Revista INTEGRACIÓN
Universidad Industrial de Santander
Escuela de Matemáticas
Vol. 15, No 1, p. 1–5, enero–junio de 1997

La compacidad del conmutador en los espacios generalizados de Hölder

RICARDO ABREU BLAYA*
JUAN BORY REYES*

Resumen

Es bien conocida la propiedad de compacidad del operador conmutador relativo al operador singular del tipo Cauchy, sobre curvas suaves en espacios de funciones de Hölder continuas. En el presente trabajo se obtiene la propiedad de compacidad del operador conmutador en espacios generalizados de Hölder sobre clases de curvas no suaves.

1. Preliminares

Sea L una curva rectificable de Jordan cerrada, que acota un dominio D^+ en el plano complejo $\mathbb{C}$, satisfaciendo la condición $\theta(\delta) = O(\delta)$, $\delta \to 0$, la cual está definida utilizando la característica métrica

$$\theta(\delta) = \sup_{t \in L} \operatorname{mes}\{\tau \in L : |\tau - t| < \delta\},$$

y pongamos $D^- = \overline{\mathbb{C}} \backslash \overline{D}^+$. Sea $C(L)$ la clase de todas las funciones complejas y continuas en L, con la norma $\|f\|_\infty = \sup\{|f(t)|, t \in L\}$.
Introduzcamos algunas notaciones necesarias: $\Phi = \Phi(0,d]$; $d = \sup\{|\xi - \tau|; \xi, \tau \in L\}$ es la clase de todas las funciones positivas $\varphi : (0,d] \to \mathbb{R}_+$ tales que φ no decrece, $\delta^{-1}\varphi(\delta)$ no crece y $\varphi(\delta) \to 0^+$;

$$\omega_f(\delta) = \delta \sup_{\xi \geq \delta} \xi^{-1} \sup_{\substack{t,\tau \in L \\ |\tau - t| \leq \xi}} |f(\tau) - f(t)|$$

es el módulo de continuidad de f en el conjunto L;

$$H_\varphi(L) = \{f \in C(L) : \exists c > 0 \text{ tal que } \forall \delta \in (0,d], \omega_f(\delta) \leq c\varphi(\delta)\},$$

$$\|f\|_\varphi = \|f\|_\infty + \sup_{\delta > 0} \frac{\omega_f(\delta)}{\varphi(\delta)}, \quad \varphi \in \Phi.$$

*Department of Mathematic. University of Oriente. Santiago de Cuba , 90500, CUBA.

Consideremos el operador integral singular con núcleo de Cauchy

$$Sf(t) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\pi i} \int\limits_{\{\xi \in L : |\xi - t| > \epsilon\}} \frac{f(\xi) - f(t)}{\xi - t} d\xi + f(t), \quad t \in L.$$

$P^{\pm} = \frac{1}{2}(I \pm S)$ son los operadores de proyección e I es el operador identidad.
El operador Sf está estrechamente relacionado con los valores límites de la integral de tipo Cauchy

$$F_f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi + f(t), \quad z \notin L,$$

por dentro y por fuera de L.
En este sentido el teorema de Plemelj–Priválov (ver [1]) plantea:

$$f \in H_{\varphi}(L) \Rightarrow Sf \in H_{\varphi}(L), \quad \varphi \in \Phi. \tag{1}$$

Este problema fue completamente resuelto en [1, 2].
Introduciremos los espacios $S_L^{\pm}$ de funciones continuas en L con extensión analítica a $D^{\pm}$ y que se anulan en el infinito, y definamos la norma $S_L = S_L^+ \oplus S_L^-$ por medio de la igualdad

$$\|f\|_{S_L} = \|f^+\|_{\infty} + \|f^-\|_{\infty}, \quad f^{\pm} \in S_L^{\pm}.$$

Puede probarse que S_L con la norma introducida resulta un espacio de Banach, y que el operador S actúa acotadamente sobre este espacio. La unicidad de la representación $f = f^+ - f^-$ es equivalente a la rectificabilidad de L, luego por un resultado de Peinleve (ver [8]) se tiene que $F_f^{\pm} \equiv f^{\pm}$.
Para la clase de curvas consideradas en el presente trabajo, V.V. Saláev y A. O. Tókov en [3], ofrecen una caracterización del espacio S_L en los siguientes términos:

$$f \in S_L \Leftrightarrow \int\limits_{\{\xi \in L : |\xi - t| \leq \epsilon\}} \frac{f(\xi) - f(t)}{\xi - t} d\xi \to 0 \text{ uniformemente cuando } \epsilon \to 0.$$

El primero de los autores mencionados, y posteriormente T. S. Salimov (ver [4, 5]) obtuvieron la acotación del tipo Zigmund

$$\omega_{Sf}(\sigma) \leq c \left(\int_0^{\sigma} \frac{\omega_f(\xi)}{\xi} d\xi + \sigma \int_{\sigma}^{d} \frac{\omega_f(\xi)}{\xi^2} d\xi \right), \tag{2}$$

demostrándose de hecho que (1) tiene lugar si y solo si $\varphi \in \Phi$ es tal que

$$\int_0^{\sigma} \frac{\omega_f(\xi)}{\xi} d\xi + \sigma \int_{\sigma}^{d} \frac{\omega_f(\xi)}{\xi^2} d\xi = O(\varphi(\sigma)). \tag{3}$$

2. Compacidad en S_L. Inmersión compacta

El siguiente lema ofrece una condición necesaria y suficiente para la compacidad relativa de un subconjunto del espacio S_L.

