

Un método numérico híbrido para capturar los choques en leyes de conservación escalares

ANÍBAL CORONEL*, PATRICIO CUMSILLE,
RODRIGO QUEZADA

Universidad del Bío-Bío, Departamento de Ciencias Básicas, Campus Fernando May, Casilla 447, Chillán, Chile.

Resumen. En este trabajo se estudia numéricamente la aproximación del problema de Cauchy para una ley de conservación escalar, utilizando una técnica mixta que combina los principios de volúmenes finitos y de conjuntos de nivel para capturar con alto orden la solución entrópica a lo largo de las discontinuidades. La ley de conservación se aproxima por un esquema de volúmenes finitos de segundo orden que evita el incremento de la difusión numérica en las discontinuidades incorporando estados fantasmas a ambos lados de las curvas de choque, las cuales son consideradas como una curva implícita que es calculada mediante el método de conjuntos de nivel. Se presentan ejemplos numéricos de aplicación del método híbrido y que ilustran la buenas propiedades de aproximación de este método en los sectores en los cuales existen discontinuidades.

Palabras claves: Discontinuidades, problema de Riemann, conjuntos de nivel.

MSC2000: 76M12, 74S10.

An hybrid numerical method to shock capturing in scalar conservation laws

Abstract. In this paper we study numerically the approximation of the Cauchy problem for a scalar conservation law by using a mixed technique which combines the principles of finite volume and level sets methods to capture with high-order the entropy solution along discontinuities. The conservation law is approximated by a finite volume scheme of second order that prevents the increase of numerical diffusion on discontinuities by incorporating ghosts states on both sides of the shock curves, which are considered as a implicit curve that is computed via the method of level sets. We present some numerical examples with application of the hybrid method and illustrate the high order accuracy belong to shock curves.

Keywords: Discontinuities, Riemann problem, level sets.

* Autor para correspondencia: *E-mail:* acoronel@ubiobio.cl
Recibido: 10 septiembre de 2010, aceptado: 29 octubre de 2010.

1. Introducción

En este artículo estamos interesados en la aproximación numérica del problema de Cauchy asociado a una ley de conservación escalar, es decir:

$$u_t + (f(u))_x = 0, \quad (x, t) \in Q_T := \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

donde $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es llamada la función de flujo y u la cantidad conservada. En las aplicaciones más usuales $u = u(x, t)$ denota la concentración o la densidad en la posición x y en el tiempo t de la cantidad conservada. En la segunda mitad del siglo XX, el desarrollo de la teoría matemática para el análisis del problema (1)-(2) recibió un fuerte impulso y atención debido fundamentalmente a los trabajos de C. Dafermos [4], K. Kružíkov [9], P. Lax [10] y O. Oleinik [14]; para una revisión completa ver las notas históricas del libro del Prof. C. Dafermos [4]. En la actualidad, la teoría de existencia, unicidad y estabilidad de soluciones puede considerarse como un tema completo. Sin embargo, la construcción de métodos numéricos robustos y su análisis teórico siguen siendo áreas con gran actividad y donde aún existen muchos problemas abiertos tales como pruebas teóricas de convergencia y estimaciones de error.

El estudio de (1)-(2) es frecuentemente abordado desde la óptica de la teoría de las características. Siguiendo este enfoque se puede deducir, formalmente, que la solución es constante a lo largo de las curvas características, las cuales son rectas. Sin embargo, esto solamente se puede justificar de manera global para el caso de leyes de conservación con flujo lineal y con velocidad constante, pero para las funciones de flujo no lineal este fenómeno es solamente local y la estructura global de la solución es compleja, lo cual llevó a C. Dafermos a introducir el concepto de Características Generalizadas [3, 4]. El aspecto relevante de mirar a las leyes de conservación mediante la teoría de las características es el hecho de que queda clara la formación de las ondas. Para el caso en el cual la función de flujo es convexa se forman dos tipos de ondas elementales: ondas de choque y ondas de rarefacción. En el caso que f sea no convexa está la posibilidad de la aparición de un tercer tipo de onda elemental, llamada discontinuidad de contacto. Las apariciones de ondas de choque y de las discontinuidades de contacto, independientemente de las condiciones de regularidad de los coeficientes y de la condición inicial, justifican la introducción del concepto de solución débil en el sentido variacional. Para precisar, se define como solución débil de (1)-(2) una función $u \in L^1(Q_T)$ tal que

$$\iint_{Q_T} (u\varphi_t + f(u)\varphi_x)(x, t) dx dt + \int_{\mathbb{R}} u_0(x)\varphi(x, 0) dx = 0, \quad \forall \varphi \in C_0^1(Q_T). \quad (3)$$

Además, es posible demostrar que las discontinuidades de las soluciones débiles satisfacen una condición de salto, denominada condición de Rankine-Hugoniot, esto es: si C es una curva a lo largo de la cual la solución débil u de (1)-(2) es discontinua y está parametrizada de la siguiente por $(X(t), t)$, entonces

$$[u]s = [f(u)], \quad s = \frac{dX}{dt}, \quad [u] = u_l - u_r, \quad [f(u)] = f(u_l) - f(u_r), \quad (4)$$

donde u_r y u_l son los valores de u evaluados a la derecha e izquierda de C , respectivamente. A s se la llama, naturalmente, la velocidad de propagación de la discontinuidad. Inmediatamente después de definir las soluciones débiles en el sentido de (3), se observa que existen soluciones débiles que físicamente no son admisibles, es decir que no poseen un coherente significado físico, pero que sí satisfacen la condición (4). Además, la sola imposición de (4) lleva al problema de que matemáticamente se pierde la unicidad de soluciones débiles (ver ejemplos en [18]). La superación de esta dificultad implicó la introducción del concepto de soluciones débiles entrópicas, o simplemente soluciones entrópicas. En este contexto, y en términos generales, la entropía representa una condición adicional a la formulación integral y que es capaz de seleccionar la única solución matemática que es físicamente admisible.

Los conceptos de soluciones entrópicas han sido originados siguiendo distintos enfoques. Sin embargo, una forma unificada de explicarlo es siguiendo el camino físico natural, es decir, recordando que la ecuación (1) es obtenida como modelo al desprestigiar la influencia de la viscosidad. Así, para recuperar la solución de (1)-(2) es necesario recurrir a la ecuación

$$u_t + (f(u))_x = \epsilon u_{xx}, \quad (x, t) \in Q_T := \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \quad (5)$$

donde $\epsilon > 0$ representa un parámetro suficientemente pequeño. Según este enfoque, llamado método de pseudoviscosidad, las soluciones débiles de (1)-(2) son interpretadas como límites de las soluciones débiles de (5)-(2) cuando el término disipativo ϵu_{xx} se anula ($\epsilon \rightarrow 0^+$). Para una discusión detallada de las funciones de entropía consultar [11, 12, 18]. La más básica condición de entropía es la introducida por P. Lax [10], que establece lo siguiente: Se dice que u es una solución entrópica de (1)-(2) si la velocidad de propagación de la discontinuidad, definida en (4), satisface la desigualdad

$$f'(u_l) > s > f'(u_r). \quad (6)$$

Suponiendo que f es convexa se logra demostrar que la solución entrópica según esta noción es única. La versión análoga de (6) y que permite incluir el caso de

flujos no convexos fue introducida por O. Oleinik [14], y es la siguiente: Se dice que u es una solución entrópica de (1)-(2) si la velocidad de propagación de la discontinuidad, definida en (4), satisface la desigualdad

$$\frac{f(u) - f(u_l)}{u - u_l} \geq s \geq \frac{f(u) - f(u_r)}{u - u_r}, \quad \text{para todo } u \text{ entre } u_l \text{ y } u_r. \quad (7)$$

