Revista Integración
Escuela de Matemáticas
Universidad Industrial de Santander
Vol. 26, No. 2, 2008, pág. 97–115

Una generalización para operadores del teorema de Rouché

Gilberto Arenas Díaz*

Resumen. El teorema de Rouché es utilizado para estudiar los ceros de una función dentro de un contorno conociendo los ceros de otra función relacionada. En este artículo se presenta una generalización de ese teorema para el caso de operadores, y se da una aplicación asociada con un operador relacionado con la linealización de una ecuación tipo Boussinesq.

Abstract. Rouché's theorem is used to study the zeros of a function in a contour, when the zeros of another related function are known. This paper generalizes that theorem for the case of operators. Also, it is shown an application associated with an operator related to the linearization of a Boussinesq type equation.

1. Introducción

En ocasiones es importantes saber cuántos ceros tiene una función de variable compleja en el interior de la región limitada por una curva cerrada simple. El siguiente resultado da una fórmula que cuenta tales ceros.

Teorema 1.1. *Si $f(z)$ es una función que es analítica en la región cerrada limitada por una curva simple cerrada γ y no contiene polos dentro de γ, entonces*

$$M(\gamma; f(\cdot)) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz, \tag{1}$$

donde $M(\gamma; f(\cdot))$ denota el número de ceros de $f(z)$ en el interior de γ.

Palabras y frases claves: Teorema generalizado de Rouché, operadores Fredholm, ecuación tipo Boussinesq.
MSC2000: Primaria: 47A13, 47B99. Secundaria: 47A75.
* Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia, *e-mails*: garenasd@uis.edu.co, garenasd@yahoo.com

Como en general este teorema no funciona para toda función de variable compleja, se procede a utilizar cierto tipo de estas funciones, las cuales están relacionadas de forma apropiada con la función objetivo, y a continuación se aplica el siguiente resultado, el cual es conocido como el teorema de Rouché.

Teorema 1.2 (Teorema de Rouché). *Sean $f(z)$ y $g(z)$ funciones analíticas en la región cerrada limitada por una curva cerrada simple γ y tales que $|g(z)| < |f(z)|$ sobre γ. Entonces las funciones $f(z)+g(z)$ y $f(z)$ tienen el mismo número de ceros en el interior de γ.*

El estudio de los anteriores resultados es un tema tratado en un curso clásico de variable compleja. En el presente artículo se muestra una generalización de estos dos teoremas, basados en [3], y se hace una aplicación sobre un operador relacionado con la linealización de una ecuación tipo Boussinesq.

2. Teoría preliminar

A continuación se presentan algunas definiciones y resultados básicos, y se establecen algunas de las notaciones utilizadas. Consideraremos que el lector esta familiarizado con los conceptos de espacio de Banach y espacio de Hilbert.

Si X e Y son espacios normados, $\mathcal{L}(X,Y)$ denota el conjunto de todas las transformaciones lineales de X en Y, cuando $X=Y$ se abreviará por $\mathcal{L}(X)$.

Si X e Y son espacios normados y $T: X \to Y$ es una transformación lineal, la norma de un elemento en X y la norma de un elemento en Y generalmente son relacionadas en la misma ecuación. En la practica las normas en cada espacio deberían distinguirse, pero notaremos simplemente con el símbolo $\|\cdot\|$ la norma en ambos espacios, si es claro a la norma de que espacio nos estamos refiriendo.

Definición 2.1. Sean X e Y espacios lineales normados y $T : X \to Y$ una transformación lineal. Se dice que T es **acotada** si existe un número real positivo k tal que $\|T(x)\| \leq k\,\|x\|$ para todo $x \in X$.

Es de notar que la idea de acotada y continua son equivalentes para transformaciones lineales. El conjunto de todas las transformaciones lineales acotadas (continuas) de X en Y es denotado por $\mathcal{B}(X,Y)$, cuando $X=Y$ se denota por $\mathcal{B}(X)$. Los elementos de $\mathcal{B}(X,Y)$ son llamados **operadores lineales acotados** u **operadores lineales** o simplemente **operadores**.

Definición 2.2. Sean X e Y espacios lineales normados y $T \in \mathcal{B}(X,Y)$. La ***norma*** de T se define por

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\| : \|x\| \leq 1\}.$$

Definición 2.3. Sea X un espacio normado e $I \in \mathcal{B}(X)$ el operador identidad. Un operador $T \in \mathcal{B}(X)$ se dice ***invertible*** si existe $S \in \mathcal{B}(X)$ tal que $ST = I = TS$. El operador S es llamado el ***inverso*** de T y es denotado por T^{-1}.

Definición 2.4. Sean X e Y espacios normados. Una transformación lineal T es ***compacta***, si para cualquier sucesión acotada $\{x_n\}$ en X, la sucesión $\{Tx_n\}$ en Y contiene una subsucesión convergente.

Definición 2.5. Sean X e Y espacios de Hilbert. Un operador $A \in \mathcal{B}(X,Y)$ se denomina ***de Fredholm*** si la imagen de A, $\operatorname{Im} A$, es un conjunto cerrado y los números

$$n(A) = \dim\ker A \qquad \text{y} \qquad d(A) = \dim(Y/\operatorname{Im} A)$$

son finitos. En este caso, el número $\operatorname{ind} A = n(A) - d(A)$ se llama el ***índice*** de A.

Por ejemplo, si los espacios de Hilbert X e Y son de dimensión finita, el operador $A \in \mathcal{B}(X,Y)$ es de Fredholm.

A no ser que se diga otra cosa, $\mathcal{H}$ denotará un espacio de Hilbert.

Lema 2.6. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Si $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es de rango finito, entonces $I - T$ es un operador de Fredholm e* $\operatorname{ind}(I - T) = 0$.

Teorema 2.7. *Sean $\mathcal{H}$ y $\mathcal{N}$ espacios de Hilbert y $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{N})$ un operador de Fredholm. Entonces existe $\rho > 0$ tal que si $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{N})$ con $\|S\| < \rho$, entonces $T + S$ es de Fredholm, e* $\operatorname{ind}(T+S) = \operatorname{ind}(T)$.

Corolario 2.8. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Si $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es un operador compacto, entonces $I - T$ es un operador de Fredholm e* $\operatorname{ind}(I - T) = 0$.

Demostración. Por el Lema 2.6 se sabe que $I - T$ es un operador de Fredholm. Veamos ahora que $\operatorname{ind}(I-T) = 0$. Dado que el operador T es compacto, existe una sucesión de operadores $\{T_n\}$ de $\mathcal{H}$ en $\mathcal{H}$ y de rango finito tal que $T_n \to T$ en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Puesto que $\|T - T_n\| \to 0$ cuando $n \to \infty$, existe $n_0 \in$ tal que $\|T_n - T\| < \rho$ para todo $n \geq n_0$. Por tanto, del Teorema 2.7 se tiene

$$\operatorname{ind}(I-T) = \operatorname{ind}(I - T_n + T_n - T) = \operatorname{ind}(I - T_n).$$

Ahora bien, como T_n es de rango finito, el Lema 2.6 garantiza que $\operatorname{ind}(I - T_n) = 0$. ☑

Sean $I \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ el operador identidad y $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. El **espectro** de T, denotado por $\sigma(T)$, es definido por

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid T - \lambda I \quad \text{es no invertible}\}.$$

En estas circunstancias se obtienen los siguientes resultados.