Lema 1 *Un conjunto $B \subset S_L$ es relativamente compacto si y solo si los conjuntos $B^{\pm} = P^{\pm}(B)$ lo son respecto a la norma uniforme de $C(L)$.*

La demostración de este lema solo incluye un simple análisis que consiste en el hecho de que para toda ε–red E del conjunto B, los conjuntos $P^{\pm}(E)$ constituyen ε–redes de los conjuntos $B^{\pm}$, respectivamente.

Corolario 1 *Para que un conjunto $B \subset S_L$ sea relativamente compacto, es necesario y suficiente que se cumplan las siguientes condiciones:*

i) $\|f\|_{S_L} \leq c$, *para toda $f \in B$, siendo c una constante no dependiente de f.*

ii) $B^{\pm}$ *son conjuntos de funciones equicontinuas.*

Lema 2 *El espacio $H_{\varphi}(L)$ es una inmersión compacta en S_L.*

Proof. Sea $B_{\varphi} = \left\{f \in H_{\varphi}(L) : \|f\|_{\varphi} < 1\right\}$, y probemos que es relativamente compacto en S_L. Primeramente, dado que

$$\left\|P^{+}f\right\|_{\infty} \leq \|f\|_{\infty} + \sup_{0<\sigma\leq d} \frac{\omega_f(\sigma)}{\varphi(\sigma)}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^d \frac{\varphi(\xi)}{\xi}d\xi\right),$$

entonces según (3) se deduce que

$$\left\|P^{+}f\right\|_{\infty} \leq c\|f\|_{\infty},$$

para $c = \max\left\{1, \frac{\varphi(d)}{2\pi}\right\}$.

Análogamente se obtiene esta acotación para $\|P^{-}f\|_{\infty}$, de modo que si $f \in H_{\varphi}(L)$ entonces

$$\|f\|_{S_L} \leq c\|f\|_{\varphi},$$

luego B_{φ} es equiacotada en la norma de S_L. Teniendo en cuenta que a partir de (3) se deduce que $H_{\varphi}(L) \subset S_L$, resulta que $H_{\varphi}(L)$ es una inmersión continua en S_L.

Para probar la equicontinuidad de los conjuntos $B_{\varphi}^{\pm} = P^{\pm}(B_{\varphi})$ basta utilizar las desigualdades

$$\omega_{f^{\pm}}(\delta) \leq \frac{1}{2}\left(\omega_f(\delta) + \omega_{Sf}(\delta)\right).$$

Por último, utilizando el lema 1, se completa la demostración del lema. ∎

3. Compacidad del operador conmutador

Sea $M \in H_{\varphi}(L)$; definamos el operador conmutador $SM - MS$ por medio de

$$(SM - MS)[f](t) = \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{M(\xi) - M(t)}{\xi - t} f^{\pm}(\xi)\, d\xi, \tag{4}$$

donde M representa el operador de multiplicación por la función M. En [6] la propiedad de compacidad del operador (4) es demostrada para el caso en que L representa una curva suave y la característica $\varphi(\delta) = \delta^{\alpha}$, $0 < \alpha \leq 1$.

El siguiente lema ofrece una condición suficiente para una cierta acotación del operador conmutador. Su demostración sigue el esquema de acotación utilizado en [7] para integrales del tipo

$$\int_L \frac{M(\xi) - M(t)}{\xi - t} f^{\pm}(\xi)\, d\xi.$$

Lema 3 *Supongamos que L, φ y M son como en los puntos anteriores; entonces*

$$\|(SM - MS) f\|_{\varphi} \leq c \|f\|_{S_L},$$

donde c es una conctante que no depende de f.

Corolario 2 *El operador conmutador*

$$SM - MS : \left(H_{\varphi}(L), \|\cdot\|_{S_L}\right) \to \left(H_{\varphi}(L), \|\cdot\|_{\varphi}\right)$$

es continuo.

El siguiente teorema es consecuencia inmediata de los resultados parciales obtenidos.

Teorema 1 *Bajo las hipótesis consideradas en el presente trabajo, el operador conmutador es compacto sobre $\left(H_{\varphi}(L), \|\cdot\|_{\varphi}\right)$.*

Referencias

[1] Gusiéinov E. G. *El teorema de Plemelj–Priválov para clases generalizadas de Hölder.* Mat. Sborn. 183. N02. 21–36, 1992 (en ruso).

[2] Saláev V. V., Gusiéinov E. G., Seifuláev R. K. *El teorema de Plemelj - Priválov.* Soviet Math. Dokl. Vol. 42. No 3. 1991 (en ruso).

[3] Saláev V. V., Tókov A. O. *Condiciones necesarias y suficientes para la continuidad hasta la frontera de la integral del tipo Cauchy.* Dokl. AN. Az SSR. Tom 39. No 12. 1983 (en ruso).

[4] SALÁEV V. V. *Valoraciones directas e inversas de la integral singular del tipo Cauchy sobre curvas cerradas.* Mat. Zamet. Tom 19. No 3. 365–380. 1976 (en ruso).

[5] SALÍMOV T. C. *Valoraciones directas para la integral singular del tipo Cauchy sobre curvas cerradas.* Az.. Gos. Univ. Nauch. Trudy. Ser Fiz - Mat. Nauk. No 5. 59–75. 1979 (en ruso).

[6] ROLLEWICZ D. P., ROLLEWICZ S. *Ecuaciones en espacios lineales.* Warszawa. 1968 (en polaco).

[7] GONZÁLEZ B. D. *La integral del tipo Cauchy. El problema de contorno de Riemann y el caso exclusivo del problema de contorno de Riemann sobre curvas cerradas no suaves.* Tesis de Doctorado. Universidad de Bakú. Azerbaiyán. 1979 (en ruso).

[8] MARKUSHÉVICH A. I. *Temas selectos en la teoría de las funciones analíticas.* Moscú, 1976 (en ruso).