Para el caso de flujo fuertemente convexo, (7) se reduce a (6). La noción de solución entrópica en un contexto más amplio fue desarrollada por S.N. Kružkov [9] y se enuncia de la siguiente manera: Se dice que u es una solución entrópica de (1)-(2) si para toda función convexa E y toda función F tal que $F' = E' f'$, se satisface la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned} \iint_{Q_T} (\phi_t E(u) + \phi_x F(u))(x, t) dx dt \\ + \int_{\mathbb{R}} E(u_0(x)) \phi(x, 0) dx \leq 0, \quad \forall \phi \in C_0^1(Q_T), \quad \phi \geq 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Bajo la noción (8), es posible demostrar la unicidad de la solución, suponiendo que el flujo es una función de Lipschitz y la condición inicial está en $L^\infty(\mathbb{R}) \cap BV(\mathbb{R})$.

Los métodos numéricos clásicamente utilizados y desarrollados para aproximar ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de otro tipo (tales como elípticas o parabólicas) al ser aplicados para calcular soluciones numéricas de (1)-(2) necesitan la incorporación de propiedades adicionales, que en variadas ocasiones resuelven situaciones particulares y que en general tienen una gran dificultad en la aproximación de las discontinuidades de las soluciones entrópicas. Estas dificultades impulsaron el desarrollo del método de volúmenes finitos, los cuales son métodos numéricos con elementos propios para las leyes de conservación, y cuyo principio fundamental es que respetan la conservación y la condición de entropía a nivel discreto (ver [6, 11, 12, 13]). A menudo estos métodos son conocidos como métodos para capturar los choques (*shock-capturing methods*), en el sentido de que aproximan coherentemente las discontinuidades. Para precisar, sea $[k_1, k_2[\subset \mathbb{R}$ un volumen de control, con interfaces k_1 y k_2 , y sea $[\tau_1, \tau_2[\subset \mathbb{R}_0^+$ un intervalo de evolución temporal. Integrando (1) sobre $K = [k_1, k_2[\times [\tau_1, \tau_2[$, tenemos

$$\begin{aligned} \int_{k_1}^{k_2} u(x, \tau_2) dx - \int_{k_1}^{k_2} u(x, \tau_1) dx \\ + \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(u(k_2, t)) dt - \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(u(k_1, t)) dt = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Una suposición básica del método de volúmenes finitos consiste en dar por sentado que la solución es constante sobre K , y por ende que es constante por tramos sobre todo el dominio computacional. Así, las dos primeras integrales en (9) se pueden aproximar aplicando el promedio, pero las dos segundas integrales carecen de sentido, dado que la solución numérica es construida como discontinua en las interfaces. El problema de dar sentido a las dos segundas integrales de (9) lleva a la introducción del concepto de flujo numérico, como una función $g : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} f(u(k_i, t)) dt = \frac{1}{\tau_2 - \tau_1} g(v_1, \dots, v_k) := \frac{1}{\tau_2 - \tau_1} g_{k_i}^{\tau_1}, \quad (10)$$

donde v_i son valores de u en tiempo τ_1 . En consecuencia, de (9) y (10), y suponiendo que la solución numérica en tiempo τ_1 es conocida, se tiene que la aproximación por volúmenes finitos de (1) sobre K está dada por

$$\bar{u}(\cdot, \tau_2) = \bar{u}(\cdot, \tau_1) - \frac{k_2 - k_1}{\tau_2 - \tau_1} \left(g_{k_2}^{\tau_1} - g_{k_1}^{\tau_1} \right). \quad (11)$$

El esquema (11) se utiliza como base para la construcción de los esquemas explícitos. Los esquemas de volúmenes finitos generales necesitan tres hipótesis básicas para la convergencia: la consistencia con la ley de conservación, la conservatividad y la consistencia con la condición de entropía. La conservatividad del esquema (11) se da de manera natural por la construcción basada en la forma integral de la ley de conservación (1) (ver [6] para los detalles). La consistencia de (11) con la ley de conservación (1) requiere la siguiente condición adicional sobre el flujo: g debe ser una función localmente de Lipschitz y tal que $g(v, \dots, v) = f(v)$, para todo $v \in \mathbb{R}$. La consistencia con la condición de entropía requiere la introducción de una condición de entropía discreta sobre K , lo cual se satisface para los esquemas de volúmenes finitos de la forma (11) imponiendo hipótesis sobre g (por ejemplo monotonía). Para los detalles ver [5, 6].

El estudio desarrollado para los métodos de volúmenes finitos de la forma (11) y de primer orden tienen un buen comportamiento en ausencia de discontinuidades. Sin embargo, en las proximidades de estas fallan, pues inevitablemente las aproximaciones numéricas se suavizan presentando una alta difusión numérica. Considerando que los métodos de primer orden presentaban una estimación pobre en los entornos de los saltos, fue que se hizo necesario introducir métodos de orden superior. La principal dificultad al incrementar el orden es la aparición de oscilaciones, dado que una de las propiedades que se pierden es la monotonicidad. Es así natural buscar esquemas de alto orden pero que aproximen las discontinuidades sin

oscilaciones, entre los cuales aparecen los métodos denominados *esencialmente no oscilatorios* (ENO) [7], que otorgan mejores resultados que los métodos de primer orden. Los métodos ENO han sido de bastante utilidad para aquellos problemas que consideran complicadas estructuras de solución suave, como por ejemplo, las simulaciones de turbulencias compresibles y las simulaciones de aeroacústica [8].

Por otro lado, y en un contexto diferente, el método del conjunto de nivel fue introducido por S. Osher y J. A. Sethian en [15]. La introducción de esta técnica fue motivada por el cálculo de una superficie implícita que modela, por ejemplo, la interfaz entre dos fluidos inmiscibles. Sin embargo en la actualidad esta técnica es utilizada con éxito en diversas aplicaciones. Aplicando razonamientos de tipo geométrico, se puede mostrar que una superficie implícita que separa dos estados puede ser modelada como una ecuación de transporte (ver ecuación (22)). La solución numérica de esta ecuación no conservativa se puede obtener por métodos de volúmenes finitos similares a los utilizados para aproximar las leyes de conservación (para detalles ver [15] y la sección 2.2).

El propósito de este trabajo es considerar la curva implícita del método de conjuntos de nivel como la curva de choque de la ley de conservación escalar. En otras palabras, y siguiendo las ideas de Aslam [1, 2], se considera que la curva de choque está dada de manera implícita y es determinada mediante la ecuación de conjuntos de nivel, y los estados separados por esta interfaz corresponden, por un lado, a estados verdaderos de la solución entrópica de (1)-(2), y por otro lado, a estados fantasmas que son utilizados formalmente, tanto para efectos de cálculo como para la justificación teórica del método.

