Revista INTEGRACIÓN
Universidad Industrial de Santander
Escuela de Matemáticas
Vol. 15, No 1, p. 7–17, enero–junio de 1997

# Haces Fibrados y Teorías De Calibración*

GUILLERMO A. GONZÁLEZ†
MARLIO PAREDES GUTIERREZ‡

**Resumen**

En este trabajo se presenta un ejemplo de la aplicación del formalismo de la Teoría de Haces Fibrados a las Teorías de Campos de Calibración de la Física. Se muestra como mediante la definición geométrica de los conceptos de conexión y derivada covariante se obtienen las expresiones análogas de los correspondientes conceptos de las Teorías de Campos de Calibración de la Física.

## 1. Haz Vectorial con grupo $U(1)$

Consideremos el espacio–tiempo como el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ con métrica $(+,-,-,-)$. Sea $U(1)$ el grupo de transformaciones unitarias en una dimensión y $\mathcal{U}(1)$ su álgebra de Lie. El espacio $E = \mathbb{R}^4 \times \mathbb{C}$, tiene la estructura de un haz vectorial trivial sobre $\mathbb{R}^4$ con fibra $\mathbb{C}$ y grupo $U(1)$ [CDD, GPR1].

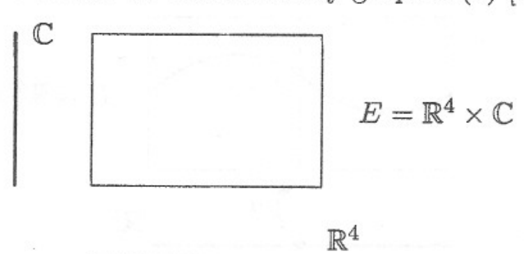


**Figura 1**

*Trabajo presentado en el COMAT'95, Universidad de Matanzas, CUBA.

†Escuela de Física, Universidad Industrial de Santander, A. A. 678, Bucaramanga, COLOMBIA. (guille@ime.unicamp.br)

‡Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander, A. A. 678, Bucaramanga, COLOMBIA. (marlio@ime.unicamp.br)

La estructura de haz vectorial de $E$ está determinada por los siguientes elementos:

a) **Acción:** Consideremos la acción del grupo $U(1)$ sobre el espacio vectorial complejo 1–dimensional $\mathbb{C}$:

$$\begin{array}{ccc} U(1)\times\mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (u,z) & \mapsto & uz\,, \end{array}$$

donde $uz = \exp(-iq\theta)z$ y $\hat{u} = -iq\theta \in \mathcal{U}(1)$.

b) **Cociclo:**

$$g:\mathbb{R}^4 \longrightarrow U(1): \qquad g(x) = 1 \in U(1), \qquad \forall x \in \mathbb{R}^4\,.$$

c) **Definición del Haz:** El espacio total del haz es $E = \mathbb{R}^4 \times \mathbb{C}$, la proyección del haz es

$$\pi: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4\times\mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ (x,z) & \mapsto & x \end{array} ;$$

simplemente la proyección en la primera componente. La fibra es $\pi^{-1}(x) = E_x = \mathbb{C}$.

d) **Secciones:** Consideremos una aplicación suave $\sigma:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4\times\mathbb{C}$, tal que $\pi\circ\sigma = 1_{\mathbb{R}^4}$. Debido a la estructura producto de $E = \mathbb{R}^4\times\mathbb{C}$, podemos escribir: $\sigma(x) = (x,\phi(x))$ donde $\phi:\mathbb{R}^4\to\mathbb{C}$ es una función suave sobre $\mathbb{R}^4$ con valores en $\mathbb{C}$. El conjunto de todas las secciones de $E$ es el espacio $\Gamma(E) = C^\infty(\mathbb{R}^4,\mathbb{C})$ y es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$.

