

El dicono truncado elíptico

LUIS ENRIQUE RUIZ HERNÁNDEZ*

Resumen

Se introduce un enfoque novedoso del dicono truncado elíptico D centralmente simétrico en el origen. Estratégicamente se considera a D como una esfera topológica respecto a una norma φ sobre \mathbb{R}^3 , lo que permite un análisis unificador, riguroso y elaborado de D . Se describe y caracteriza el sólido D en términos de los valores y vectores propios de una matriz simétrica, positivamente definida, que depende de D . Al margen se halla una representación integral de la norma euclídea en \mathbb{R}^2 .

1. Introducción

El cono y el dicono truncados elípticos (ver definición 1) son de los sólidos tridimensionales más olvidados en la geometría clásica. Apenas son mencionados ligeramente al describirlos de la manera tradicional como al enunciar la fórmula de su volumen, en el caso circular (el más sencillo).

Hasta el presente no se ha emprendido ningún estudio profundo y serio para identificarlos intrínsecamente. Sólo se les reconoce por su configuración euclídea.

Obviamente son cuerpos, que ya por su truncación, constituyen de hecho una tremenda dificultad teórica al explorar sus propiedades geométricas y topológicas **verdaderamente relevantes** que los distinguen.

En el presente trabajo estudiaremos, con rigor y detalle, el dicono truncado elíptico D (análisis válido para el cono truncado) centralmente simétrico en el

*Departamento de Matemáticas, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, Duitama, Boyacá, COLOMBIA.

origen 0. En su desarrollo veremos cómo aparecen obstáculos de naturaleza sorprendente e inusual.

A tal fin se concibe una norma φ sobre \mathbb{R}^3 que involucra una matriz simétrica Q positivamente definida. Al representarse como el máximo de dos funciones no negativas, sus esferas cerradas $S_r[0]$ (de centro 0 y radio $r > 0$) son sólidos D (Teorema 1). Además de su volumen, se da un criterio que decide cuando $S_r[0]$ es un dicono truncado recto, tratándose específicamente cada caso (Teorema 2).

También, a partir de D , se construye cada una de las partes de φ , respecto a la cual D es una esfera unitaria (Corolario 1). En general se describe y caracteriza el sólido D en términos de los valores y vectores propios de una matriz simétrica Q , positivamente definida, que depende de D (Teoremas 2,3,4, Corolario 2).

Por ende emanan en el análisis de D el Teorema Espectral y una metodología propia, que de manera natural va tomando nociones modernas de Topología, Análisis Convexo, Algebra Lineal y aun resultados de Geometría Diferencial Clásica. Para mayor claridad se incluyen varias ilustraciones en cada caso.

Al final conseguimos una representación de la norma euclídea $\|X\|$ en \mathbb{R}^2 como la integral sobre $[0, \pi]$ del valor absoluto de un producto interior de vectores (Corolario 3).

Denotaremos con letra imprenta mayúscula los puntos o vectores fila de \mathbb{R}^3 , mediante una cruz \times el producto vectorial, y por Q^T la transpuesta de una matriz Q . En particular el producto matricial AB^T indicará el producto interior usual de dos vectores A y B en \mathbb{R}^3 (ó \mathbb{R}^2).

Los Teoremas 1 a 4 y los Corolarios 1 a 3 consignados en el presente trabajo son resultados nuevos en la literatura matemática sobre el tema.

Definición 1 *Un cono truncado (o tronco de cono) es la parte de un cono comprendida entre la base y una sección paralela a la base. El tronco es llamado elíptico si la base del cono es una elipse.*

La sección y la base del cono se llaman las bases del tronco. La distancia entre sus bases es la altura del tronco.

Haciendo coincidir las bases más grandes de dos conos truncados elípticos iguales, obtenemos un dicono truncado (o tronco de dicono) elíptico (Ver Figura 1).

Las bases más pequeñas de los dos conos truncados son las bases del dicono truncado. Su altura es la distancia entre dichas bases. La base más grande de

los dos conos truncados es la sección media del dicono truncado.

Por lo tanto, la sección media de un dicono truncado elíptico equidista de sus bases.