En este trabajo se consideran nuevos ejemplos numéricos que muestran resultados de alta exactitud en la captura de los choques, a pesar de considerar métodos de orden inferior a los de alta resolución utilizados por Aslam [1, 2]. Además, se resalta la presentación sistemática y didáctica del método híbrido.

El trabajo se encuentra organizado de la siguiente manera. En la sección 2 se presentan el método de volúmenes finitos y el método de conjuntos de nivel. En la sección 3 se presenta el método híbrido: volúmenes finitos-conjuntos de nivel. En la sección 4 se presentan los resultados numéricos de la aplicación del método. Finalmente en la sección 5 se resumen algunas conclusiones y perspectivas.

2. Métodos numéricos

2.1. Método de volúmenes finitos

Los principios bajo los cuales se hace la aproximación por volúmenes finitos pueden ser consultados en [5, 13]. A continuación se detallan la notación y los aspectos más relevantes necesarios para la sección 3. En espacios de una dimensión [12], un método de volumen finito parte considerando la subdivisión del dominio espacial en intervalos (celdas computacionales o volúmenes de control). Es así que se considera $x_{i-1/2} := (i-1/2)\Delta x$ como las interfaces de la i -ésima celda $C_i = (x_{i-1/2}, x_{i+1/2})$ con tamaño o longitud constante $\Delta x = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$. Entonces, para cada celda C_i y para cada nivel de tiempo $t_n := n\Delta t$, se denota por u_i^n la aproximación del valor promedio de u sobre C_i en t_n , o sea:

$$u_i^n \approx \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(x, t_n) dx \equiv \frac{1}{\Delta x} \int_{C_i} u(x, t_n) dx. \quad (12)$$

Los tamaños de pasos Δx y Δt deben satisfacer una restricción de tipo CFL, que compatibiliza la resolución del método numérico con la naturaleza física de la ley de conservación (ver ecuación (27)). Con esta notación, (11) se puede escribir de la siguiente manera:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \lambda \left(F_{i+1/2}^n - F_{i-1/2}^n \right), \quad \lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x}, \quad F_{i+1/2}^n = g_{x_{i+1/2}}^{t_n}. \quad (13)$$

La diferencia entre los distintos métodos de volúmenes finitos radica en la función que se considera como flujo numérico. A continuación se describen los casos que serán considerados en el presente trabajo.

Método Upwind para flujos lineales

Los esquemas *Upwind* se desarrollaron para incorporar a los esquemas numéricos propiedades de los fenómenos físicos, como las propiedades de contraviento y contracorriente, esquemas descentrados que sacan provecho de la información que otorgan las características, para que los nodos utilizados en el cálculo de las derivadas espaciales involucren la información del dominio, que a la vez influye sobre cada punto de cálculo. Consideremos que el flujo es de la forma $f(u) = au$, donde a es la velocidad de propagación de la cantidad conservada u (a constante). Dependiendo del signo de la velocidad, es posible utilizar algunos esquemas de volúmenes finitos del tipo Godunov [11] para dar solución al problema. En este

caso el flujo numérico se escoge como

$$F_{i+1/2}^n(u_i^n, u_{i+1}^n) = \begin{cases} au_i^n, & a > 0, \\ au_{i-1}^n, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (14)$$

Para efectos de la implementación, y para considerar los dos signos de a , se define $a^+ = (a + |a|)/2$ y $a^- = (a - |a|)/2$. Reemplazando (14) en el esquema (13), obtenemos:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - a^+ \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_i^n - u_{i-1}^n) - a^- \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_{i+1}^n - u_i^n).$$

Este esquema es también conocido como esquema *upwind* o esquema CIR, debido a que fue propuesto en 1952 por Courant, Isaacson y Reeves.

Métodos Esencialmente no Oscilatorios (ENO) de orden 2 para flujos no lineales

Los métodos esencialmente no oscilatorios, fueron introducidos mediante la idea de polinomio de interpolación, por Harten et al. en 1987, para la solución numérica de leyes de conservación (ver [7]). La idea del método es construir un interruptor que se apague en los sectores en donde detecta una discontinuidad (para más información ver [7, 17]). El método ENO de orden 2, que se considera en este trabajo corresponde a un método derivado del método *Upwind* de primer orden, cuya diferencia principal es que este posee un interruptor para aproximar la solución de la ley de conservación mediante términos de segundo orden. En efecto, si se define la función m que juega el papel de la función interruptor mencionada anteriormente de la forma

$$m(x, y) = \begin{cases} x & \text{si } |x| \leq |y|, \\ y & \text{si } |x| > |y|, \\ 0, & \end{cases} \quad \begin{cases} \text{si } xy > 0, \\ \text{si } xy \leq 0, \end{cases} \quad (15)$$

y si además se considera la notación

$$\begin{aligned} D^{-x-x}v_i^n &= \frac{v_i^n - 2v_{i-1}^n + v_{i-2}^n}{\Delta x^2}, \\ D^{+x-x}v_i^n &= \frac{v_{i+1}^n - 2v_i^n + v_{i-1}^n}{\Delta x^2}, \\ D^{+x+x}v_i^n &= \frac{v_{i+2}^n - 2v_{i+1}^n + v_i^n}{\Delta x^2}, \end{aligned}$$

es posible definir el paso temporal del esquema ENO de orden 2 como

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \lambda^+ \left(f(u_i^n) - f(u_{i-1}^n) + \frac{\Delta x}{2} m(D^{-x-x} f(u_i^n), D^{+x-x} f(u_i^n)) \right) - \lambda^- \left(f(u_{i+1}^n) - f(u_i^n) - \frac{\Delta x}{2} m(D^{+x+x} f(u_i^n), D^{+x-x} f(u_i^n)) \right), \quad (16)$$

donde $\tau = \text{sgn}(f'(u_i^n))$, $\lambda^+ = \lambda\tau^+$ y $\lambda^- = \lambda\tau^-$. Aquí la notación τ^\pm corresponde a las partes positiva y negativa de τ .

Método WENO de orden 5

Con el fin de poder comparar la eficacia del método híbrido volúmenes finitos-conjunto de nivel, hemos tenido que utilizar un método WENO (Weighted Essentially Non-Oscillatory), o método ENO con pesos, de orden 5, puesto que en ciertos ejemplos el método ENO de orden 2 introducido en la subsección previa no funciona tan bien como el que describiremos a continuación.