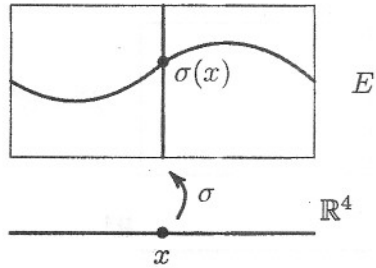


**Figura 2**

Una sección $\sigma$ físicamente representa a una partícula cargada y recibe el nombre de campo escalar complejo, las funciones $\phi$ se llaman campos de materia [DV, EGH]. El principio de Invariacia de Calibración afirma que una transformación en el espacio $E_x$ mediante un elemento de $U(1)$ lleva a una descripción diferente de la misma realidad física [AL]. Así entonces, físicamente es equivalente describir la partícula mediante la sección $\sigma'$ dada por:

$$\sigma'(x) = u\sigma(x) \qquad \acute{o} \qquad (x, \phi'(x)) = (x, u\phi(x))\,,$$

de donde $\phi'(x) = u\phi(x)$, con $u \in U(1)$.

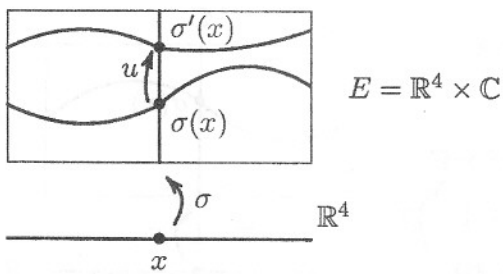


**Figura 3**

La invariancia respecto a la transformación $u$ recibe el nombre de Invariancia de Calibre, $u$ se llama una Transformación de Calibre y $U(1)$ Grupo de Calibre [DV]. Existen dos casos:

i) Invariancia de Calibre Global:

$$\sigma'(x) = u\sigma(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^4; \quad u = \exp(-iq\theta) \in U(1) \ \text{ y } \ \theta \in \mathbb{R}.$$

ii) Invariancia de Calibre Local:

$$\sigma'(x) = u(x)\sigma(x), \qquad \text{para todo } \ x \in \mathbb{R}^4\,,$$

donde

$$\begin{array}{rccl} u: & \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & U(1) \\ & x & \mapsto & u(x) = \exp(-iq\theta(x)) \end{array}$$

y $\theta$ es una función de $\mathbb{R}^4$ en $\mathbb{R}$.

## 2. El Problema de la Invariancia de Calibre: Conexión y Derivada Covariante

Consideremos un haz vectorial complejo $(E, M, F, \pi, U(1))$, cuyas secciones representan el estado de una partícula con carga eléctrica $q$ [AL, DV].

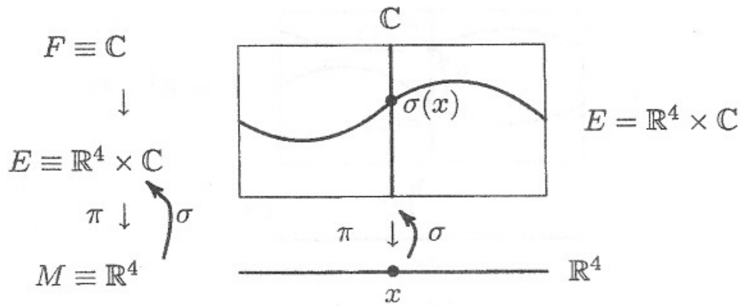


**Figura 4**

Estamos interesados ahora en estudiar la invariancia del lagrangiano $\mathcal{L}(\phi(x))$ [GPR2] cuando realizamos una transformación de calibre $u(x) \in U(1)$, esto es,

$$\sigma'(x) = u(x)\sigma(x) .$$

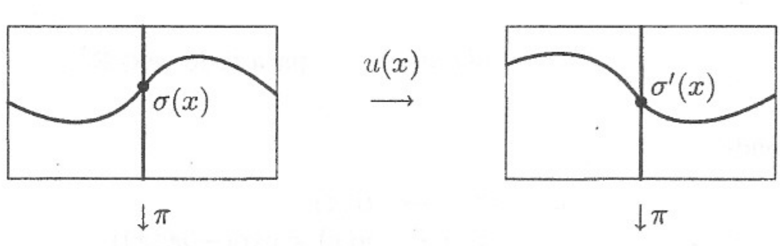


**Figura 5**

## 2.1. Conexión y Derivada Covariante: El Caso Trivial

El haz principal $P$ asociado al haz vectorial complejo $E$ es el haz sobre $\mathbb{R}^4$ con fibra estándar y grupo estructural $U(1)$ [CDD, GPR1]:

$$\begin{array}{c} U(1) \\ \downarrow \\ P \equiv \mathbb{R}^4 \times U(1) \\ \downarrow \eta \\ \mathbb{R}^4 \end{array}$$

Todo punto $p \in P$ es de la forma $p = (x, u)$, con $x \in \mathbb{R}^4$ y $u \in U(1)$.
La proyección del haz está entonces definida por

$$\begin{array}{rccc} \eta: & P & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ & (x,u) & \mapsto & x\ . \end{array}$$

Como $P$ es producto, entonces el plano tangente a $P$ en el punto $p$ es

$$TP_p = T\,\mathbb{R}^4_x \oplus TU(1)_u \cong \mathbb{R}^4 \oplus \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^5.$$

En este caso definimos la conexión trivial

$$\begin{array}{rccc} \gamma_p: & T\,\mathbb{R}^4_x & \longrightarrow & TP_p \\ & \xi & \mapsto & (\xi, 0)\,, \end{array}$$

donde $\eta(p) = x$. $\gamma_p$ es la inmersión canónica de $\mathbb{R}^4$ en $\mathbb{R}^5$.
Consideremos ahora una curva sobre $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{array}{rccc} \alpha: & I \subset \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ & t & \mapsto & \alpha(t) = x_t \end{array}$$

tal que $\alpha(0) = x$ y $\dot{\alpha}(0) = \xi \in T\,\mathbb{R}^4_x$. Un levantamiento horizontal de $\alpha(t)$ al haz $P$ es una curva

$$\begin{array}{rccc} \beta: & I \subset \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \times U(1) \\ & t & \mapsto & \beta(t) = (x_t, u_t) \end{array}$$

tal que:

i) $\beta(0) = (x, u)$, para algún $u \in U(1)$,

ii) $\dot{\beta}(0) = \gamma_p(\xi) = (\xi, 0)$,

iii) $\dot{\beta}(t) = (\dot{\alpha}(t), 0)$.

El transportado paralelo de un punto $p = (x, u) \in P$ a lo largo de la curva $\alpha(t)$ es el punto $p_t = \beta(t) = (x_t, u_t)$. Para un $z \in \mathbb{C}$ fijo, se define un levantamiento horizontal de la curva $\alpha(t)$ al haz vectorial $E \equiv \mathbb{R}^4 \times \mathbb{C}$ como la curva

$$\begin{array}{rccc} \hat{\beta}: & I \subset \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \times \mathbb{C} \\ & t & \mapsto & (x_t, u_t z) \end{array}$$

En $t = 0$ la curva pasa por el punto $\hat{\beta}(0) = (x, uz)$. El transporte paralelo de un punto $(x_0, z_0) \in E$ a lo largo de la curva $\alpha(t)$ es el punto $\hat{\beta}(t) = (x_t, z_t)$, donde $\hat{\beta}(t)$ es el levantamiento horizontal de $\alpha(t)$, que en $t = 0$ pasa por $(x_0, z_0)$. Lo denotaremos por

$$\tau_0^t(x_0, z_0) = (x_t, z_t).$$

Ahora para definir la Derivada Covariante consideremos

$$\begin{array}{rccc} \sigma: & \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \times \mathbb{C} \\ & x & \mapsto & (x, \phi(x)), \end{array}$$

una sección del haz vectorial $E = \mathbb{R}^4 \times \mathbb{C}$, definida sobre la curva $\alpha(t) = x_t$. La derivada covariante de $\sigma$ en la dirección de la curva $\alpha(t) = x_t$ se define como [CDD]:

$$\nabla_\xi \sigma(x) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left\{ \tau_0^t(\sigma(t)) - \sigma(x) \right\}.$$