Teorema 1 *Sea Q una matriz simétrica, positivamente definida, de orden tres, A un vector unitario en \mathbb{R}^3 y $a > 1$. Entonces*

i) *La función $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ representada por*

$$\varphi(X) = \max \{ \|(XQ) \times A\| + |XQA^T|, a|XQA^T| \}, \quad (1)$$

para todo $X \in \mathbb{R}^3$, es una norma sobre \mathbb{R}^3 .

ii) *$S_r[0]$ (la esfera cerrada de centro el origen 0 y radio $r > 0$, respecto a φ) es un dicono truncado elíptico, sólido y cerrado, de centro 0. Sus bases son $\pm E$, donde E es la región elíptica*

$$XQ^2X^T \leq c^2, \quad XQA^T = a^{-1}r, \quad (2)$$

de centro $a^{-1}rAQ^{-1}$, donde

$$c = a^{-1}r\sqrt{(a-1)^2 + 1}.$$

La región elíptica E_0 , descrita por

$$XQ^2X^T \leq r^2, \quad XQA^T = 0, \quad (3)$$

es la sección media del dicono truncado (ver Figura 1).

Proof. $\varphi(X) = 0$ implica $\|(XQ) \times A\| = 0$ y que XQ es ortogonal a A ; de donde $\|XQ\| = 0$, $XQ = 0$ y $X = 0$ por ser Q no singular. Las otras propiedades que hacen de φ una norma son heredadas de la norma euclídea y el valor absoluto.

El punto $-rAQ^{-1}$ está en el semi-espacio abierto $XQA^T < 0$, y rAQ^{-1} en $XQA^T > 0$. Por lo cual la región elíptica E_0 definida en (3) es la base común de dos conos $-C$ y C , sólidos y cerrados, de ápices $-rAQ^{-1}$ y rAQ^{-1} , respectivamente (ver Figura 1). Esto es, $-C \cup C$ es un dicono de base E_0 , ápices $\pm rAQ^{-1}$ y centro $0 = \frac{1}{2}(-rAQ^{-1} + rAQ^{-1})$.

Por ser φ una función real, convexa, propia y cerrada en \mathbb{R}^3 , entonces

$$\text{int}(S_r[0]) = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid \varphi(x) < r\},$$

y

$$Fr(S_r[0]) = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid \varphi(x) = r\}$$

([5], p.59, Corollary 7.6.1).

Ahora, si X es un punto del plano $XQA^T = a^{-1}r$, entonces

$$Y = \frac{a}{a-1}X - \frac{r}{a-1}AQ^{-1}$$

es el punto de intersección del rayo $\overrightarrow{(rAQ^{-1})X}$ con el plano $XQA^T = 0$. Esta asignación define una aplicación biyectiva $X \xrightarrow{f} Y$ entre dichos planos paralelos, para la cual $f(E) = E_0$.

Además, $Y = f(X)$ es un punto de la frontera relativa de E_0 si y solo si X es un punto de la frontera relativa de E . En cuyo caso el segmento \overline{XY} está en una generatriz del cono C . Consecuentemente se obtiene de C un cono truncado \tilde{C} (sólido y cerrado) de bases E_0 y E . Así mismo, por simetría, $-\tilde{C}$ es el cono truncado (procedente de $-C$) de bases E_0 y $-E$.

Luego $-\tilde{C} \cup \tilde{C}$ es un dicono truncado elíptico de centro 0, bases $\pm E$ y sección media E_0 descritas en (2) y (3) (ver Figura 1).

En este contexto, podemos describir el cono truncado \tilde{C} de la siguiente manera

$$\tilde{C} = \bigcup_{X \in E} \overline{Xf(X)} = \bigcup_{X \in E} \overline{XY},$$

y por simetría,

$$-\tilde{C} \cup \tilde{C} = \left\{ \bigcup_{X \in E} \overline{(-X)(-Y)} \right\} \cup \bigcup_{X \in E} \overline{XY} = \bigcup_{X \in E} \overline{(-XY) \cup XY}.$$

A la luz de estos argumentos, si X es un punto del plano $XQA^T = a^{-1}r$ y $Y = f(X)$, entonces

$$\alpha X + (1-\alpha)Y = \left\{ \alpha + \frac{a(1-\alpha)}{a-1} \right\} X - \frac{r(1-\alpha)}{a-1} AQ^{-1},$$

$$\{\alpha X + (1-\alpha)Y\}Q = \left\{ \alpha + \frac{a(1-\alpha)}{a-1} \right\} XQ - \frac{r(1-\alpha)}{a-1} A,$$

$$\{\alpha X + (1-\alpha)Y\}Q \times A = \left\{ \alpha + \frac{a(1-\alpha)}{a-1} \right\} (XQ) \times A,$$

$$\|\{\alpha X + (1-\alpha)Y\}Q \times A\| = \left\{ \alpha + \frac{a(1-\alpha)}{a-1} \right\} (XQ^2 X^T - a^{-2}r^2)^{1/2},$$