Para este caso, primeramente se considera la notación \mathbf{u}^n para el vector de todas que contiene la información de la variable de estado en el nivel de tiempo t_n , es decir

$$\mathbf{u}^n = (u_0^n, u_1^n, u_2^n, \dots, u_{J+1}^n).$$

En este caso se tiene que considerar un dominio espacial computacional finito dividido en N_x celdas. Apoyándose en el método Runge-Kutta, es posible definir un método de volúmenes finitos cuya evolución temporal es como sigue:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_* &= \mathbf{u}^n + \Delta t L(\mathbf{u}), \\ \mathbf{u}_{**} &= \frac{3}{4}\mathbf{u}^n + \frac{1}{4}\mathbf{u}_* + \frac{1}{4}\Delta t L(\mathbf{u}_*), \\ \mathbf{u}^{n+1} &= \frac{1}{3}\mathbf{u}^n + \frac{2}{3}\mathbf{u}_{**} + \frac{2}{3}\Delta t L(\mathbf{u}_{**}), \end{aligned}$$

donde L corresponde a un operador de diferencias espaciales definido en término del flujo numérico como

$$L(\mathbf{u}^n) = -\frac{1}{\Delta x} \left(\bar{f}_{i+1/2}(\mathbf{u}^n) - \bar{f}_{i-1/2}(\mathbf{u}^n) \right),$$

donde $\bar{f}_{i+1/2}$ y $\bar{f}_{i-1/2}$ son los flujos numéricos en $x_{j+1/2}$ y $x_{j-1/2}$, respectivamente. El flujo numérico utilizado en el presente trabajo se define como

$$\bar{f}_{i+1/2}(\mathbf{u}^n) = \bar{f}_i^+(\mathbf{u}^n) + \bar{f}_{i+1}^-(\mathbf{u}^n), \quad (17)$$

donde

$$\bar{f}_i^+(\mathbf{u}^n) = \text{weno5}(f_{i-2}^+(\mathbf{u}^n), f_{i-1}^+(\mathbf{u}^n), f_i^+(\mathbf{u}^n), f_{i+1}^+(\mathbf{u}^n), f_{i+2}^+(\mathbf{u}^n)), \quad (18)$$

$$\bar{f}_{i+1}^-(\mathbf{u}^n) = \text{weno5}(f_{i+3}^-(\mathbf{u}^n), f_{i+2}^-(\mathbf{u}^n), f_{i+1}^-(\mathbf{u}^n), f_i^-(\mathbf{u}^n), f_{i-1}^-(\mathbf{u}^n)), \quad (19)$$

$$f_i^\pm(\mathbf{u}^n) = \frac{1}{2}(f(u_i^n) \pm \alpha u_i^n), \quad \alpha = \max(|f'(u_i^n)|, |f'(u_i^{n+1})|). \quad (20)$$

La acción de la función $\text{weno5} : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}$ se define así:

$$\text{weno5}(a, b, c, d, e) = \frac{a_1 q_1 + a_2 q_2 + a_3 q_3}{a_1 + a_2 + a_3}, \quad (21)$$

donde

$$\begin{aligned} q_1 &= (2a - 7b + 11c)/6, & q_2 &= (-b + 5c + 2d)/6, & q_3 &= (c + 5d - e)/6, \\ a_1 &= (\epsilon + \sigma_1)^{-2}, & a_2 &= 6(\epsilon + \sigma_2)^{-2}, & a_3 &= 3(\epsilon + \sigma_3)^{-2}; \end{aligned}$$

el valor que se considera para ϵ es aproximado a 10^{-6} , y σ_1, σ_2 y σ_3 , llamados los índices de suavidad de la función de flujo, son calculados como

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 13(a - 2b + c)^2 + 3(a - 4b + 3c)^2, \\ \sigma_2 &= 13(b - 2c + d)^2 + 3(d - b)^2, \\ \sigma_3 &= 13(c - 2d + e)^2 + 3(3c - 4d + e)^2. \end{aligned}$$

2.2. Método numérico para la evolución de la curva de choque

Para calcular numéricamente la evolución de la onda de choque, la cual geométricamente la podemos representar como una interfaz, en donde la solución de la ley de conservación experimenta una discontinuidad, hemos utilizado un método implícito, en el sentido de que el movimiento de la interfaz no es directamente calculado. El método que utilizamos es el así llamado *método del conjunto de nivel*, el cual fue introducido por S. Osher y J. A. Sethian [15]. La idea original de este método es la siguiente: dada una interfaz Γ de codimensión 1 en \mathbb{R}^d (una superficie en \mathbb{R}^3 , o una curva en \mathbb{R}^2), acotando una región Ω , el propósito es calcular y analizar la dinámica de Γ bajo un campo de velocidades \mathbf{v} . Esta velocidad puede depender de la posición, del tiempo, de la geometría de la interfaz y de la física externa. Por ejemplo, en nuestro caso, la velocidad corresponde a la velocidad de choque $s(x, t)$ (velocidad de propagación de la discontinuidad) de la solución de la ley de conservación. La idea central del método del conjunto de nivel es definir una función suave (al menos Lipschitziana) $\psi(x, t)$, llamada *función del conjunto*

de nivel, de modo que represente la interfaz como el conjunto donde $\psi(x, t) = 0$. Esta función tiene las siguientes propiedades (ver figura 2.2):

$$\begin{aligned} \psi(x, t) &< 0, & \text{para } x \in \Omega_1(t), \\ \psi(x, t) &= 0, & \text{para } x \in \Gamma(t), \\ \psi(x, t) &> 0, & \text{para } x \in \Omega_2(t). \end{aligned}$$

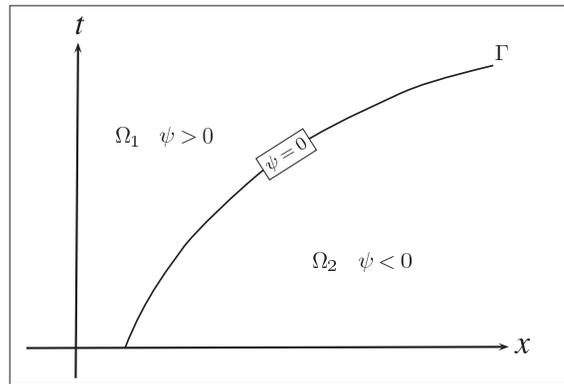


Figura 1. Esquema para el modelo de captura de las discontinuidades

Por lo tanto, la interfaz se captura para todos los tiempos, localizando el conjunto $\Gamma(t)$ para el cual ψ se anula. Esta idea es de gran importancia para el cálculo numérico, porque los cambios topológicos tales como quiebre y fusión son bien definidas y fácilmente realizadas por este método.

El movimiento de la interfaz es analizado transportando los valores ψ (los conjuntos de nivel de ψ) con el campo de velocidades s . La ecuación que modela esta situación es

$$\psi_t + s\psi_x = 0. \tag{22}$$

Agregamos una condición inicial, la cual representa implícitamente la interfaz inicial (i.e., el conjunto de nivel cero de la función conjunto de nivel inicial corresponde a la interfaz inicial). La ecuación precedente puede resolverse numéricamente utilizando métodos numéricos para leyes de conservación, los cuales describimos a continuación.

Consideremos el dominio computacional $[a, b]$, el cual corresponde al dominio donde varía la variable espacial x . Introducimos una malla cartesiana con tamaño de paso Δx , i.e., definimos el conjunto discreto de puntos x_i como

$$x_i = a + i\Delta x, \quad i = 0, \dots, N_x, \quad \text{donde } \Delta x = \frac{b - a}{N_x}.$$

Una vez que ψ y s son definidos en cada punto de la malla, debemos aplicar métodos numéricos para evolucionar ψ hacia adelante en el tiempo moviendo la interfaz a través de la malla. En algún punto en el tiempo, digamos t_n , $\psi^n(x) = \psi(x, t_n)$ representa los actuales valores de ψ . Actualizar ψ en el tiempo consiste en encontrar los nuevos valores de ψ en cada punto de la malla después de un cierto incremento temporal Δt . Denotamos estos nuevos valores de ψ por $\psi^{n+1}(x) = \psi(x, t_{n+1})$, donde $t_{n+1} = t_n + \Delta t$. Un método simple, de primer orden de exactitud, para la discretización de la ecuación (22) es el método de Euler dado por:

$$\frac{\psi^{n+1} - \psi^n}{\Delta t} + s^n \psi_x^n = 0, \quad (23)$$

donde s^n es el campo de velocidades en el tiempo t_n , y ψ_x^n evalúa la derivada espacial utilizando los valores de ψ en el tiempo t_n .