Tomemos como curva $\alpha(t)$ el eje coordenado $x^i$; así entonces $\xi = \hat{e}_i$ y $x_t = x + t\hat{e}_i$. El levantamiento horizontal al haz principal será la curva

$$\beta(t) = (x_t, u_t) = (x, u) + t(\hat{e}_i, 0) = (x + t\hat{e}_i, u),$$

de donde $u_t = u$. El levantamiento horizontal al haz vectorial será la curva $\hat{\beta}(t) = (x_t, u_t z)$, que en el tiempo $t$ pase por el punto $\sigma(x_t) = (x_t, \phi(x_t))$, es decir,

$$(x_t, u_t z) = (x_t, \phi(x_t)).$$

Entonces $u_t z = uz = \phi(x_t)$ y $z = u^{-1}\phi(x_t)$, de modo que $\hat{\beta}(0) = (x, uz) = (x, \phi(x_t))$, y en consecuencia

$$\tau_0^t(\sigma(t)) = \tau_0^t(x_t, \phi(x_t)) = (x, \phi(x_t)).$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
\nabla_{\hat{e}_i}\sigma(x) &= (x, D_i\phi(x)), \\
(x, D_i\phi(x)) &= \nabla_{\hat{e}_i}(x,\phi(x)) \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{(x,\phi(x_t)) - (x,\phi(x))}{t} \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{(x,\phi(x_t) - \phi(x))}{t} \\
&= \left(x, \lim_{t\to 0}\frac{\phi(x+t\hat{e}_i) - \phi(x)}{t}\right) \\
&= (x, \partial_i\phi(x)),
\end{aligned}$$

y se sigue que $D_i\phi(x) = \partial_i\phi(x)$, o sea que en el caso de la conexión trivial la derivada covariante coincide con la derivada usual.

La invariancia del Lagrangiano $\mathcal{L}(\phi(x))$ bajo una transformación de calibre $u(x) = \exp(-iq\theta(x))$ exige que [AL]:

i) $\phi'(x) = u(x)\phi(x)$;

ii) $\partial_i\phi'(x) = u(x)\partial_i\phi(x)$.

En el caso de transformaciones de calibre global, $\theta(x) = \theta$ es constante, y se satisfacen ambas condiciones. Sin embargo, en el caso de transformaciones de calibre local, $\theta(x)$ no es constante, y solo se satisface la primera condición. En este caso la segunda condición se cambia por

ii)' $\partial_i\phi'(x) = u(x)\partial_i\phi(x) - i(q\partial_i\theta(x))u(x)\phi(x)$.

Así entonces, para resolver este problema y rescatar la segunda condición, debemos definir una conexión no–trivial.

## 2.2. Conexión y Derivada Covariante: El Caso No–Trivial

Redefinimos la conexión de la siguiente forma

$$\begin{array}{rccc}
\gamma_p: & T\mathbb{R}^4_x & \longrightarrow & TP_p = T\mathbb{R}^4_x \oplus TU(1)_u \\
& \xi & \mapsto & (\xi, u\omega(\xi))
\end{array},$$

donde $\omega : T\,\mathbb{R}^4_x \rightarrow \mathcal{U}(1)$ puede escribirse como

$$\omega(\xi) = \exp(iqA(\xi)),$$

con $A : T\,\mathbb{R}^4_x \rightarrow \mathbb{R}$ una 1–forma diferencial sobre $\mathbb{R}^4$, esto es

$$A(\xi) = \sum_{i=1}^{4} A_i(x)dx^i(\xi);$$

esto es, $\omega$ es una 1–forma con valores en el álgebra de Lie $\mathcal{U}(1)$ y se llama la 1–forma de conexión. La aplicación $\gamma_p$ tiene las siguientes propiedades:

1. $\gamma_p$ es lineal;
2. $\eta_*\gamma_p(\xi) = \xi$;
3. $\gamma_{\tilde{R}_g p}(\xi) = \tilde{R}_{g*}\gamma_p(\xi)$;
4. $\gamma_p$ depende diferenciablemente de $p$.