Teorema 2.9. *Sean $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ y Ω una vecindad abierta del espectro de T, $\sigma(T)$. Entonces existe un $\varepsilon > 0$ tal que $\sigma(S) \subset \Omega$ para cualquier operador $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ con $\|T - S\| < \varepsilon$.*

En adelante Γ denotará un **contorno rectificable cerrado simple**, también conocido como **contorno cerrado de Cauchy** o **curva de Jordan**, y Δ denotará el interior de la región limitada por Γ.

Teorema 2.10. *Sea σ un conjunto finito de valores propios de tipo finito de T, y sea Γ una curva de Jordan alrededor de σ que lo separa de $\sigma(T)\setminus\sigma$. Entonces existe un $\varepsilon > 0$ tal que para cualquier operador S con $\|T - S\| < \varepsilon$, tal que lo siguiente es verdadero: $\sigma(S) \cap \Gamma = \emptyset$, la parte de $\sigma(S)$ en Δ es un conjunto finito de valores propios de tipo finito y*

$$\sum_{\lambda\in\Delta} M(\lambda; S) = \sum_{\lambda\in\Delta} M(\lambda; T).$$

Definición 2.11. Sea A un operador sobre un espacio de Banach $\mathcal{X}$. Entonces se define la traza de A como

$$\operatorname{tr} A = \sum_{j=1}^{\infty} \langle A e_j, e_j \rangle,$$

para cualquier base ortonormal $\{e_j\}$ de $\mathcal{X}$.

Definición 2.12. Sea $G \subset \mathbb{C}$ un dominio y $\mathcal{X}$ un espacio de Banach. Entonces el operador

$$\begin{aligned} W:\quad & G \longrightarrow \mathcal{X} \\ & \lambda \longmapsto W(\lambda), \end{aligned}$$

es llamado ***analítico*** en el punto $\lambda_0 \in G$ si el límite

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} \frac{W(\lambda) - W(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0}$$

existe. Si W es analítico para todo $\lambda_0 \in G$, entonces se dice que W es analítico en G.

Definición 2.13. Sea $\mho$ un dominio de $\mathbb{C}$. Dado $\lambda_0 \in \mho$ se dice que los operadores $T(\cdot)$ y $S(\cdot)$ de $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ son ***equivalentes*** en λ_0 si existe una vecindad abierta U de λ_0 en $\mho$ tal que

$$T(\lambda) = F(\lambda)\, S(\lambda)\, E(\lambda), \qquad \lambda \in U,$$

donde $F(\lambda)$ y $E(\lambda)$ son operadores invertibles que dependen analíticamente sobre λ en U. Si los operadores $T(\cdot)$ y $S(\cdot)$ son equivalente para cualquier $\lambda_0 \in \mho$, se dice que $T(\cdot)$ y $S(\cdot)$ son ***equivalentes*** sobre $\mho$.

En adelante, $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ denotará el conjunto de todos los operadores lineales del espacio de Banach $\mathcal{X}$ en si mismo.

Teorema 2.14. *Sea $W : \mho \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{X})$ un operador funcional analítico tal que para algún $\lambda_0 \in \mho$ el operador $W(\lambda_0)$ es de Fredholm de índice cero. Entonces W es equivalente en λ_0 a un operador funcional analítico D de la forma*

$$D(\lambda) = P_0 + (\lambda - \lambda_0)^{\kappa_1} P_1 + \cdots + (\lambda - \lambda_0)^{\kappa_r} P_r, \tag{2}$$

donde $P_0, P_1, \ldots, P_r$ son proyecciones mutuamente disjuntas del espacio de Banach $\mathcal{X}$, donde las proyecciones $P_1, \ldots, P_r$ tienen rango uno, la proyección $I - P_0$ tiene rango finito y $\kappa_1 \leq \kappa_2 \leq \cdots \leq \kappa_r$ son enteros positivos.

Corolario 2.15. *Sea $W : \mho \to \mathcal{L}(\mathcal{X})$ un operador funcional analíticos de Fredholm tal que $W(z)$ es invertible para algún $z \in \mho$. Sea*

$$\Sigma = \{\lambda \in \mho : W(\lambda) \ \text{ es no invertible}\}.$$

Para $\lambda_0 \in \Sigma$ y $\lambda \in \mho \setminus \Sigma$ suficientemente cercano a λ_0, se tiene que

$$W(\lambda)^{-1} = \sum_{n=-q}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n A_n,$$

donde A_0 es un operador de Fredholm de índice cero y $A_{-1}, \ldots, A_{-q}$ son operadores de rango finito.

Corolario 2.16. *Sea $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$. Si el complemento en $\mathbb{C}$ del espectro esencial $\sigma_{ess}(A)$ de A es conexo, entonces $\sigma(A) \setminus \sigma_{ess}(A)$ consiste solamente de valores propios de tipo finito.*

Definición 2.17. Supóngase que $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert separable, $\mho$ es un dominio en $\mathbb{C}$, y que $W : \mho \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ es un operador funcional analítico sobre $\mho$. Se dice que $\lambda_0 \in \mho$ es un ***valor propio de tipo finito*** de $W(\cdot)$ si $W(\lambda_0)$ es de Fredholm, $W(\lambda_0)x = 0$ para algún $x \in \mathcal{H}$ diferente de cero y $W(\lambda)$ es invertible para todo λ en algún anillo alrededor de λ_0 de la forma $\{\lambda \in \mathbb{C} : 0 < |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon\}$.

Obsérvese que si $\lambda_0 \in \mho$ es un valor propio de tipo finito de $W(\cdot)$, entonces $\operatorname{ind} W(\lambda_0) = 0$, y por tanto el Teorema 2.14 garantiza que el operador funcional W es equivalente en λ_0 a un operador funcional D que satisface las condiciones allí enunciadas. Además, dado que en este caso $D(\lambda)$ es invertible para $\lambda \neq \lambda_0$ y λ suficientemente cerca de λ_0, se satisface también que $P_0 + P_1 + \cdots + P_r = I$.

Definición 2.18. La suma $\kappa_1 + \cdots + \kappa_r$ de los índices en (2) se llama la ***multiplicidad algebraica*** de W en λ_0, y será denotada por $M(\lambda_0; W(\cdot))$.

Supóngase que W es un operador funcional. Entonces el Corolario 2.15 implica que $W(\lambda)$ es invertible para todo $\lambda \in \Delta$, excepto para un número finito de puntos que son valores propios de tipo finito de W. Esto permite formular la siguiente definición.

Definición 2.19. La ***multiplicidad algebraica*** $M(\Gamma; W(\cdot))$ de W ***relativa a la curva de Jordan*** Γ se define como la suma

$$M(\Gamma; W(\cdot)) = M(\lambda_1; W(\cdot)) + \cdots + M(\lambda_p; W(\cdot)),$$

donde $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ son los valores propios de tipo finito de W en el interior de Γ.