En principio, uno podría evaluar la derivada espacial de ψ en una manera directa utilizando alguna de las siguientes fórmulas:

$$(\psi_x)_i \approx D^+ \psi \equiv \frac{\psi_{i+1} - \psi_i}{\Delta x}, \quad (24)$$

$$(\psi_x)_i \approx D^- \psi \equiv \frac{\psi_i - \psi_{i-1}}{\Delta x}, \quad (25)$$

$$(\psi_x)_i \approx D^0 \psi \equiv \frac{\psi_{i+1} - \psi_{i-1}}{2\Delta x}. \quad (26)$$

Estas fórmulas son conocidas como fórmula de diferencia hacia adelante, hacia atrás y centrada, respectivamente. Desafortunadamente, esta discretización directa fallará. Generalmente se requiere gran cuidado en la discretización de ecuaciones diferenciales parciales. En la ecuación (23) debemos entonces discretizar de la manera apropiada el término $s^n \psi_x^n$. Notemos que el signo de s^n indica si los valores de ψ^n se están moviendo hacia la derecha o hacia la izquierda. Como s^n puede variar en espacio, nos concentramos en un punto específico x_i de la malla, en el cual escribimos

$$\frac{\psi_i^{n+1} - \psi_i^n}{\Delta t} + s_i^n (\psi_x^n)_i = 0.$$

Si $s_i^n > 0$, los valores de ψ^n se están moviendo de izquierda a derecha, y entonces tenemos que mirar hacia la izquierda de x_i para determinar una aproximación apropiada para ψ_x^n en x_i . Similarmente, si $s_i^n < 0$, los valores de ψ^n se están moviendo de derecha a izquierda, y entonces tenemos que mirar hacia la derecha de x_i para determinar una aproximación adecuada para ψ_x^n . Claramente, $D^- \psi^n$ (ver ecuación (25)) debería ser utilizada para aproximar ψ_x^n cuando $s_i^n > 0$. Por

el contrario, $D^+\psi^n$ no dará una buena aproximación, ya que no toma en cuenta la información que hay hacia la izquierda de x_i que dicta el nuevo valor de ψ_i^n . Un razonamiento similar indica que $D^+\psi^n$ debería utilizarse para aproximar ψ_x^n cuando $s_i^n < 0$. Este método de elegir una aproximación para la derivada espacial de ψ^n basado en el signo de s^n es conocido como “método aguas arriba”. Generalmente, los métodos aguas arriba aproximan las derivadas utilizando la fórmula de diferencia finita en la dirección de donde la información está llegando.

Resumimos la discretización aguas arriba como sigue. En cada nodo de la malla, se define ψ_x^- como $D^-\psi$ y ψ_x^+ como $D^+\psi$. Si $s_i > 0$, y se aproxima ψ_x con ψ_x^- . Si $s_i < 0$, se aproxima ψ_x con ψ_x^+ . Cuando $s_i = 0$, el término $s_i(\psi_x)_i$ se anula, y ψ_x no necesita ser aproximado. Esta es una discretización de primer orden de exactitud para el operador espacial, ya que $D^-\psi$ y $D^+\psi$ son aproximaciones de primer orden de exactitud de la derivada ψ_x .

La combinación de la discretización temporal mediante el método de Euler con el esquema aguas arriba es un aproximación por diferencias finitas *consistente* para la ecuación (22), ya que el error de aproximación converge a cero cuando $\Delta t \rightarrow 0$ y $\Delta x \rightarrow 0$. De acuerdo a un resultado clásico, se obtiene la solución correcta cuando $\Delta t \rightarrow 0$ y $\Delta x \rightarrow 0$ si y solamente si el esquema es consistente y *estable*. La estabilidad garantiza que pequeños errores en la aproximación no sean amplificados cuando la solución evoluciona en el tiempo. La estabilidad puede forzarse utilizando la condición Courant-Friedrichs-Lewy (condición CFL), la cual establece que las ondas numéricas deberían propagarse al menos tan rápido como las ondas físicas. Esto significa que la velocidad de onda numérica de $\Delta x/\Delta t$ debe ser al menos tan rápida como las velocidad de onda física $|s|$, i.e., $\Delta x/\Delta t > |s|$. Esto nos conduce a la *restricción del paso temporal CFL*,

$$\Delta t < \frac{\Delta x}{\max |s|}, \quad (27)$$

donde $\max |s|$ es elegido como el valor más grande de $|s|$ sobre la malla cartesiana completa.

Infortunadamente, el método aguas arriba introduce difusión numérica, esto es, la solución numérica producida por este método es más suave de lo que realmente debería [13], y entonces la interfaz podría ser capturada de manera no tan optimal. Para vencer esta dificultad, Harten et al. [7] introdujeron la idea de interpolación polinomial esencialmente no oscilatoria (ENO) para la solución numérica de leyes de conservación. La cuestión básica es construir un interruptor que se apaga por sí solo cuando un choque sea detectado; de otra forma, se usarán aproximaciones

de más alto orden hacia la izquierda y derecha por medio de una interpolante polinomial de orden más alto usando una construcción ENO. El lector interesado en los detalles es referido al artículo de S. Osher y R. Fedkiw [16]. El esquema que nosotros utilizamos es el mismo de antes, pero, esta vez $D^-\psi$ y $D^+\psi$ están dados por

$$D^-\psi = \frac{\psi_i - \psi_{i-1}}{\Delta x} + \frac{\Delta x}{2} m(D^{-x-x}\psi, D^{+x-x}\psi), \quad (28)$$

$$D^+\psi = \frac{\psi_{i+1} - \psi_i}{\Delta x} - \frac{\Delta x}{2} m(D^{+x+x}\psi, D^{+x-x}\psi), \quad (29)$$

donde m es la función interruptor definida por (15) y $D^{-x-x}\psi$, $D^{+x-x}\psi$ y $D^{+x+x}\psi$ son aproximaciones de la derivada segunda ψ_{xx} de ψ dadas por

$$D^{-x-x}\psi = D^-(D^-\psi) = \frac{D^-\psi_i - D^-\psi_{i-1}}{\Delta x} = \frac{\psi_i - 2\psi_{i-1} + \psi_{i-2}}{\Delta x^2},$$

$$D^{+x-x}\psi = D^+(D^-\psi) = \frac{\psi_{i+1} - 2\psi_i + \psi_{i-1}}{\Delta x^2},$$

$$D^{+x+x}\psi = D^+(D^+\psi) = \frac{\psi_{i+2} - 2\psi_{i+1} + \psi_i}{\Delta x^2}.$$

El método así obtenido corresponde a una aproximación de segundo orden de exactitud para ψ_x .

3. El método híbrido

Con la finalidad de capturar eficientemente las discontinuidades que aparecen naturalmente en las leyes de conservación no lineales, Aslam [1] propuso un método que combina las ideas de los volúmenes finitos y de la técnica del conjunto de nivel.

