *tensor de curvatura de Riemann*. Dicho tensor es una característica de la conexión [*J. Baez: Com. Pers.*], y como se sabe, "mide cuanto se aleja" la conexión introducida en una variedad, de la conexión Euclideana [4]. Sin embargo, intuitivamente el tensor de curvatura de *Riemann* también se asocia a la idea de "que tanto se curva" el espacio-tiempo (o una variedad, no necesariamente espacio-temporal), o que tanto se "aleja" la variedad, de un espacio *Euclideano*, o de uno de *Minkowski*, en un punto (evento) determinado, y es precisamente por esta razón que, aunque el tensor métrico determina la geometría de una variedad de espacio-tiempo Riemanniano [*C. Hillman: Com. Pers.*] y no Riemanniano, se espera que la curvatura de *Riemann* igualmente dé alguna idea de la estructura geométrica de la variedad. Sin la condición de compatibilidad generalizada, se podría introducir en la variedad cualquier conexión (con tal que permita establecer una derivada covariante) y que por ende para cada conexión se tenga un tensor de curvatura distinto, lo cual de alguna manera haría ambigua la idea de tener una característica de

[6] Sin embargo, no es la única expresión (aunque sí la más sencilla) que permite hallar la conexión en términos del tensor fundamental. Se podría tener una ecuación de la forma

$$\partial_\lambda g_{\mu\nu} - \Gamma^\alpha_{\mu\lambda} g_{\alpha\nu} - \Gamma^\alpha_{\lambda\nu} g_{\mu\alpha} = aT^\alpha_{\mu\lambda} g_{\alpha\nu} + bT^\alpha_{\lambda\nu} g_{\mu\alpha} + cT^\alpha_{\mu\lambda} g_{\nu\alpha} + dT^\alpha_{\lambda\nu} g_{\alpha\nu},$$

que puede ser tomada como una condición de compatibilidad, la cual permitiría obtener la conexión en términos de la métrica si se cumple que $a + b + c + d + 2 = 0$ [3].

la estructura geométrica de la variedad, que se espera sea dada en cierto sentido por el tensor de *Riemann.*

Otra dificultad al no tener una condición de compatibilidad generalizada está relacionada con lo siguiente. Es deseable en una teoría física que las funciones y los campos presentes en ella estén determinados por cantidades físicas bien definidas. Por otra parte, es posible obtener el tensor fundamental dando unas condiciones iniciales y de frontera, con las cuales se resuelve el conjunto de ecuaciones diferenciales, que son las ecuaciones de campo de la teoría. En última instancia, el tensor Energía-Impulso determina a través de estas ecuaciones de campo y de las condiciones iniciales y de frontera dadas, las componentes del tensor fundamental.

En Relatividad General hay 10 funciones independientes desconocidas (componentes de la métrica) las cuales están determinadas por 10 cantidades físicas (y también por unas condiciones iniciales y de frontera) que son las componentes del tensor Energía-Impulso, cada una de las cuales tiene un significado físico claro. En el caso de una teoría no simétrica, hay como máximo 16 funciones independientes desconocidas (componentes del tensor fundamental) determinadas máximo por 16 funciones físicas (y por las condiciones iniciales y de frontera) que igualmente tienen un significado claro. Las componentes del tensor Energía-Impulso adicionales a las 10 presentes en Relatividad General pueden estar relacionadas con *corrientes o cargas*, o tener que ver algo con el *espín o vorticidad.*