Definición 2.20. Un operador funcional G con valores en $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, es llamado ***finitamente meromorfo*** en λ_0 si G tiene un polo en λ_0 y los coeficientes de la parte principal de su expansión de Laurent en λ_0 son operadores de rango finito; es decir, en alguna vecindad perforada de λ_0 tiene una expansión

$$G(\lambda) = \sum_{\nu=-q}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^{\nu} G_{\nu},$$

la cual converge en la norma del operador sobre $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, tal que $G_{-1}, \ldots, G_{-q}$ son operadores de rango finito. En este caso $\Xi G(\lambda)$ denota la parte principal de G en λ_0. Así,

$$\Xi G(\lambda) = \sum_{\nu=-q}^{-1} (\lambda - \lambda_0)^{\nu} G_{\nu}, \qquad \lambda \neq \lambda_0.$$

Nótese que ΞG es analítico sobre $\mathbb{C} \setminus \{\lambda_0\}$, y que sus valores son operadores de rango finito.

Lema 2.21. *Sean G_1 y G_2 dos operadores funcionales con valores en $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ que son finitamente meromorfos en λ_0. Entonces los operadores G_1G_2 y G_2G_1 son finitamente meromorfos en λ_0 y*

$$\operatorname{tr} \Xi(G_1G_2)(\lambda) = \operatorname{tr} \Xi(G_2G_1)(\lambda), \qquad \lambda \neq \lambda_0.$$

Definición 2.22. Sea Γ una curva de Jordan en $\mho$ tal que su dominio interno Δ es un subconjunto de $\mho$. El operador funcional W se dice que es ***normal*** con respecto a Γ si $W(\lambda)$ es invertible para todo $\lambda \in \Gamma$ y $W(\lambda)$ es de Fredholm para todo λ en el dominio interno Δ.

3. Resultados principales

A continuación se presenta la generalización para operadores de los Teoremas 1.1 y 1.2.

Teorema 3.1. *Sea $W : \mho \longrightarrow \mathcal{L}(X)$ un operador funcional analítico, y supóngase que W es normal con respecto a la curva de Jordan Γ. Entonces*

$$M(\Gamma; W(\cdot)) = \operatorname{tr}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma W'(\lambda)\, W(\lambda)^{-1}\, d\lambda\right), \tag{3}$$

donde $W'(\Lambda)$ denota la derivada de W en Λ.

Demostración. El operador funcional $W'(\cdot)\, W(\cdot)^{-1}$ es analítico sobre $\Delta \cup \Gamma$, excepto posiblemente en un número finito de puntos en Δ que son valores propios de tipo finito de W. Por lo tanto, por el Teorema de Cauchy para funciones analíticas, es suficiente probar el teorema en el caso en el que Γ es una circunferencia de radio ρ suficientemente pequeño y con centro en un valor propio λ_0 de W. Recuérdese que W es equivalente en λ_0 al operador funcional D definido en (2). Así, existe una vecindad abierta U de λ_0 tal que

$$W(\lambda) = E(\lambda)\, D(\lambda)\, F(\lambda), \qquad \lambda \in U, \tag{4}$$

donde $E(\lambda)$ y $F(\lambda)$ son operadores invertibles que dependen analíticamente de λ en U. Supóngase que el radio ρ de la circunferencia Γ se ha elegido de una manera tal que $\lambda \in U$ siempre que $|\lambda - \lambda_0| \leq \rho$. Omitiendo la variable λ, se puede escribir

$$\begin{aligned} W'W^{-1} &= (E'DF + ED'F + EDF')\, F^{-1}D^{-1}E^{-1} \\ &= E'E^{-1} + ED'D^{-1}E^{-1} + EDF'F^{-1}D^{-1}E^{-1}. \end{aligned} \tag{5}$$

Por el Corolario 2.15 se sabe que W^{-1} es finitamente meromorfa en λ_0. Puesto que W es analítica en U, su derivada W' es también analítica en U, y así $W'W^{-1}$ es finitamente meromorfa. Se sigue que

$$K := \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma W'(\lambda)\, W(\lambda)^{-1}\, d\lambda \tag{6}$$

es un operador bien definido y de rango finito. En (6) el integrando se puede substituir por la parte principal de $W'(\cdot)\,W(\cdot)^{-1}$. Pero entonces la integral existe en la norma de la traza, y la integral puede ser intercambiada. Obsérvese que

$$\begin{aligned}\operatorname{tr} K &= \operatorname{tr}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma W'(\lambda)\,W(\lambda)^{-1}\,d\lambda\right)\\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \operatorname{tr}\Xi\left\{W'(\lambda)\,W(\lambda)^{-1}\right\}\,d\lambda;\end{aligned} \tag{7}$$

por otra parte,

$$D(\lambda)^{-1} = P_0 + (\lambda-\lambda_0)^{-\kappa_1}P_1 + \cdots + (\lambda-\lambda_0)^{-\kappa_r}P_r, \qquad \lambda \neq \lambda_0. \tag{8}$$

En particular, $D(\cdot)^{-1}$ es finitamente meromorfa en λ_0. El resto de las funciones que aparecen en el lado derecho de (5) son analíticas en λ_0. Utilizando el Lema 2.21 se sigue que para $\lambda_0 \neq \lambda \in U$

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}\Xi\left\{W'W^{-1}\right\} &= \operatorname{tr}\Xi\left\{E'E^{-1} + ED'D^{-1}E^{-1} + EDF'F^{-1}D^{-1}E^{-1}\right\}\\ &= \operatorname{tr}\Xi\left\{D'D^{-1}\right\}.\end{aligned}$$

Ahora, de la definición del operador (2) y la ecuación (8) se obtiene que

$$D'(\lambda)\,D(\lambda)^{-1} = \kappa_1(\lambda-\lambda_0)^{-1}P_1 + \cdots + \kappa_r(\lambda-\lambda_0)^{-1}P_r, \qquad \lambda\neq\lambda_0,$$

y así

$$\operatorname{tr}\Xi\left\{W'(\lambda)W(\lambda)^{-1}\right\} = \operatorname{tr}\Xi\left\{D'(\lambda)\,D(\lambda)^{-1}\right\} = \sum_{j=1}^{r}\kappa_r(\lambda-\lambda_0)^{-1}, \quad \lambda\neq\lambda_0. \tag{9}$$

De esta forma, usando (9) en la integral (7), se tiene que para la curva de Jordan Γ,

$$M(\Gamma; W(\cdot)) = \sum_{j=1}^{r}\kappa_r,$$

que es el resultado deseado (3). ☑

El Teorema 3.1 implica que la definición de la multiplicidad de W en λ_0 no depende de la elección de la función $D(\cdot)$ dada en (2). En efecto, el residuo de $\operatorname{tr}\Xi W'(\cdot)W(\cdot)^{-1}$ en λ_0 es igual a $\kappa_1+\cdots+\kappa_r$, y por lo tanto este número es determinado únicamente por W.