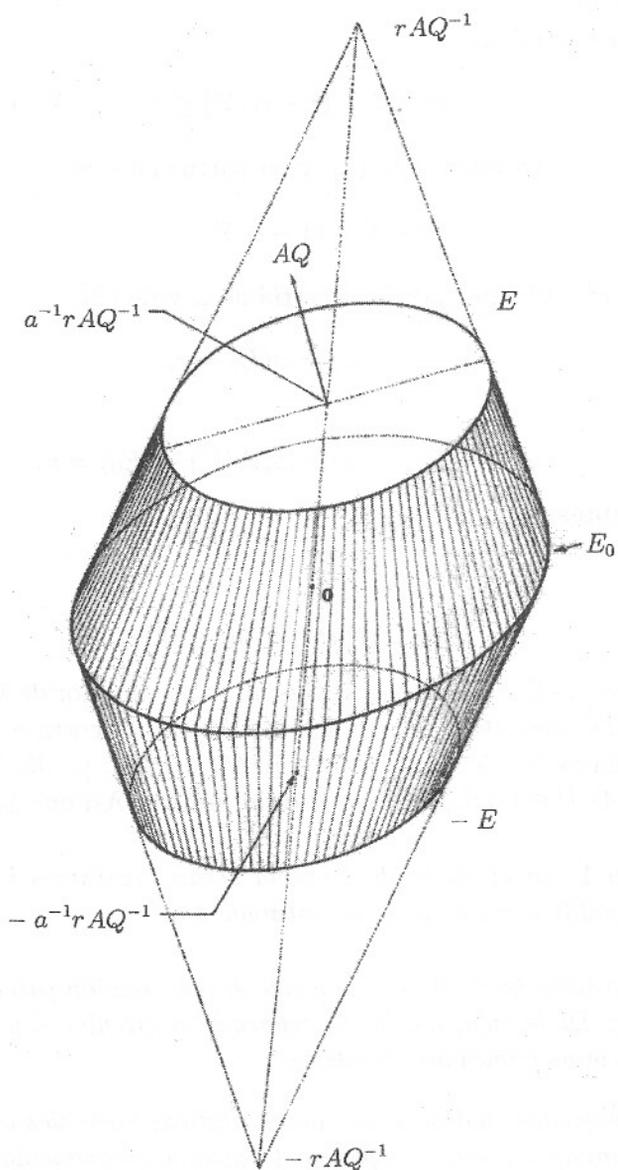


Figura 1.

y

$$\{\alpha X + (1 - \alpha)Y\}QA^T = \alpha a^{-1}r$$

para todo $\alpha \in [0, 1]$.

Estas relaciones implican

$$\varphi(\alpha X + (1 - \alpha) Y) \leq r$$

si X satisface las expresiones en (2), y en particular que

$$\varphi(\alpha X + (1 - \alpha) Y) = r$$

si $XQ^2X^T = c^2$. Además, por la simetría de φ y de (2),

$$\varphi(-E) = \varphi(E) = r,$$

de donde

$$\varphi(\text{Fr}(-\tilde{C}) \sim E_0) = \varphi(\text{Fr}(\tilde{C}) - E_0) = r.$$

En otras palabras,

$$-\tilde{C} \cup \tilde{C} \subseteq S_r[0]$$

y

$$\text{Fr}(-\tilde{C} \cup \tilde{C}) \subseteq \text{Fr}(S_r[0]). \quad (4)$$

Si $X \in S_r[0] \sim (-\tilde{C} \cup \tilde{C})$ entonces X es un punto interior de $\mathbb{R}^3 \sim (-\tilde{C} \cup \tilde{C})$, por ser $-\tilde{C} \cup \tilde{C}$ cerrado, y el segmento $\overline{OX} \subseteq S_r[0]$ corta a $\text{Fr}(-\tilde{C} \cup \tilde{C})$ en un punto P entre 0 y X , esto es, $P \in \text{int}(S_r[0])$ ([5], p. 45, Theorem 6.1) y además por (4) $P \in \text{Fr}(S_r[0])$, lo cual es imposible. Así que $S_r[0] \subseteq -\tilde{C} \cup \tilde{C}$.