Teniendo una condición de compatibilidad generalizada, las 64 componentes de la conexión estarían determinadas en su totalidad, a través del tensor fundamental (y de condiciones iniciales y de frontera dadas), por el tensor Energía-Impulso. Si no se tiene una condición de compatibilidad generalizada, primero, no se obtienen de manera natural todas las componentes de la conexión en términos del tensor fundamental. Segundo, las 16 componentes independientes de $T_{\mu\nu}$ no serían suficientes para determinar las 64 componentes de la conexión, por lo cual se necesitarían en total 64 cantidades físicas para determinar físicamente tales componentes. Esto se haría con algo que "reemplace" el tensor Energía-Impulso por que fuera de las 64 componentes (o piezas de información física), lo cual es demasiado. Se puede decir que el número de funciones independientes en una teoría no debe exceder el número de cantidades físicamente significativas tal como energía, flujo de momentum, densidad de carga, etc. Es mas razonable trabajar con 16 cantidades físicas que determinen las funciones independientes de la teoría, que buscar 64 que puedan determinar dichas funciones [*B. McInnes: Com. Pers.*]. Por las anteriores razones, las teorías no simétricas que por algún motivo impidan la presencia de una condición de compatibilidad generalizada, tienden a ser descartadas.

Han habido objeciones matemáticas al concepto de un campo fundamental no simétrico, las cuales se encuentran en el hecho que $g_{\mu\nu}$, y la condición de compatibilidad generalizada parecen estar desprovistas de significado geométrico alguno [5]. Ya se ha visto que $g_{\mu\nu}$ tiene un significado físico y geométrico concreto. La condición de compatibilidad generalizada toma importancia al momento de determinar de manera única la curvatura de *Riemann* y cuando se pretenden determinar los campos de la teoría en términos de cantidades físicas significativas. Sin embargo, esta condición de compatibilidad también tiene una interpretación geométrica natural dentro del marco de la *geometría diferencial afín* [5].

La "geometrización" completa de la estructura de campo no simétrico obtenida en el marco de la geometría diferencial afín tiene un interés más que matemático. Como lo han afirmado *Trautman* en 1973, *Petti* en 1976, *Hennig* y *Nitsch* en 1980, y otros, la geometría diferencial afín provee un marco de trabajo riguroso para el análisis de la teoría de calibración del grupo de *Poincaré*, lo cual clarifica el vínculo entre teoría de calibración y la idea de *Moffat* [5].

Vale la pena destacar también que una estructura no simétrica puede dar cabida a un tensor Energía-Impulso para un fluido, con componentes antisimétricas asociadas a la vorticidad del fluído o espín intrínseco.

3. Acción y ecuación de campo de la NGT

La acción para la *Teoría de Gravitación No Simétrica* es $S = \int d^4x\mathcal{L}_{NGT}$, donde $\mathcal{L}_{NGT} = \mathcal{L} + \mathcal{L}_M$[7], con $\mathcal{L} = \mathbf{g}^{\mu\nu}R^*_{\mu\nu}(W) - 2\Lambda\sqrt{-g} - \frac{1}{2}\mu^2\mathbf{g}^{\mu\nu}g_{[\mu\nu]}$ y $\mathcal{L}_{\mathcal{M}} = -8\pi g^{\mu\nu}\mathbf{T}_{\mu\nu}$. $\mathbf{g}^{\mu\nu} = \sqrt{-g}g^{\mu\nu}$, $g = \det(g_{\mu\nu})$, $\mathbf{T}_{\mu\nu} = \sqrt{-g}T^{\mu\nu}$, $R^*_{\mu\nu}(W) = R_{\mu\nu}(W) - \frac{1}{6}W_\mu W_\nu$, $W_\mu = \frac{1}{2}(W^\lambda_{\mu\lambda} - W^\lambda_{\lambda\mu})$.

Las ecuaciones de campo de la *Teoría de Gravitación No Simétrica* se calculan mediante el formalismo de primer orden o método de *Palatini* [3], según el cual la variación de la acción se efectúa para la conexión lineal y el campo fundamental independientemente. Por lo tanto, las ecuaciones de campo resultantes son

$$G^*_{\mu\nu}(W) + \Lambda g_{\mu\nu} + S_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}, \tag{2}$$

[7]Se utilizarán unidades en las que $c = G = 1$, donde c es la velocidad de la luz en el vacío, y G es la constante de acople gravitacional.