Antes de probar el siguiente teorema, considérese el caso en el que $W_A(\lambda) = \lambda I - A$, donde A es un operador lineal acotado en $\mathcal{H}$. Del Corolario 2.16 se sigue que λ_0 es un valor propio de tipo finito de $W_A(\cdot)$ si y solo si λ_0 es un valor propio de tipo finito de A. El teorema anterior implica que en este caso $M(\lambda_0, W_A(\cdot))$ es precisamente la multiplicidad algebraica de λ_0 como valor propio de A. Para ver esto, se elige un círculo Γ_0 con centro en λ_0, orientado positivamente, y tal que $\sigma(A) \cap \Gamma_0 = \emptyset$ y λ_0 es el único punto en el espectro de A en el interior de Γ_0. Entonces W_A es normal con respecto a Γ_0 y

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0} W_A'(\lambda) W_A(\lambda)^{-1} d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0} (\lambda I - A)^{-1}\, d\lambda, \tag{10}$$

en donde el lado derecho es la proyección de Riesz P_{λ_0} de A que corresponde al punto λ_0. El rango de P_{λ_0} es finito e igual a $M(\lambda_0, A)$, la multiplicidad algebraica de λ_0 como un valor propio de A. Por el teorema anterior la traza del lado izquierdo de la ecuación anterior es igual a $M(\lambda_0, W_A(\cdot))$. Puesto que la traza de una proyección de rango finito es igual al rango de la proyección, se sigue que

$$M(\lambda_0, W_A(\cdot)) = M(\lambda_0, A).$$

De las observaciones anteriores combinadas con el Teorema 2.10 se obtiene la siguiente generalización para operadores del Teorema 1.2.

Teorema 3.2 (Teorema generalizado de Rouché). *Sean* $W, S : \mho \to \mathcal{L}(H)$ *operadores funcionales analíticos. Si* W *es normal con respecto a la curva de Jordan* Γ *y*

$$\left\|W(\lambda)^{-1} S(\lambda)\right\| < 1, \qquad \text{para todo } \lambda \in \Gamma, \tag{11}$$

entonces $V(\cdot) = W(\cdot) + S(\cdot)$ *es normal con respecto a* Γ *y*

$$M(\Gamma; V(\cdot)) = M(\Gamma; W(\cdot)). \tag{12}$$

Demostración. La prueba está dividida en dos partes. Como antes, Δ denota el dominio interno de Γ.

(i) Primero se muestra que V es normal con respecto a Γ. Tómese $C(\cdot) = W(\cdot)^{-1} S(\cdot)$. Para $\lambda \in \Gamma$ se tiene que $\|C(\lambda)\| < 1$, y entonces $I + C(\lambda)$ es invertible para $\lambda \in \Gamma$. Por hipótesis, se cumple lo mismo para $W(\lambda)$. Así, $V(\lambda) = W(\lambda)[I + C(\lambda)]$ es invertible para $\lambda \in \Gamma$. Para probar que $V(\lambda)$ es de Fredholm para $\lambda \in \Delta$, estudiamos el comportamiento de $C(\cdot)$ en Δ. De la definición se ve que C es analítica en cada punto de Γ, y C es analítica sobre Δ, excepto posiblemente para un número finito de puntos dentro de Δ, que son valores propios de tipo finito de W. Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ estos puntos excepcionales. Por el Teorema 2.15 se sabe que $W(\cdot)^{-1}$ es finitamente meromorfo en los puntos $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$. Puesto que S es analítico sobre $\mho$, se sigue que C es también finitamente meromorfo para $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$. Así, para λ cerca de λ_j se tiene que

$$C(\lambda) = \sum_{\nu=-q_j}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^{\nu} C_{j,\nu},$$

donde $C_{j,-1}, , C_{j,-q_j}$ son operadores rango finito. Definiendo

$$\mathcal{N} = \bigcap \{\ker C_{j,\nu} : \nu = -1, \ldots, -q_j, \, j = 1, \ldots, p\},$$

se observa que es un espacio lineal cerrado de $\mathcal{H}$ y $\dim \mathcal{H}/\mathcal{N} < \infty$. Sea $C_{\mathcal{N}}(\lambda) : \mathcal{N} \to \mathcal{H}$ definido por $C_{\mathcal{N}}(\lambda) x = C(\lambda) x$ para cada $x \in \mathcal{N}$. Entonces $C_{\mathcal{N}}$ es un operador funcional con valores en $\mathcal{L}(\mathcal{N}, \mathcal{H})$, el conjunto de los operadores lineales de $\mathcal{N}$ en $\mathcal{H}$, que es analítico en cada punto de $\Gamma \cup \Delta$. A partir de (11) se sigue que existe $0 \leq \gamma < 1$ tal que $\|C(\lambda)\| \leq \gamma$ para todo $\lambda \in \Gamma$. En particular, para $x \in \mathcal{N}$ y $y \in \mathcal{H}$ se tiene que

$$|\langle C_{\mathcal{N}}(\lambda) x, y\rangle| \leq \gamma \|x\| \|y\|, \qquad \lambda \in \Gamma.$$

Pero $\langle C_{\mathcal{H}}(\cdot) x, y\rangle$ es analítica en cada punto de $\Gamma \cup \Delta$, así que, por el principio del módulo máximo, la desigualdad anterior se satisface para todo $\lambda \in \Gamma \cup \Delta$, y entonces

$$\|C(\lambda)\| \leq \gamma < 1, \qquad \lambda \in \Gamma \cup \Delta.$$

Ahora, definiendo $\tilde{C}(\lambda) : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ por $\tilde{C}(\lambda) = C_{\mathcal{N}}(\lambda) \Pi$, donde Π es la proyección ortogonal de $\mathcal{H}$ sobre $\mathcal{N}$, tenemos que $\tilde{C}$ es un operador funcional con valores en $\mathcal{L}(H)$ que es analítico en cada punto de $\Gamma \cup \Delta$ y $\|C(\lambda)\| \leq \gamma < 1$ para todo $\lambda \in \Gamma \cup \Delta$. De esto se sigue que $I + \tilde{C}(\lambda)$ es invertible para cada $\lambda \in \Gamma \cup \Delta$. Se sabe que $W(\lambda)$ es de Fredholm para cada $\lambda \in \Delta$. Así, el mismo argumento es válido para $W(\lambda)\left[I + \tilde{C}(\lambda)\right]$. Nótese que $V(\lambda)$ y $W(\lambda)\left[I + \tilde{C}(\lambda)\right]$ coinciden sobre el espacio $\mathcal{N}$. Pero $\mathcal{N}$ tiene codimensión finita en $\mathcal{H}$, y en consecuencia $V(\lambda)$ es normal con respecto a Γ.

(ii) En esta parte se prueba la fórmula (12) usando el método de linearización. Sin pérdida de generalidad se puede asumir que 0 está en el dominio interno de Γ. Elíjase el dominio Θ como el interior de una curva de Jordan, tal que $\Gamma \subset \Theta \subset \bar{\Theta} \subset \mho$. Sea $\mathcal{K}_0$ el espacio de todas las funciones continuas $\mathcal{H}$ con valores en $\partial\Theta$ dotadas con el producto interno

$$\langle f, g\rangle = \int_{\partial\Theta} \langle f(\zeta), g(\zeta)\rangle \, d\zeta, \tag{13}$$

y sea $\mathcal{K}$ un espacio de Hilbert tal que $\mathcal{K}_0$ es un subvariedad lineal de $\mathcal{H}$ que es densa en $\mathcal{H}$, y que para los elementos f y g en $\mathcal{K}_0$ el producto interno en $\mathcal{K}$ coincide con el dado en (13). Hasta una isometría lineal el espacio de Hilbert $\mathcal{K}$ es determinado de manera única por $\mathcal{K}_0$. Puesto que $\mathcal{H}$ es separable, también lo es $\mathcal{K}$.