La idea clave para evitar la alta difusión numérica a lo largo de las discontinuidades, en la discretización usual por volúmenes finitos, consiste en representar la solución u por medio de tres funciones del modo siguiente: u se divide en dos estados continuos, u^1 y u^2 , los cuales se pegan justamente en las discontinuidades de u , por medio de la función conjunto de nivel ψ , de forma que la solución u en un punto dado es igual a u^1 o bien a u^2 dependiendo del signo de la función conjunto de nivel ψ en dicho punto, o sea:

$$u(x, t) = \begin{cases} u^1(x, t), & \text{si } \psi(x, t) > 0, \\ u^2(x, t), & \text{si } \psi(x, t) \leq 0. \end{cases} \quad (30)$$

La función conjunto de nivel ψ es continua, y sus ceros están localizados en las discontinuidades de u .

En principio el estado u^1 (resp. u^2) está definido en la zona en donde $\psi > 0$ (resp. $\psi \leq 0$). Para definirlos en todas partes, se extienden continuamente a las zonas complementarias. Una forma de hacerlo es, aprovechando el hecho de que los estados u^1 y u^2 son continuos en sus respectivos dominios, extendiéndolos a todas partes, simplemente utilizando la misma aplicación que los define sobre sus dominios.

La representación (30) y la observación previa dejan claro que tanto u^1 como u^2 son continuas sobre todo el dominio computacional. Sin embargo, la interrogante es cómo calcular estos estados de modo que sigan siendo continuos (al menos a lo largo de las discontinuidades de u), y que u definida por (30) sea la solución entrópica de la ley de conservación (1)-(2). Para ello, en cada paso de la evolución temporal se separa el cálculo en dos etapas. A continuación se detallan estas etapas para pasar de $t = 0$ a $t = \Delta t$. El paso de $t = t_n$ a $t = t_n + \Delta t$ se realiza de la misma manera.

Etapas 1: Cálculo de las funciones que conforman la solución u del problema original. En esta etapa debemos calcular $\psi(x, \Delta t)$, $u^1(x, \Delta t)$ y $u^2(x, \Delta t)$ como las soluciones de los problemas de Cauchy siguientes:

$$\psi_t + s\psi_x = 0, \quad \psi(x, 0) = \psi_0(x), \quad (31)$$

$$(u^1)_t + f(u^1)_x = 0, \quad u^1(x, 0) = u_0^1(x), \quad \text{sobre } \psi_0(x) > 0, \quad (32)$$

$$(u^2)_t + f(u^2)_x = 0, \quad u^2(x, 0) = u_0^2(x), \quad \text{sobre } \psi_0(x) \leq 0, \quad (33)$$

donde s es la velocidad de choque dada por (4), y en donde las condiciones iniciales se definen de acuerdo a la relación (30) evaluada en $t = 0$. En principio, estos problemas de Cauchy se resuelven en la región $\psi_0(x) > 0$ para u^1 y $\psi_0(x) \leq 0$ para u^2 . Sin embargo, por razones de conveniencia numérica, se resuelven en todas partes.

Etapas 2: Reconstrucción de u . En esta etapa debemos reconstruir u mediante la fórmula (30), teniendo cuidado de que ella satisfaga la condición de entropía (6). Estados izquierdo y derecho apropiados para la condición de entropía pueden

ser caracterizados en términos de u^1 , u^2 , y ψ como sigue:

$$u_l = \begin{cases} u^1 & \text{si } \psi_x \leq 0, \\ u^2 & \text{si } \psi_x > 0, \end{cases}$$

$$u_r = \begin{cases} u^1 & \text{si } \psi_x > 0, \\ u^2 & \text{si } \psi_x \leq 0. \end{cases}$$

De este modo la condición de entropía (6) se recharacteriza (para una función de flujo convexa que incluya el caso lineal) como

$$f'(u_l) \geq f'(u_r). \quad (34)$$

La reconstrucción de u es la siguiente: en los nodos en donde $\psi > 0$ y los valores numéricos del estado u^2 son tales que u no satisface la condición de entropía (34), entonces se corrigen dichos valores de u^2 , cambiándolos por los valores de u^1 ; es decir, los valores de u^2 tales que u no satisface (34) se modifican, definiendo $u^2 = u^1$ en dichos nodos. Análogamente, en los nodos en donde $\psi \leq 0$ y los valores numéricos del estado u^1 son tales que u no satisface (34) se modifican, definiendo $u^1 = u^2$ en dichos nodos.

4. Resultados numéricos

A continuación, se presentan algunos resultados obtenidos de la implementación de los algoritmos *Upwind*, ENO de segundo orden y WENO de quinto orden, en contraste con los resultados obtenidos de utilizar los métodos híbridos *Upwind-Level Set* (UP-LS) y *ENO2-Level Set* (E2-LS).

4.3. Leyes de conservación con flujo lineal

Se presentan dos problemas de Cauchy en los que se considera la ecuación de advección lineal con funciones iniciales continuas a tramos. Para efecto de una visualización y distinción de las gráficas, en las simulaciones sólo fueron consideradas una cantidad de 200 nodos espaciales. Una mayor cantidad de nodos espaciales daría resultados aún mejores.

Simulación I

El problema considera la ecuación de advección lineal con una función inicial compuesta de dos estados constantes que generan dos discontinuidades. El flujo

de la ley de conservación es dado por $f(u) = au$ y la velocidad de transporte corresponde $a = 1$. En este ejemplo la condición inicial es dada por

$$u_0(x) = \begin{cases} 1, & -0,5 \leq x \leq 0,5, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (35)$$

El método de las características permite afirmar que el perfil inicial de u se transportará con velocidad a , manteniendo su forma (ver Figura 2).

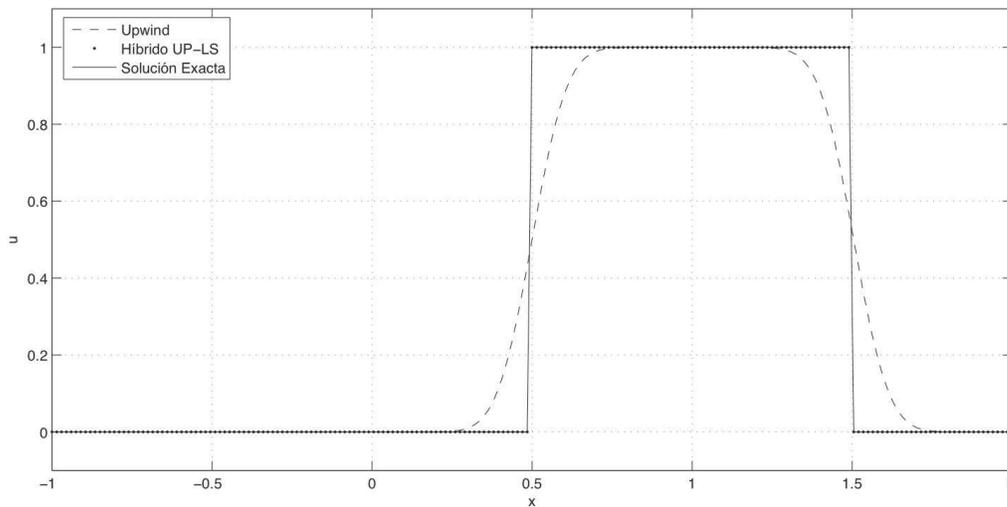


Figura 2. Perfil de la solución u del problema, con una velocidad $s = 1$, en el tiempo $t = 1$. Se comparan los resultados obtenidos por el métodos *Upwind*, el método híbrido UP-LS y la solución exacta. Se considera $N_x = 200$.