con

$$G^*_{\mu\nu}(W) = R^*_{\mu\nu}(W) - \tfrac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\sigma\rho} R^*_{\sigma\rho}(W) \text{ y } S_{\mu\nu} = \tfrac{1}{4}\mu^2 (g_{[\mu\nu]} + \tfrac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{[\sigma\rho]} g_{[\rho\sigma]} + g^{[\sigma\rho]} g_{\mu\sigma} g_{\rho\nu}).$$

La segunda ecuación sería

$$\partial_\alpha \mathbf{g}^{\mu\nu} + \mathbf{g}^{\beta\nu} W^\mu_{\beta\alpha} + \mathbf{g}^{\mu\gamma} W^\nu_{\alpha\gamma} - \delta^\nu_\alpha \mathbf{g}^{\beta\gamma} W^\mu_{\beta\gamma} - \mathbf{g}^{\mu\nu} W^\rho_{\alpha\rho} + \\ + \frac{1}{6}\left(\delta^\nu_\alpha \mathbf{g}^{(\mu\rho)} W_\rho - \delta^\mu_\alpha \mathbf{g}^{(\nu\rho)} W_\rho\right) = 0. \quad (3)$$

Como se observa, se ha utilizado para la conexión la letra W, en lugar de Γ (como usualmente). Si se define ahora una relación entre W y Γ como $\Gamma^\lambda_{\mu\nu} \equiv W^\lambda_{\mu\nu} + \frac{2}{3}\delta^\lambda_\mu \Gamma_\nu$, la cual está ligada por $\Gamma_\mu = \Gamma^\lambda_{[\mu\lambda]} = 0$, y además escogiendo la convención $g^{\mu\nu} g_{\mu\sigma} = g^{\nu\mu} g_{\sigma\mu} = \delta^\nu_\sigma$, y utilizando el tensor fundamental $g_{\mu\nu}$ y su inverso $g^{\mu\nu}$, para bajar y subir índices se obtiene que la ecuación (3) toma la forma

$$g_{\lambda\nu,\eta} - g_{\rho\nu}\Gamma^\rho_{\lambda\eta} - g_{\lambda\rho}\Gamma^\rho_{\eta\nu} = \frac{1}{6} g^{(\mu\rho)} (g_{\rho\nu} g_{\lambda\eta} - g_{\eta\nu} g_{\lambda\rho} - g_{\lambda\nu} g_{[\rho\eta]}) W_\mu. \quad (4)$$

(Ver [7]). Como se puede observar, la utilidad de introducir una conexión W (diferente a Γ) mediante la relación $\Gamma^\lambda_{\mu\nu} \equiv W^\lambda_{\mu\nu} + \frac{2}{3}\delta^\lambda_\mu \Gamma_\nu$, está en el hecho de que a través de ella se logra obtener una ecuación de campo, que luego puede ser expresada en forma de *condición de compatibilidad* (ecuación (4)), que para $W_\mu = 0$[8] se reduce a la *condición de compatibilidad generalizada* resuelta por *Tonnelat*, la cual, como se analizó en el capítulo anterior, es necesaria en cualquier estructura de espacio-tiempo.

Para el caso de un campo simétricamente esférico, la forma de $g_{\mu\nu}$ y $g^{\mu\nu}$ en la *NGT*, están dadas por [7]:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\alpha & 0 & 0 & \omega \\ 0 & -\beta & f\operatorname{sen}\theta & 0 \\ 0 & -f\operatorname{sen}\theta & -\beta\operatorname{sen}^2\theta & 0 \\ -\omega & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}^9, \quad (5)$$

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \dfrac{\gamma}{\omega^2-\alpha\gamma} & 0 & 0 & \dfrac{\omega}{\omega^2-\alpha\gamma} \\ 0 & -\dfrac{\beta}{\beta^2+f^2} & \dfrac{f\csc\theta}{\beta^2+f^2} & 0 \\ 0 & -\dfrac{f\csc\theta}{\beta^2+f^2} & -\dfrac{\beta\csc^2\theta}{\beta^2+f^2} & 0 \\ -\dfrac{\omega}{\omega^2-\alpha\gamma} & 0 & 0 & -\dfrac{\alpha}{\omega^2-\alpha\gamma} \end{pmatrix}, \quad (6)$$