Para $0 \leq t \leq 1$ se toma el operador A_t en $\mathcal{K}$ definido por

$$(A_t f)(z) = zf(z) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Theta} [I - W(\zeta) - tS(\zeta)] f(\zeta)\, d\zeta, \qquad z \in \partial\Theta. \tag{14}$$

El operador A_t es acotado en $\mathcal{K}_0$, y por lo tanto, por continuidad, A_t se extiende a un operador lineal limitado en K, el cual también se denota por A_t. A partir de (14) se sigue que la aplicación

$$t \longmapsto A_t, \qquad [0,1] \longrightarrow \mathcal{L}(K) \tag{15}$$

es continua con respecto a la norma del operador sobre $\mathcal{L}(K)$.

Sea $\omega : \mathcal{K} \to \mathcal{H}$ el operador lineal acotado (único) tal que

$$\omega f = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Theta} \frac{1}{\zeta} f(\zeta)\, d\zeta, \qquad f \in \mathcal{K}_0. \tag{16}$$

Obsérvese que ω está acotado en $\mathcal{K}_0$, y por lo tanto, por continuidad, se extiende a toda $\mathcal{K}$. Supóngase que $Z = \ker\omega$. Entonces Z es un espacio de Hilbert (separable) en sí mismo, y para $0 \leq t \leq 1$ la extensión Z de $W(\cdot) + tS(\cdot)$ es equivalente en Θ a $\lambda - A_t$.

Considérese $W_t(\lambda) = \lambda - A_t$. La equivalencia anterior implica que W_t es normal con respecto a Γ. Por la extensión y la equivalencia la multiplicidad algebraica no cambia. Así,

$$M(\Gamma; W(\cdot) + tS(\cdot)) = M(\Gamma; W_t(\cdot)). \tag{17}$$

Por las observaciones hechas antes de enunciar este teorema, se tiene que

$$M(\Gamma; W_t(\cdot)) = \sum_{\lambda\in\Delta} M(\lambda; A_t(\cdot)).$$

Además, por el Teorema 2.10, la cantidad en el lado derecho de la ecuación anterior es una función continua de t. Esto implica que se siga lo mismo para la cantidad en el lado izquierdo de la ecuación (17). Puesto que estas funciones son de valor en los enteros, concluimos que $M(\Gamma; W(\cdot) + tS(\cdot))$ no depende de $t \in [0,1]$, y por lo tanto se prueba (12). ☑

4. *Una aplicación del teorema generalizado de Rouché*

En esta sección se presenta una aplicación del Teorema generalizado de Rouché asociada con un operador relacionado con el problema de linealización de una ecuación tipo

Boussinesq. Antes de dar esta aplicación se hace una descripción de los antecedentes relacionados con este problema, los detalles relacionados con las pruebas. Las observaciones realizadas en esta sección se pueden encontrar en [2].

4.1. Antecedentes

R. Pego y M. Weinstein en [5] estudiaron un tipo de estabilidad lineal para las ondas solitarias de una ecuación tipo Boussinesq. El modelo considerado por R. Pego y M. Weinstein en [5] corresponde a una aproximación válida para ondas de agua que se propagan en una dirección, cuya ecuación es

$$\eta_{tt} - \eta_{xx} - \frac{3}{2}\epsilon\left(\eta^2\right)_{xx} - \frac{\epsilon}{3}\eta_{xxtt} = 0. \tag{18}$$

La primera observación es que el parámetro ϵ de la ecuación (18) se puede eliminar considerando las sustituciones

$$\eta(x,t) = \frac{c^2}{3\epsilon}\tilde{\eta}(s,\tau), \qquad \tau = c\sqrt{\frac{3}{\epsilon}}t, \qquad s = \sqrt{\frac{3}{\epsilon}}\left(x - ct\right).$$

De aquí se obtiene la ecuación

$$\left(I - \partial_s^2\right)\left(\partial_\tau - \partial_s\right)^2\tilde{\eta} - \partial_s^2\left(c^{-2}\tilde{\eta} + \frac{1}{2}\tilde{\eta}^2\right) = 0. \tag{19}$$

R. Pego y M. Weinstein estudiaron la estabilidad de la ecuación (18) a través de un problema de valores propios asociado con la linealización alrededor de la onda solitaria $\tilde{\eta}_c\left(s\right) = 3\gamma^2\operatorname{sech}^2\left(\frac{1}{2}\gamma s\right)$, donde $c^{-2} = 1 - \gamma^2$. Para ello consideraron perturbaciones de la onda solitaria $\tilde{\eta}_c$ de la forma

$$\tilde{\eta}\left(s,\tau\right) = \tilde{\eta}_c(s) + H(s,\tau),$$

obteniendo una ecuación lineal de evolución eliminando los términos cuadráticos en H. La ecuación lineal de evolución correspondiente a $H(s,\tau)$ es

$$\left(I - \partial_s^2\right)\left(\partial_\tau - \partial_s\right)^2 H - \partial_s^2\left(c^{-2} + \tilde{\eta}_c\right)H = 0. \tag{20}$$

Al considerar el escalamiento tipo KdV para la ecuación (19), dado por

$$\tilde{\eta}\left(s,\tau\right) = \gamma^2\eta_*\left(r,T\right), \quad \text{donde} \quad r = \gamma s, \quad T = \frac{1}{2}\gamma^3\tau, \quad \text{y} \quad c^{-2} = 1 - \gamma^2,$$

observaron que en este caso, hasta orden $O\left(\gamma^2\right)$, η_* satisface la ecuación KdV en la forma

$$\partial_T \eta_* - \partial_r \eta_* + \partial_r \left(\frac{1}{2} \eta_*^2 \right) + \partial_r^3 \eta_* = 0. \tag{21}$$

Nótese que la ecuación KdV (21) tiene una onda solitaria $\eta_* (r, T) = \Theta (r - T)$ con $\Theta (r) = 3 \operatorname{sech}^2 \left(\frac{1}{2} r \right)$. Más aún, la onda solitaria de la ecuación (20) tiene la forma $\tilde{\eta}_c (s) = \gamma^2 \Theta (\gamma s)$.

R. Pego y M. Weinstein observaron que este problema de valores propios es equivalente a buscar soluciones de la forma $H(s, \tau) = e^{\lambda \tau} h(s)$. En este caso, la función propia h satisface la ecuación de valores propios

$$\left(I - \partial_s^2 \right) (\lambda - \partial_s)^2 h - \partial_s^2 \left(c^{-2} + \tilde{\eta}_c \right) h = 0. \tag{22}$$

La estrategia abordada por R. Pego y M. Weinstein en [5] para estudiar la linealización asociada con la ecuación (20) fue utilizar la información conocida acerca del problema de valores propios de la ecuación KdV, de la cual se conoce el siguiente resultado.