El método híbrido de primer orden entrega aproximaciones muy similares a la solución exacta, capturando de excelente forma las discontinuidades en la evolución temporal, no así la solución otorgada por el método *Upwind* tradicional. Por lo tanto, se confirma que para todo problema de Cauchy con funciones iniciales constantes a trozos y con flujo lineal, basta considerar un método híbrido de primer orden para capturar de forma eficiente las discontinuidades y obtener una buena aproximación de la solución u .

Simulación II

Esta prueba considera la ecuación de advección lineal con flujo $f(u) = u/2$ y con una función inicial periódica y discontinua. Más precisamente, consiste en resolver

el problema de Cauchy con condición inicial:

$$u_0(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 + \cos(2\pi x)), & \frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}, \\ \frac{1}{2} + \text{sen}(2\pi x), & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (36)$$

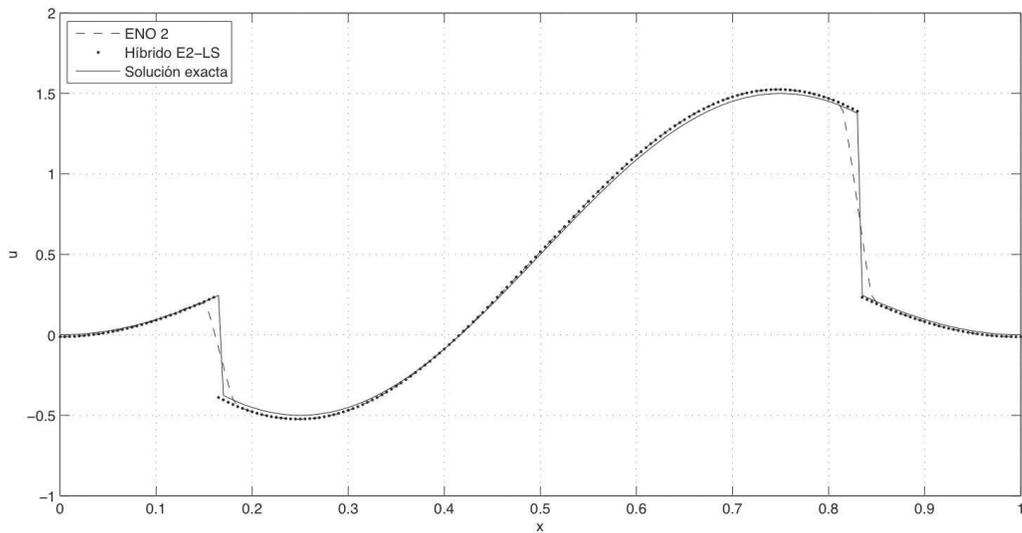


Figura 3. Perfil de u en el instante $t = 1$, con velocidad $s = 0,5$. Comparación de los resultados de los métodos ENO2, híbrido E2-LS y la solución exacta. Se considera $N_x = 200$.

En la Figura 3 se observa cómo el método híbrido no suaviza los resultados en los entornos cercanos a las discontinuidades, en contraste con el no híbrido, capturando eficientemente la propagación de las discontinuidades en la evolución temporal. Lo anterior, se puede verificar mediante la norma del error de aproximación en el tiempo $t = 1$, pues la norma del ENO2 corresponde a 0,9490 y la norma del híbrido E2-LS equivale a 0,6841.

4.4. Leyes de conservación con flujo no lineal

A continuación se desarrollan los mismos problemas considerados para el caso lineal, pero esta vez utilizando la ecuación de Burgers en lugar de la ecuación de advección lineal. Esto permite analizar los resultados del método híbrido en el caso no lineal.

Simulación I

Se considera el problema de Cauchy para la ecuación de Burgers con condición inicial (35). Al igual que en el caso anterior, la solución exacta puede ser determinada analíticamente mediante el método de las características, debido a que la condición inicial es constante a trozos. Lo anterior es independiente de la no linealidad de flujo.

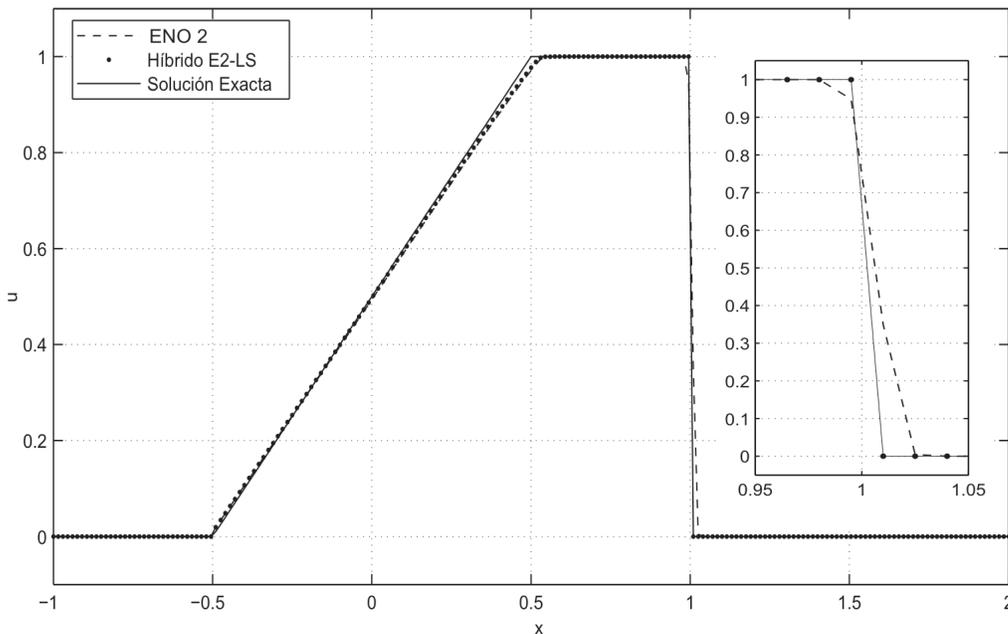


Figura 4. Perfil de u en el instante $t_n = 1$. La figura presenta una comparación de los resultados obtenidos por los métodos ENO de segundo orden, método híbrido ENO2-Level Set y por la solución exacta. Se considera $N_x = 200$.

Por medio de la Figura 4 es posible apreciar cómo el método E2-LS captura mejor el choque que el método ENO2 puro. Por lo tanto, nuevamente el método híbrido de segundo orden otorga mejores resultados que el método no híbrido, lo que se corrobora con la norma de los errores de cada método, pues la norma del error del método híbrido es igual a 0,0685 y la norma del error del método no híbrido que equivale a 0,3666.