Sea

$$\begin{array}{rccc} \alpha: & I \subset \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ & t & \mapsto & \alpha(t) = x_t \end{array}$$

una curva en $\mathbb{R}^4$, tal que $\alpha(0) = x$ y $\dot{\alpha}(0) = \xi$. El levantamiento horizontal de $\alpha(t)$ al haz principal $P = \mathbb{R}^4 \times U(1)$ es una curva

$$\begin{array}{rccc} \beta: & I \subset \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \times U(1) \\ & t & \mapsto & \beta(t) = (x_t, u_t) \end{array}$$

tal que:

i) $\beta(0) = (x, u)$, para algún $u \in U(1)$;

ii) $\dot{\beta}(0) = \gamma_p(\xi) = (\xi, iequA(\xi))$;

iii) $\dot{\beta}(t) = (\dot{\alpha}(t), iequA(\dot{\alpha}(t)))$.

Tomando como curva $\alpha(t)$ el eje de coordenadas $x^i$, $\xi = \hat{e}_i$ y $x_t = x + t\hat{e}_i$, la curva viene dada por

$$\beta(t) = (x_t, u_t) = (x + t\hat{e}_i, u\exp(ieqA(\xi)t)),$$

de donde

$$\begin{aligned} x_t &= x + t\hat{e}_i \ , \\ u_t &= u\exp(ieqA(\xi)t) = u\exp(ieqA_i(x)t). \end{aligned}$$

Para un $z \in \mathbb{C}$ fijo, se define el levantamiento horizontal de la curva $\alpha(t)$, al haz vectorial $E = \mathbb{R}^4 \times \mathbb{C}$, como la curva

$$\begin{aligned} \hat{\beta}: \ I \subset \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^4 \times \mathbb{C} \\ t &\mapsto (x_t, u_t z)\,. \end{aligned}$$

Así entonces, en $t = 0$ la curva pasa por el punto $\hat{\beta}(0) = (x, uz)$. El transporte paralelo de un punto $(x_0, z_0) \in E$ a lo largo de la curva $\alpha(t)$ es el punto $(x_t, u_t z_0)$, esto es

$$\tau_t^0(x_0, z_0) = (x_t, z_t) = (x_t, u_t z_0).$$

Recordemos que la derivada covariante de una sección $\sigma$ de $E$, en la dirección de la curva $\alpha(t) = x_t$ está dada por:

$$\nabla_\xi \sigma(x) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\{\tau_0^t(\sigma(t)) - \sigma(x)\}\,,$$

donde $\sigma(x) = (x, \phi(x))$. Tomando como curva $\alpha(t) = x_t = x + t\hat{e}_i$ el eje coordenado $x^i$, entonces los levantamientos horizontales a los haces $P$ y $E$ son respectivamente

$$\begin{aligned} \beta(t) &= (x_t, u_t) = (x + t\hat{e}_i, u\exp(ieqA_i(x)t))\,, \\ \hat{\beta}(t) &= (x_t, u_t z)\ , \end{aligned}$$

y $\hat{\beta}(t)$ es tal que en el tiempo $t$ pasa por el punto $\sigma(x_t) = (x_t, \phi(x_t))$. Es decir $(x_t, u_t z) = (x_t, \phi(x_t))$, de donde

$$\begin{aligned} z &= u_t^{-1}\phi(x_t) &&= u^{-1}\exp(-ieqA_i(x)t)\phi(x_t)\,, \\ \hat{\beta}(0) &= (x, uz) &&= (x, \exp(-ieqA_i(x)t)\phi(x_t))\,, \\ \tau_0^t\sigma(x_t) &= \tau_0^t(x_t, \phi(x_t)) &&= (x, \exp(-ieqA_i(x)t)\phi(x_t))\,. \end{aligned}$$