Corolario 4.1 (R. Pego y M. Weinstein, [4]). *Sea $\Theta (r) = 3 \operatorname{sech}^2 \left(\frac{1}{2} r \right)$. Entonces $\Lambda = 0$ es el único valor propio con $\operatorname{Re} (\Lambda) \geq -\frac{\widehat{\alpha}}{3}$, de la ecuación de valores propios*

$$(\partial_r - a) \left[- (\partial_r - a)^2 + 1 - \Theta (r) \right] H = \Lambda H \quad en \quad L^2 (\mathbb{R}) .$$

Más aún, la multiplicidad algebraica de $\Lambda = 0$ es 2.

El resultado obtenido es el siguiente:

Teorema 4.2 (R. Pego y M. Weinstein, [5]). *Suponga que $a = \gamma \widehat{\alpha}$, donde $0 < \widehat{\alpha} < \sqrt{\frac{1}{3}}$ y $\gamma > 0$ es suficientemente pequeño. Entonces existe $b > 0$ tal que si $\lambda \neq 0$ con $\operatorname{Re} \lambda > -b$, el problema (22) no tiene solución trivial tal que $\|h\|_a$ sea finita. Además, $\lambda = 0$ es un valor propio de (22) de multiplicidad algebraica 2.*

El análisis realizado por R. Pego y M. Weinstein en [5] para la demostración del Teorema 4.2 se basa en el estudio de una función analítica $D (\lambda, \gamma)$, llamada función de Evans, que tiene la propiedad que sus ceros corresponden a los valores propios λ de (22) con $\operatorname{Re} \lambda > 0$.

La aplicación que se presenta en este artículo corresponde a una nueva demostración del teorema anterior, utilizando el hecho de que las transformadas de Fourier de las soluciones a la ecuación (22) y la ecuación asociada a la linealización de la ecuación KdV se pueden expresar usando operadores tipo multiplicación en L^2, los cuales satisfacen las condiciones del Teorema 3.2.

El estudio de los valores propios de (22) se hace a través de la relación existente entre la linealización de la ecuación (18), ecuación (22), y la linealización de la ecuación KdV, ecuación (21). Para observar lo anterior, vamos a realizar el mismo tipo de reescalamiento KdV de la ecuación (19) a la ecuación (22). En este caso tomamos

$$\lambda = \frac{1}{2}\gamma^3\Lambda, \quad h(s) = \gamma^2 H(r),$$

donde $r = \gamma s$. Por lo tanto, dado que $\Theta(r) = 3\,\mathrm{sech}^2\left(\frac{1}{2}r\right)$ es una onda solitaria de la ecuación (21), entonces H satisface la ecuación

$$\partial_r\left[\Lambda H + \partial_r^3 H - \partial_r H + \partial_r(\Theta H)\right] = \gamma^2\left[\Lambda\partial_r^3 + \frac{1}{4}\Lambda^2\left(I - \gamma^2\partial_r^2\right)\right]H. \tag{23}$$

Nótese que cuando $\gamma \to 0^+$, H satisface formalmente la ecuación

$$\partial_r\left[\Lambda H + \partial_r^3 H - \partial_r H + \partial_r(\Theta H)\right] = 0.$$

Si suponemos decaimiento de H en $\pm\infty$, H satisface formalmente la ecuación de valores propios

$$\Lambda H + \partial_r^3 H - \partial_r H + \partial_r(\Theta H) = 0. \tag{24}$$

Esta ecuación corresponde exactamente al problema de valor propio asociado con la linealización de la ecuación KdV alrededor de su onda solitaria $\Theta(r)$.

Recordemos que estamos interesados en estudiar las soluciones del problema de valores propios (22) en el espacio con peso a, que denotamos L_a^2, y que tiene norma $\|\cdot\|_a$. Obsérvese que estudiar las soluciones de la ecuación (22) en L_a^2 es equivalente a estudiar las soluciones en L^2 de la ecuación

$$\left(I - (\partial_s - a)^2\right)(\lambda - (\partial_s - a))^2 h - c^{-2}(\partial_s - a)^2 h = (\partial_s - a)^2\,\tilde{\eta}_c h. \tag{25}$$

Con el fin de reescribir la ecuación (25) como un operador tipo multiplicación en L^2, aplicamos formalmente la transformada de Fourier en ambos lados de dicha ecuación. En este caso, la transformada de Fourier de h, $\widehat{h}$, satisface la fórmula

$$\widehat{h}(\xi) = \left(\frac{\mu^2}{(1-\mu^2)(\lambda-\mu)^2 - c^{-2}\mu^2}\right)\widehat{\tilde{\eta}_c h}(\xi),$$

donde $\mu = i\xi - a$. Si realizamos el escalamiento tipo KdV definido por

$$\mu = \gamma\nu, \quad \xi = \gamma\zeta, \quad \lambda = \frac{1}{2}\Lambda\gamma^3, \qquad h(r) = \gamma^2 H(\gamma s),$$

donde $\tilde{\eta}_c(s) = \gamma^2\Theta(\gamma s)$, y si $\mathcal{F}$ denota la transformada de Fourier en la variable ζ, encontramos que H satisface la ecuación,

$$\mathcal{F}(H)(\zeta) = m^{(\gamma)}(\Lambda,\nu)\,\mathcal{F}(\Theta H)(\zeta), \tag{26}$$

donde $\nu = i\zeta - \widehat{\alpha}$ y $m^{(\gamma)}(\Lambda,\nu) = \dfrac{\gamma^2\nu^2}{(1-\gamma^2\nu^2)\left(\frac{1}{2}\Lambda\gamma^2-\nu\right)^2 - c^{-2}\nu^2}$.

Por otra parte, de la ecuación (24) asociada con la ecuación KdV se tiene que

$$\left(\partial_r - \Lambda - \partial_r^3\right) H(r) = \partial_r(\Theta H)(r).$$

Realizando un procedimiento análogo, encontramos que H satisface la ecuación

$$\mathcal{F}(H)(\zeta) = m^{(0)}(\Lambda,\nu)\,\mathcal{F}(\Theta H)(\zeta), \tag{27}$$

donde $\nu = i\zeta - \widehat{\alpha}$ y $m^{(0)}(\Lambda,\nu) = \dfrac{\nu}{\nu - \Lambda - \nu^3}$.

Nótese que la ecuación (26) se puede escribir formalmente como

$$\mathcal{F}(H) = m^{(\gamma)}(\Lambda,\nu)\,\mathcal{F}(\Theta H).$$

Al aplicar transformada inversa de Fourier, tenemos que H satisface la ecuación

$$H - \mathcal{F}^{-1}\Big(m^{(\gamma)}(\Lambda,\nu)\,\mathcal{F}(\Theta H)\Big) = 0.$$

La anterior ecuación se puede escribir formalmente como

$$\Big(I - \mathcal{K}^{(\gamma)}(\Lambda)\Big)(H) = 0, \tag{28}$$

donde $\mathcal{K}^{(\gamma)}(\Lambda)$ es el operador lineal tipo multiplicación definido por

$$\mathcal{K}^{(\gamma)}(\Lambda)(H) = \mathcal{F}^{-1}\Big[m^{(\gamma)}(\Lambda,\nu)\,\mathcal{F}(\Theta H)\Big].$$

De manera análoga, la ecuación (27) se puede escribir formalmente como

$$\Big(I - \mathcal{K}^{(0)}(\Lambda)\Big)(H) = 0, \tag{29}$$

donde $\mathcal{K}^{(0)}(\Lambda)$ es el operador lineal tipo multiplicación definido por

$$\mathcal{K}^{(0)}(\Lambda)(H) = \mathcal{F}^{-1}\Big[m^{(0)}(\Lambda,\nu)\,\mathcal{F}(\Theta H)\Big].$$

Una importante observación es que formalmente, para (Λ,ν) fijos,

$$\lim_{\gamma\to 0^+} m^{(\gamma)}(\Lambda,\nu) = m^{(0)}(\Lambda,\nu).$$

Es de observar que los símbolo $m^{(0)}(\Lambda,\nu)$ y $m^{(\gamma)}(\Lambda,\nu)$ están bien definidos y además satisfacen el siguiente teorema.