[8] Esta condición corresponde a un campo con simetría esférica.

donde α, β, γ, y ω son funciones de r y t. De lo anterior se tiene que

$$\sqrt{-g} = \operatorname{sen}\theta[(\alpha\gamma - \omega^2)(\beta^2 + f^2)]^{1/2}.$$

4. Análisis y desarrollo de las ecuaciones de campo

Para un campo simétricamente esférico, con $W_\mu = 0$, se tiene que la ecuación de campo (2) sería

$$R_{\mu\nu}(\Gamma) - g_{\mu\nu}\Lambda + S_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}S = 8\pi(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T),$$

donde la métrica toma la forma canónica Gausiana en coordenadas polares en expansión: $ds^2 = dt^2 - \alpha(r,t)dr^2 - \beta(r,t)[d\theta^2 - \operatorname{sen}^2\theta d\phi^2]$. Ahora, se define:

$$\boldsymbol{Z} \equiv \frac{\dot{\beta}' f^2}{\beta^3} - \frac{5\dot{\beta}\beta' f^2}{2\beta^4} - \frac{\dot{\alpha}\beta' f^2}{2\alpha\beta^3} + \frac{2\dot{\beta} f f'}{\beta^3} - \frac{f\dot{f}'}{\beta^2} - \frac{3f'\dot{f}}{2\beta^2} + \frac{\dot{\alpha} f f'}{2\alpha\beta^2} + \frac{2\beta' f\dot{f}}{\beta^3}, \tag{7}$$

donde el punto significa derivación temporal, y la comilla simple significa derivación con respecto a r.

Asumiendo que $\beta(r,t) \gg f(r,t)$[10] es posible encontrar una solución de las ecuaciones de campo por separación de variables $\big(\alpha(r,t) = h(r)R^2(t)$ y $\beta(r,t) = r^2S^2(t)\big)$; imponer condiciones adecuadas sobre los términos que componen a $\boldsymbol{Z}$, de modo que $\boldsymbol{Z} \approx 0$, y asumir $R(t) \approx S(t)$, también que $\mu \approx 0$ (no puede ser cero porque esto eliminaría el término cinético del Lagrangiano y aparecerían inconsistencias), y que $\Lambda = 0$, y además que los efectos de vorticidad en el fluido material que aparecen en el tensor Energía-Impulso se pueden despreciar. En tal caso las ecuaciones de movimiento resultan ser (ver [7])

$$\dot{R}^2(t) + b(r) = \frac{8\pi}{3}\rho(r,t)R^2(t) + Q(r,t)R^2(r,t), \tag{8}$$

$$\ddot{R} = -\frac{4\pi}{3}R(t)[\rho(r,t) + 3p(r,t)] + \frac{1}{3}R(t)Y(r,t), \tag{9}$$

donde

$$b(r) = \frac{h'(r)}{2rh^2(r)}, \tag{10}$$

y $\rho(r,t)$, y $p(r,t)$ son la densidad propia, y la presión isotrópica, respectivamente, asociadas al tensor Energía-Impulso de un fluido ideal. Se tiene que $Q \equiv \frac{1}{2}W - \frac{1}{6}Y$, donde

[9] Para este tensor fundamental, $g_{(\mu\nu)}$ corresponde a la métrica para el tiempo propio de un campo isotrópico y estático [7].

[10] Esto concuerda con la aproximación a un campo simétricamente esférico con f pequeño, y permitiría además asumir al campo antisimétrico como una perturbación a la métrica.