Observación 1 *En el siguiente teorema serán necesarios los resultados de Geometría Analítica enunciados a continuación*

- (i) *Un cono tiene base circular si y solo si toda sección paralela a su base es circular. De lo cual, un dicono truncado es circular si y solo si proviene de dos conos truncados circulares.*
- (ii) *En un elipsoide, todas las secciones elípticas normales a uno de los ejes son "similares", esto es, poseen la misma excentricidad, y tienen por tanto sus ejes mayores en la misma dirección ([7], pp. 260-261, 692-693).*
- (iii) *Sea una elipse de semiejes de α y β . Si una cuerda suya y el eje de longitud 2β son paralelas, y están a una distancia s , entonces la cuerda tiene longitud*

$$2\alpha^{-1}\beta\sqrt{\alpha^2 - s^2}.$$

Teorema 2 Sea $S_r[0]$ la esfera cerrada de centro el origen 0 y radio $r > 0$, respecto a la norma φ definida en (1) bajo las condiciones del Teorema 1. Entonces

(i) El volumen de $S_r[0]$ es

$$\frac{2\pi}{3} a^{-3} r^3 (3a^2 - 3a + 1) \det^{-1} Q.$$

(ii) Si $S_r[0]$ es un dicono truncado circular, entonces el radio de sus bases es $(1 - a^{-1}) R$, donde

$$R = r \|AQ\|^{\frac{1}{2}} \det^{-1/2} Q$$

es el radio de la sección media.

(iii) Diremos que $S_r[0]$ es un dicono truncado recto si la recta a través de los centros de sus bases es normal a ellas. Esto ocurre si y solo si A es un vector propio de Q . En cuyo caso los centros de sus bases son $\pm (a\lambda)^{-1} rA$, donde λ es el valor propio de Q al cual corresponde A . Además,

a) Si todos los valores propios de Q son diferentes, entonces los vectores propios de Q , correspondientes a valores propios $\neq \lambda$, dan la dirección de los semiejes, tanto de las bases como de la sección media de $S_r[0]$.

Los semiejes de las bases y de la sección media miden $(1 - a^{-1}) r$ veces y r veces los inversos de aquellos correspondientes valores propios $\neq \lambda$, respectivamente.

b) Si Q tiene un valor propio $\neq \lambda$ de multiplicidad dos, entonces $S_r[0]$ tiene bases y sección media circulares, de radios $(1 - a^{-1}) r$ veces y r veces el inverso de dicho valor propio, respectivamente.

c) Si λ es de multiplicidad dos y ℓ es otro valor propio de Q , entonces los semiejes de las bases y de la sección media de $S_r[0]$ están en las direcciones B y $A \times B$, de longitudes $(1 - a^{-1}) r\ell^{-1}$ y $(1 - a^{-1}) r\lambda^{-1}$, $r\ell^{-1}$ y $r\lambda^{-1}$, respectivamente, donde B es un vector propio correspondiente a ℓ .

d) Si λ es de multiplicidad tres, entonces $S_r[0]$ es un dicono truncado circular con bases de radio $(1 - a^{-1}) r\lambda^{-1}$, y sección media de radio $r\lambda^{-1}$.

Proof. Sean $-C, C, -\tilde{C}$ y \tilde{C} los sólidos cerrados considerados en la demostración del Teorema 1. Es decir,

$$S_r[0] = -\tilde{C} \cup \tilde{C}.$$

- (i) Teniendo presentes las relaciones en (3) y (2), si f es el automorfismo de \mathbb{R}^3 definido por $f(X) = XQ$, para todo $X \in \mathbb{R}^3$, entonces las expresiones

$$\|f(X)\|^2 = XQ^2X^T,$$

$$\{f(X) - f(0)\}f(rAQ^{-1})^T = rXQA^T,$$

y

$$\{f(X) - f(a^{-1}rAQ^{-1})\}f(rAQ^{-1})^T = rXQA^T - a^{-1}r^2,$$

implican que $f(C)$ y $f(C \sim \tilde{C})$ son conos de revolución de ápice común $f(rAQ^{-1}) = rA$, bases circulares de centros 0 y $a^{-1}rA$, respectivamente. Recordando que rAQ^{-1} es el ápice del cono C , entonces $f(X)f(0)f(rAQ^{-1})$, esto es, $f(X)0(rA)$ es un triángulo rectángulo isósceles con catetos de longitud r ; para todo punto X de la frontera relativa de la base de C . Por lo tanto el radio y la altura de $f(C)$ son iguales a r . Similarmente, el radio y la altura de $f(C \sim \tilde{C})$ son iguales a

$$\left\{ a^{-2}r^2 \left[(a-1)^2 + 1 \right] - \|f(a^{-1}rAQ^{-1})\|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = (1-a^{-1})r.$$

(Toda sección circular de una esfera de radio R , a una distancia s de su centro, tiene radio $\sqrt{R^2 - s^2}$).