Simulación II

En esta última simulación se presenta un problema de Cauchy con flujo de Burgers y con una función inicial (36). Puesto que la condición inicial depende de manera

no lineal sobre x , es complejo determinar analíticamente mediante el método de las características la solución exacta del problema siguiente. Es por ello que en esta simulación utilizamos el método WENO de orden 5, en lugar del método ENO de orden 2, ya que el primero arroja mejores resultados que el segundo, debido a que el problema es no lineal, la condición inicial es discontinua, y presenta más oscilaciones que la condición inicial de la simulación anterior. En este caso, comparamos el método WENO de orden 5 con el método híbrido.

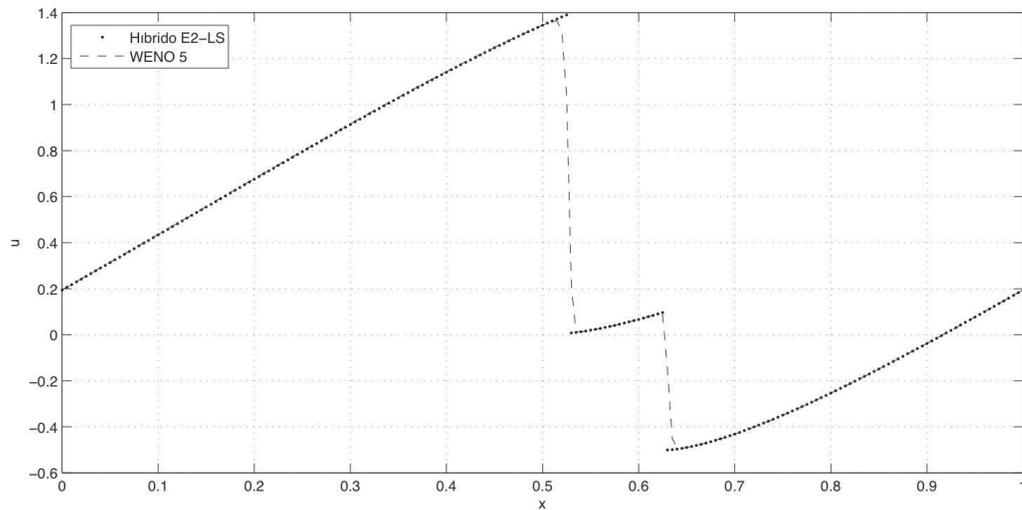


Figura 5. Perfil de u en el tiempo $t = 0,2$. Se presenta un contraste entre las aproximaciones del método híbrido ENO2-Level Set con el método WENO5, considerando una discretización espacial según $N_x = 200$.

Los resultados obtenidos por el método híbrido parecen bastante buenos al compararlos con los obtenidos por Aslam en el 2001 [1], en el que contrasta el método WENO5 con el mismo WENO5, pero acoplado con *level set*. Se verifica que el método híbrido E2-LS, aun siendo de segundo orden, es más efectivo que el método WENO de quinto orden en la captura de las ondas de choque.

5. Conclusiones

1. Es posible afirmar que no es necesaria la implementación de un método híbrido de orden mayor que dos para obtener buenos resultados en la aproximación numérica de la solución a un problema de leyes de conservación escalares, pues un método híbrido de segundo orden detecta de forma muy eficiente las ondas de choque, obteniéndose una excelente aproximación de las discontinuidades sobre sí. En el caso lineal, basta con acudir a un algoritmo híbrido de primer

orden para alcanzar buenas aproximaciones. Por lo anterior, queda en evidencia que no es necesario un método de alto orden para que la solución numérica del método híbrido converja a la solución exacta del problema.

- II. Los cálculos desarrollados por un ordenador en la ejecución de un algoritmo híbrido son de fácil implementación y relativamente de bajo costo computacional, dado que no es imprescindible considerar una gran cantidad de nodos espaciales en el mallado para obtener buenos resultados. Basta tomar una cantidad considerable de puntos para que la solución del método híbrido sea la satisfactoria.

Agradecimientos

Los autores agradecen el financiamiento parcial otorgado por el proyecto FONDECYT-CONICYT No. 11080222, del gobierno de Chile y el proyecto 104709 01/FE de la Universidad del Bío-Bío. El tercer autor agradece el apoyo entregado por el Departamento de Ciencias Básicas y por el Grupo de Matemáticas Aplicada de la Universidad del Bío-Bío a este proyecto de titulación, y en particular a los dos primeros autores, por el interés y esmero manifestado durante el transcurso de esta investigación.

Referencias

- [1] Aslam T., “A Level Set Algorithm for Tracking Discontinuities in Hyperbolic Conservation Laws I: Scalar Equations”, *J. Comput. Phys.*, 167 (2001), 413–438.
- [2] Aslam T., “A Level Set Algorithm for Tracking Discontinuities in Hyperbolic Conservation Laws II: Systems of Equations”, *J. Sci. Comput.*, 19 (2003), 37–62.
- [3] Dafermos C.M. “Characteristics in hyperbolic conservation laws, a study of the structure and asymptotic behaviour of solutions”, *Nonlinear analysis and mechanics*, Research Notes in Math. 17, Pitman, London (1977), 1–58.
- [4] Dafermos C. M., *Hyperbolic Conservation Laws in Continuum Physics*, Springer-Verlag, Berlin, 2005.
- [5] Eymard R., Gallouët T. R. and Herbin R., “Finite volume method. Handbook of numerical analysis”, Vol. VII, 713-1020, *Handb. Numer. Anal.*, VII, Nort-Holland, Amsterdam (2000).
- [6] Godlewski E., Raviart P., “Numerical approximation of hyperbolic systems of conservation laws”, *Appl. Math. Science*, 118, Springer, New York (1996).
- [7] Harten A., Engquist B., Osher S. and Chakravarthy S., “Uniformly high order essentially non-oscillatory schemes, III”, *J. Comput. Phys.*, 71 (1987), 231–303.
- [8] Jiang G.-S. and Shu C.-W., “Efficient Implementation of Weighted ENO Schemes”, *Journal of Computational Physics*, 126 (1996), 202–228.

- [9] Kružkov S. N., “First-Order Quasilinear Equations in Several Independent Variables”, *Math. Sb. (N.S.)*, 81 (1970), 228–255.
- [10] Lax P.D., “Hyperbolic systems of conservation laws, II”, *Comm. Pure Appl. Math.*, 10 (1957), 537–566.
- [11] LeVeque R., *Numerical Methods for Conservation Laws*, Lectures in Mathematics ETH Zürich, Birkhäuser Verlag, Basel, 1990.
- [12] LeVeque R., *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*. Cambridge University Press, United Kingdom, 2002.
- [13] LeVeque R., *Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, United States, 2007.
- [14] Oleinik O., “Discontinuous solutions of nonlinear differential equations”, *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, 26 (1963), 95–172.
- [15] Osher S., and Sethian J. A., “Fronts Propagating with Curvature Dependent Speed: Algorithms Based on Hamilton-Jacobi Formulations”, *J. Comput. Phys.*, 79 (1988), 12–49.
- [16] Osher S. and Fedkiw R., “Level Set Methods: an overview and some recent results”, *J. Comput. Phys.*, 169 (2001), 463–502.
- [17] Osher S. and Fedkiw R., *Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces*. Springer Verlag, New York, 2003.
- [18] Thomas J., *Numerical partial differential equations. Conservation laws and elliptic equations*, Texts in Applied Mathematics, 33, Springer-Verlag, New York, 1999.