Ahora podemos calcular la derivada covariante:

$$\nabla_{\hat{e}_i}\sigma(x) = \nabla_{\hat{e}_i}(x, \phi(x))\,;$$

$$\begin{aligned}
(x, D_i\phi(x)) &= \lim_{t\to 0}\frac{\tau_0^t\sigma(x_t)-\sigma(x)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\{(x\ ,\ \exp(-ieqA_i(x)t)\phi(x_t)) - (x,\phi(x))\} \\
&= \left(x\ ,\ \lim_{t\to 0}\frac{\exp(-ieqA_i(x)t)\phi(x_t)-\phi(x)}{t}\right) \\
&= \left(x\ ,\ \lim_{t\to 0}\frac{\phi(x_t)-ieqA_i(x)t\phi(x_t)-\phi(x)}{t}\right) \\
&= \left(x\ ,\ \lim_{t\to 0}\frac{\phi(x+t\hat{e}_i)-\phi(x)}{t} - \lim_{t\to 0} ieqA_i(x)\phi(x_t)\right) \\
&= (x\ ,\ \partial_i\phi(x) - ieqA_i(x)\phi(x))\,.
\end{aligned}$$

De aquí tenemos que

$$D_i\phi(x) = \partial_i\phi(x) - ieqA_i(x)\phi(x)\,,$$

o sea que en este caso la derivada covariante es

$$D_i = \partial_i - ieqA_i.$$

Miremos ahora la invariancia de calibre; para esto consideremos una transformación de calibre $u(x) = \exp(-iq\theta(x))$. Bajo esta transformación la 1–forma de conexión transforma como

$$\begin{aligned}
\omega' &= Ad(u^{-1})\omega + u^{-1}du\,, \\
\omega'(\xi) &= u^{-1}(x)\omega(\xi)u(x) + u^{-1}(x)du(x)\,.
\end{aligned}$$

Entonces

$$ieq\sum_i A_i'(x)dx^i(\xi) = ieq\sum_i u^{-1}(x)A_i(x)u(x)dx^i(\xi) + u^{-1}(x)du(x)\,,$$

$$ieqA_i'(x) = iequ^{-1}(x)A_i(x)u(x) + u^{-1}(x)\partial_i u(x)\,,$$

$$\begin{aligned}
A_i'(x) &= \exp(iq\theta(x))A_i(x)\exp(iq\theta(x)) \\
&\quad + \frac{1}{ieq}\exp(iq\theta(x))\partial_i[\exp(-iq\theta(x))]\,,
\end{aligned}$$

$$A_i'(x) = A_i(x) - \frac{1}{e}\partial_i\theta(x).$$

Por lo tanto,

$$D_i'\phi'(x) = u(x)D_i\phi(x).$$

Así entonces, podemos ver que el requerimiento de la invariancia de calibre del Lagrangiano exige la introducción de los campos electromagnéticos $A_i(x)$.

## Referencias

[CDD] Y. Choquet, C. DeWitt and M. Dillard, *Analysis, Manifolds and Physics*, North–Holland, Amsterdam, 1978.

[GPR1] G. A. González, M. Paredes y E. Reyes, *Haces Fibrados*, Memorias IX Escuela Nacional de Física Teórica, Universidad Industrial de Santander, 1993.

[DV] M. Daniel and C. M. Viallet, *The Geometrical Setting of Gauge Theories of the Yang–Mills Type*, Rev. Mod. Phys. 52, 175, 1980.

[EGH] T. Eguchi, P. B. Gilkey and A. J. Hanson, *Gravitation, Gauge Theories and Differential Geometry*, Physics Reports, Vol. 66, No 6, North–Holland, Amsterdam, 1980.

[AL] E. S. Abers and B. W. Lee, *Gauge Theories*, Physics Reports, Vol. 9C, No 1, North–Holland, Amsterdam, 1973.

[GPR2] G. A. González, M. Paredes y E. Reyes, *Teorías de Calibración: Aspectos Matemáticos Básicos*, Memorias IX Escuela Nacional de Física Teórica, Universidad Industrial de Santander, 1993.