las funciones W y Y, con la separación de variables propuesta para α y β, están dadas por [7]

$$\begin{aligned} W(r,t) = &\frac{h'f^2}{h^2r^5R^6} - \frac{2f^2}{hr^6R^6} + \frac{2\dot{R}^2f^2}{r^4R^6} \\ &+ \frac{10f^2}{hr^6R^6} - \frac{\dot{R}f\dot{f}}{r^4R^5} - \frac{h'ff'}{2h^2r^4R^6} - \frac{ff''}{hr^4R^6} - \frac{8ff'}{hr^5R^6} + \frac{3f'^2}{2hr^4R^6}, \end{aligned} \tag{11}$$

$$Y(r,t) = \frac{2(\dot{R}^2 + R\ddot{R})f^2}{r^4R^6} - \frac{10\dot{R}^2f^2}{r^4R^6} - \frac{3\dot{f}^2}{2r^4R^4} + \frac{8\dot{R}f\dot{f}}{r^4R^5} - \frac{f\ddot{f}}{r^4R^4}. \tag{12}$$

Ahora, se considera una expansión del término antisimétrico $f(r,t)$ alrededor de un fondo $f_0(r,t)$, al igual que expansiones de W, Y, y Q, de la forma

$$f(r,t) = f_0(r,t) + \delta f(r,t) + \cdots, \tag{13}$$

$$W = W_0 + \delta W + \cdots, \quad Y = Y_0 + \delta Y + \cdots, \quad \cdots, \quad Q = Q_0 + \delta Q + \cdots \tag{14}$$

Las fluctuaciones $\delta f(r,t)$ se asociarán a cualquier contenido material adicional a la **materia bariónica visible** del universo, con $\rho_m(r,t) = \rho(\delta f(r,t))$, de modo que ρ_m reemplaza a la **materia oscura fría exótica** del modelo cosmológico estándar [7]. Las expansiones de W, Y, y Q se derivan de la expansión perturbativa de $f(r,t)$ (función incluida en la expresión funcional de W, Y, y Q).

Se define entonces la *densidad de materia* del universo como $\rho_M \equiv \rho_b + \rho_m$, donde ρ_b denota la *densidad de materia bariónica*. El campo de fondo f_0 describe la fuente de densidad de **energía oscura**, eliminando de esta manera la necesidad de una constante cosmológica como fuente de este tipo de energía [7]. La solución para $f(r,t)$ debe ajustarse a parámetros cosmológicos actuales como el corrimiento al rojo actual $z \sim 0$, y la solución para $\delta f(r,t)$ debe generar un ρ_m que disminuya al incrementarse el tiempo, de manera inversamente proporcional al "volúmen local" de una región del universo ($\rho_m \propto 1/R^3(t)$). Ahora, las ecuaciones de campo serían [7].

$$\dot{R}^2 + b(r) = \frac{8\pi}{3}\rho_M(r,t)R^2(t) + Q_0(r,t)R^2(t) \tag{15}$$

y

$$\ddot{R} = -\frac{4\pi}{3}R(t)[\rho_M(r,t) + 3p_M(r,t)] + \frac{1}{3}R(t)Y_0(r,t), \tag{16}$$

donde $Q_0(r,t)$ y $Y_0(r,t)$ dependen de la fuente de energía oscura f_0, y $\frac{1}{3}R(t)Y_0(r,t)$ corresponde a un término de fuerza de *Yukawa* repulsivo (signo positivo en la aceleración) [*J. Moffat: Com. Pers.*]. La ecuación (15) se puede escribir como $H^2 + b/R^2 = \Omega H^2$, donde $H = \dot{R}/R$ es el parámetro de *Hubble* y $\Omega = \Omega_M + \Omega_{f_0}$, con $\Omega_M = 8\pi\rho_M/3H^2$ y $\Omega_{f_0} = Q_0/H^2$. De la expresión ya citada, $b(r) = h'(r)/2rh^2(r)$, y de $H^2 + b/R^2 = \Omega H^2$, para $h = 1$ (lo que implica que $\alpha(r,t) = R^2(t)$), se obtiene $b = 0$ y $\Omega = 1$, de donde se obtiene $H^2 = 8\pi/3\rho_M + Q_0$, la ecuación que describe un universo plano. Con esto la métrica tomaría la forma aproximada de un universo de *Friedmann-Robertson-Walker*, plano, homogéneo e isotrópico [7]:

$$ds^2 = dt^2 - R^2(t)\Big[dr^2 + r^2(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta d\phi^2)\Big].$$