Teorema 4.3. *Sea* $\widehat{\alpha} \in \left(0, \sqrt{\frac{1}{3}}\right)$ *fijo. Entonces,*

$$\lim_{\gamma \to 0^+} \left(\sup_{(\Lambda,\zeta)\in\Omega} \left| m^{(\gamma)}(\Lambda,\zeta) - m^{(0)}(\Lambda,\zeta) \right| \right) = 0,$$

donde

$$\Omega = \left\{ (\Lambda,\zeta) : \zeta \in \mathbb{R} \quad y \quad \operatorname{Re}(\Lambda) \geq -\frac{\widehat{\alpha}}{3} \right\}.$$

Por otra parte, se tienen los siguientes resultados para los operadores $\mathcal{K}^{(\gamma)}(\Lambda)$ y $\mathcal{K}^{(0)}(\Lambda)$.

Proposición 4.4. *Sea* $\operatorname{Re}(\Lambda) \geq -\frac{\widehat{\alpha}}{3}$*, y* $\gamma = 0$ *ó* $\gamma > 0$*, pero suficientemente pequeño. Entonces, el operador* $\mathcal{K}^{(\gamma)}(\Lambda)$ *es lineal y continuo sobre* L^2*.*

Como consecuencia del Teorema de Plancharel y del Teorema 4.3 se tiene el siguiente resultado.

Teorema 4.5. *Sea* $\widehat{\alpha} \in \left(0, \sqrt{\frac{1}{3}}\right)$ *fijo. Entonces, para* $\gamma > 0$*, pero suficientemente pequeño*

$$\left\| \left(\mathcal{K}^{(\gamma)}(\Lambda) - \mathcal{K}^{(0)}(\Lambda) \right)(H) \right\|_{L^2} \leq \sup_{\Omega} \left| m^{(\gamma)}(\Lambda,\zeta) - m^{(0)}(\Lambda,\zeta) \right| \|\Theta\|_\infty \|H\|_{L^2}.$$

Del Teorema 4.3, se tiene que $\sup_{\Omega} \left| m^{(\gamma)}(\Lambda,\zeta) - m^{(0)}(\Lambda,\zeta) \right| \to 0$ cuando $\gamma \to 0^+$. En consecuencia, tenemos el siguiente Corolario.

Corolario 4.6. *Sea* $\widehat{\alpha} \in \left(0, \sqrt{\frac{1}{3}}\right)$ *y* $\operatorname{Re}(\Lambda) \geq -\frac{\widehat{\alpha}}{3}$*. Entonces,*

$$\lim_{\gamma \to 0^+} \left\| \left(\mathcal{K}^{(\gamma)}(\Lambda) - \mathcal{K}^{(0)}(\Lambda) \right) \right\|_{\mathcal{L}(L^2)} = 0.$$

Teorema 4.7. *Sea* $\widehat{\alpha} \in \left(0, \sqrt{\frac{1}{3}}\right)$ *y* $\operatorname{Re}(\Lambda) \geq -\frac{\widehat{\alpha}}{3}$*. Entonces, el operador* $\mathcal{K}^{(0)}(\Lambda)$ *es compacto.*

4.2. Una aplicación

A continuación el objetivo principal es presentar una nueva demostración del Teorema 4.2, relacionado con los valores propios asociados con la linealización de la ecuación (22). Está nueva demostración se obtiene como una aplicación directa del teorema generalizado de Rouché (Teorema 3.2).

Demostración del Teorema 4.2. Sea $U = \left\{ \Lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(\Lambda) \geq -\frac{\widehat{\alpha}}{3} \right\}$ y consideremos los operadores $W, W^{(\gamma)}, S^{(\gamma)} : U \to \mathcal{L}(L^2)$ definidos por

$$W(\Lambda) = I - \mathcal{K}^{(0)}(\Lambda), \quad W^{(\gamma)}(\Lambda) = I - \mathcal{K}^{(\gamma)}(\Lambda),$$

$$S^{(\gamma)}(\Lambda) = \mathcal{K}^{(0)}(\Lambda) - \mathcal{K}^{(\gamma)}(\Lambda).$$

La primera observación es que los operadores W y $S^{(\gamma)}$ son analíticos, dado que el símbolo $m^{(\gamma)}(\Lambda, \nu)$ está bien definido para $\gamma = 0$ y $\gamma > 0$, pero suficientemente pequeño.

Afirmación 1. *Supongamos que $\Lambda \in U$. Entonces, el operador $W(\Lambda)$ es de Fredholm. Más aún, si $\Lambda \neq 0$, $W(\Lambda)$ es invertible, entonces W es normal con respecto a cualquier curva de Jordan $\Gamma \subset U$ tal que $0 \notin \Gamma$.*

En efecto, del Teorema 4.7 tenemos que el operador $\mathcal{K}^{(0)}(\Lambda)$ es compacto para todo Λ tal que $\mathrm{Re}(\Lambda) > -\frac{\widehat{\alpha}}{3}$. Así que el Corolario 2.6 implica que $I - \mathcal{K}^{(0)}(\Lambda) = W(\Lambda)$ es de Fredholm en U.

Sea ahora $\Lambda \neq 0$ con $\mathrm{Re}(\Lambda) \geq -\frac{\widehat{\alpha}}{3}$. Supongamos que el operador $W(\Lambda)$ no es invertible. Entonces, existe $H \in L^2$ no nula, tal que

$$W(\Lambda) H = \left(I - \mathcal{K}^{(0)}(\Lambda)\right) H = 0.$$

Esto implica que $H = \mathcal{K}^{(0)}(\Lambda) H$. Por la definición del operador tipo multiplicación $\mathcal{K}^{(0)}(\Lambda)$, se tiene que H satisface la ecuación diferencial en L^2

$$(\partial_s - a)\left[-(\partial_s - a)^2 + 1 - \Theta\right] H = \Lambda H. \tag{30}$$

Pero del Corolario 4.1 tenemos que el único valor propio de la ecuación (30) en L^2 es $\Lambda = 0$. Por tanto, $W(\Lambda)$ es invertible para todo $\Lambda \neq 0$ con $\mathrm{Re}(\Lambda) \geq -\frac{\widehat{\alpha}}{3}$. En consecuencia, el operador W es normal con respecto a cualquier curva de Jordan $\Gamma \subset U$ tal que $0 \notin \Gamma$.