De la ecuación (16) se tiene que $\ddot{R} > 0$ cuando $Y_0 > 4\pi(\rho_M + 3p_M)$, correspondiente a un universo en **expansión acelerada**. Asumiendo que existen soluciones para $Q_0(r,t)$ y $Y_0(r,t)$ que sean suficientemente pequeñas en el universo temprano, se garantiza una etapa de desaceleración inicial del universo, que concuerda con los datos observacionales recientes de supernovas tipo Ia [7], y un buen ajuste a la gravitación de Einstein en la era de *Nucleosíntesis en el Big Bang* con $\rho_{rad} \propto 1/R^3$ [7]. Después de la era de *Nucleosíntesis en el Big Bang*, las soluciones de $Q_0(r,t)$ y $Y_0(r,t)$ deben generar valores que empiecen a incrementarse (lo que daría cabida a un universo con expansión acelerada en el presente), y que varíen actualmente de manera lenta para coincidir con $\Omega^0_{f_0} \sim 0{,}7$ y $\Omega^0_M \sim 0{,}3$ (donde el superíndice cero significa la época actual). Las soluciones encontradas con estas condiciones se ajustarían a los datos obtenidos para supernovas, cúmulos y *radiación cósmica de fondo* [7].

Con los resultados anteriores, la **Teoría de gravitación no simétrica** puede explicar la evolución de la aceleración de la expansión del universo, sin violar las *condiciones de energía positiva* para materia y radiación. La teoría satisface la *condición fuerte de energía* para materia ($\rho_M + 3p_M > 0$) a lo largo de la evolución del universo, y no requiere de una *constante cosmológica*.

Se debe garantizar que las contribuciones adicionales de la *Teoría de gravitación no simétrica* a la ecuación de *Friedmann* no entran en conflicto con la formación de galaxias, lo implica que no deben acoplarse muy fuertemente con los efectos atractivos gravitacionales predichos por las ecuaciones de campo en la época de formación de galaxias. En futuros desarrollos de la teoría (como una computación numérica de las ecuaciones de campo) es necesario requerir que esta cumpla con el comportamiento a gran escala del universo. Además, se deben efectuar cálculos que permitan establecer el valor de la constante de acople de la fuerza gravitacional repulsiva.

Referencias

[1] S.M. CARROLL, "The Cosmological Constant", *Astro-ph/0004075.*, 2000.

[2] S.M. CARROLL, "Lecture Notes on General Relativity", *gr-qc/9712019*, 1997.

[3] T. DAMOUR, S. DESER, J. MCCARTHY, "Nonsymmetric Gravity Theories: Inconsistencies and cure", *Phys. Rev. D.*, v 47, Number 4, 1993.

[4] B.A. DUBROVIN, A.T. FOMENKO, S.P. NOVIKOV, *Modern Geometry-Methods and Applications, Part I. The Geometry of Surfaces, Transformation Groups, and Fields*, Second Edition. Springer-Verlag, 1992.

[5] B.T. MCINNES, "On the geometrical interpretation of 'non-symmetric' space-time field structures", *Class. Quantum Grav.*, 1, (105-113), 1984.

[6] J.W. MOFFAT, "Gravitational theory, galaxy rotation curves and cosmology without dark matter", *J. Cosmol. Astropart. Phys.*, JCAP05(2005)003, 2005.

[7] J.W. MOFFAT, "Modified Gravitational Theory as an Alternative to Dark Energy and Dark Matter", *Astro-ph/0403266*, 2004.

[8] J.W. MOFFAT, "New theory of gravitation", *Phys. Rev. D*, v 19, Number 12, 1979.

[9] J. VOROS, "Physical Consequences of the Interpretation of the Skew Part of $g_{\mu\nu}$ in Einstein's Nonsymmetric Unified Field Theory", *Aust. J. Phys.*, 48, (45-53), 1995.

GERMÁN ROJAS
e-mail: gerojas7@yahoo.com