✓

Afirmación 2. *Para $\gamma > 0$, pero suficientemente pequeño, los operadores W y $S^{(\gamma)}$ satisfacen la desigualdad*

$$\left\| W(\Lambda)^{-1} S^{(\gamma)}(\Lambda) \right\| < 1, \qquad \Lambda \in \Gamma,$$

donde Γ es cualquier curva de Jordan contenida en U tal que $0 \notin \Gamma$.

En efecto, sea $\Omega = \left\{(\Lambda, \zeta) : \zeta \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad \mathrm{Re}(\Lambda) \geq -\frac{\widehat{\alpha}}{3}\right\}$,

$$\begin{aligned}
\left\| W(\Lambda)^{-1} S^{(\gamma)}(\Lambda) \right\| &= \left\| W(\Lambda)^{-1} \left(\mathcal{K}^{(0)}(\Lambda) - \mathcal{K}^{(\gamma)}(\Lambda)\right) \right\| \\
&= \left\| W(\Lambda)^{-1} \right\| \left\| \mathcal{K}^{(0)}(\Lambda) - \mathcal{K}^{(\gamma)}(\Lambda) \right\| \\
&\leq \left(\sup_{\Omega} \left| m^{(\gamma)}(\Lambda, \zeta) - m^{(0)}(\Lambda, \zeta) \right| \|\Theta\|_\infty \right) \left\| W(\Lambda)^{-1} \right\|.
\end{aligned}$$

Dado que $\sup_\Omega \left|m^{(\gamma)}(\Lambda,\zeta) - m^{(0)}(\Lambda,\zeta)\right| \to 0^+$ y que $W(\Lambda)$ es invertible para todo $\Lambda \in \Gamma$, se tiene que para $\gamma > 0$, pero suficientemente pequeño,

$$\left(\sup_\Omega \left|m^{(\gamma)}(\Lambda,\zeta) - m^{(0)}(\Lambda,\zeta)\right| \|\Theta\|_\infty\right) \left\|W(\Lambda)^{-1}\right\| < 1. \qquad \checkmark$$

Por tanto, para $0 < \gamma$ suficientemente pequeño, los operadores W y $S^{(\gamma)}$ satisfacen las hipótesis del Teorema de Rouché Generalizado 3.2 sobre cualquier curva de Jordan $\Gamma \subset U$ tal que $0 \notin \Gamma$. En consecuencia, $W^{(\gamma)}(\cdot) = W(\cdot) + S^{(\gamma)}(\cdot)$ es normal con respecto a $\Gamma \subset U$ tal que $0 \notin \Gamma$ y

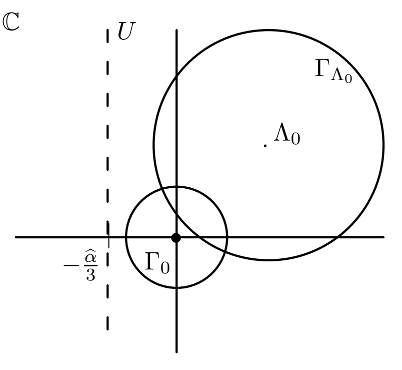
$$M\left(\Gamma; W^{(\gamma)}(\cdot)\right) = M(\Gamma; W(\cdot)).$$

Es decir, la multiplicidad algebraica de $W(\cdot)$ relativa a la curva de Jordan Γ es igual a la multiplicidad algebraica de $W^{(\gamma)}(\cdot)$ relativa a la curva de Jordan Γ.

Denotemos por Γ_0 cualquier curva de Jordan alrededor de cero. Por el Corolario 4.1 se sabe que $\Lambda = 0$ es un valor propio de multiplicidad algebraica 2, por tanto

$$M(\Gamma_0; W(\cdot)) = 2 = M\left(\Gamma_0; W^{(\gamma)}(\cdot)\right).$$

En consecuencia, como $\lambda = \frac{1}{2}\gamma^3\Lambda$, entonces $\lambda = 0$ es un valor propio de multiplicidad algebraica 2 para el problema de valor propio (22).



Supongamos ahora que existe un valor propio Λ_0 de $W^{(\gamma)}(\Lambda)$, tal que $\Lambda_0 \neq 0$ y $\mathrm{Re}(\Lambda_0) \geq -\frac{\widehat{\alpha}}{3}$. Sea $\Gamma_{\Lambda_0} = \{\Lambda \in \mathbb{C} : |\Lambda - \Lambda_0| = \delta_0\} \subset U$, de tal forma que 0 no esté en Γ_{Λ_0}, ni en el interior de él. Esto implica que $M\left(\Gamma_{\Lambda_0}; W^{(\gamma)}(\cdot)\right) \geq 1$.

Dado que el único valor propio Λ asociado con la ecuación KdV (30) con $\mathrm{Re}(\Lambda) \geq -\frac{\widehat{\alpha}}{3}$ es $\Lambda = 0$, se tiene una contradicción, pues $M\left(\Gamma_{\Lambda_0}; W^{(\gamma)}(\cdot)\right) = M(\Gamma_{\Lambda_0}; W(\cdot)) = 0$. Por consiguiente, $\Lambda = 0$ es el único valor propio de $W^{(\gamma)}(\Lambda)$ con $\mathrm{Re}(\Lambda) \geq -\frac{\widehat{\alpha}}{3}$. Esto implica que si $\Lambda \neq 0$ con $\mathrm{Re}(\Lambda) \geq -\frac{\widehat{\alpha}}{3}$, entonces el problema (28) no tiene solución trivial tal que $\|H\|_{\widehat{\alpha}}$ sea finita. En consecuencia, como $\lambda = \frac{1}{2}\gamma^3\Lambda$ y $a = \gamma\widehat{\alpha}$, obtenemos que $\mathrm{Re}(\lambda) \geq -a\gamma^2/6$. Por tanto, para $b = a\gamma^2/6$ tenemos que el problema (22) no tiene solución trivial tal que $\|h\|_a$ sea finita, siempre que $\lambda \neq 0$ con $\mathrm{Re}(\lambda) \geq -b$. ☑

Referencias

[1] Lars V. Ahlfors, *Análisis de variable compleja*, McGraw-Hill Book Company, Madrid, 1966.

[2] G. Arenas, *Valores propios de la linealización de una ecuación tipo Boussinesq, vía el teorema generalizado de Rouché*, Tesis de Maestría, Universidad del Valle, Cali, 2003.

[3] I.C. Gohberg & E.I. Sigal, "An Operator Generalization of the Logarithmic Residue Theorem and the Theorem of Rouché", *Mat. Issled.* Vol. 13, No. 4, 603-625, (1971).

[4] R. Pego & M. Weinstein, "Asymptotic Stabilities of Solitary Waves", *Phil. Trans. Roy. Soc.* London A340: 305-349, (1994).

[5] R. Pego & M. Weinstein, "Convective Linear Stability of Solitary Waves for Boussinesq Equation", *AMS*, No. 99, 311-375, (1997).

[6] J.R. Quintero & G. Arenas, "The Eigenvalue Problem for Solitary Waves of a Boussinesq Equation, via a Generalization of the Rouché Theorem", *Applicable Analysis*, Vol. 83, No. 12, 1211–1228, (2004).

Gilberto Arenas Díaz
Escuela de Matemáticas
Universidad Industrial de Santander
Bucaramanga, Colombia, A.A. 678
e-mails: garenasd@uis.edu.co, garenasd@yahoo.com