Entonces los volúmenes de $f(C)$ y $f(C \sim \tilde{C})$ son, respectivamente, $\frac{\pi}{3}r^3$ y $\frac{\pi}{3}(1-a^{-1})^3r^3$, y así

$$v_1 \det Q = \frac{\pi}{3}r^3 \quad \text{y} \quad v_2 \det Q = \frac{\pi}{3}(1-a^{-1})^3r^3,$$

([2], p. 243, Corollary), donde v_1 y v_2 son los volúmenes de los conos C y $C \sim \tilde{C}$, respectivamente. Se sigue de la unión disjunta

$$C = \tilde{C} \cup (C \sim \tilde{C}),$$

que

$$\begin{aligned} \text{volumen}(S_r[0]) &= \text{volumen}(-\tilde{C} \cup \tilde{C}) \\ &= 2 \text{volumen}(\tilde{C}) \\ &= 2(v_1 - v_2). \end{aligned}$$

- (ii) De acuerdo a la observación 1, parte (i), el cono truncado \tilde{C} (y por lo tanto los conos C y $C\tilde{C}$) es circular. Las distancias entre los planos definidos en (3) y (2), al ápice de C son

$$\frac{|(rAQ^{-1})(AQ)^T|}{\|AQ\|} = r\|AQ\|^{-1}$$

y

$$\frac{|(rAQ^{-1})(AQ)^T - a^{-1}r|}{\|AQ\|} = (1 - a^{-1})r\|AQ\|^{-1},$$

respectivamente. Por lo tanto,

$$\frac{\pi}{3}R_1^2r\|AQ\|^{-1} \quad \text{y} \quad \frac{\pi}{3}R_2^2(1 - a^{-1})r\|AQ\|^{-1},$$

son los volúmenes de C y $C\tilde{C}$, con bases de radio R_1 y R_2 , respectivamente. Igualando estas expresiones con v_1 y v_2 , obtenemos R_1 y R_2 , respectivamente.

- (iii) Si A es un vector propio de Q al cual corresponde el valor propio $\lambda > 0$ entonces $AQ = \lambda A$, y A es también normal al plano definido en (3). Además λ^{-1} y A son valores y vectores propios de Q^{-1} ($AQ = \lambda A$ es equivalente a $AQ^{-1} = \lambda^{-1}A$), y así $\pm a^{-1}rAQ^{-1} = \pm (a\lambda)^{-1}rA$ son (además de normales a dicho plano) los centros de las bases de $S_r[0]$, siendo por ende recto.

Recíprocamente, si $S_r[0]$ es un dicono truncado recto entonces existe un escalar $t \neq 0$, tal que $a^{-1}rAQ^{-1} = tAQ$, es decir, $AQ^2 = (at)^{-1}rA$ y A es un vector propio de Q^2 . Si $\lambda > 0$ y λ^2 es el valor propio de Q^2 correspondiente a A , entonces de las relaciones

$$0 = AQ^2 - \lambda^2A = A(Q^2 - \lambda^2I) = A(Q - \lambda I)(Q + \lambda I),$$

se colige que $Q + \lambda I$ es no singular (de lo contrario $-\lambda$ sería un valor propio de Q , lo cual es imposible por ser Q positivamente definida, [8], p.279), de donde λ es también el valor propio de Q al cual corresponde A .

Las secciones elípticas del elipsoide en (2) normales a A , a través de 0 y $(a\lambda)^{-1}rA$ (el centro de la base E) están a una distancia $s = \left\| (a\lambda)^{-1}rA \right\| = (a\lambda)^{-1}r$, poseen la misma excentricidad y así, sus ejes mayores están en la misma dirección (ver observación 1, parte (ii)).

Por tanto, bajo las condiciones en (a), los otros vectores propios de Q (es decir, de Q^2) son normales a A , y dan la dirección de los semiejes de las elipses definidas en (2) y (3); los cuales miden $(1 - a^{-1})r$ veces (aquí aplicamos la parte (iii) de la observación 1) y r veces los inversos de los correspondientes valores propios, respectivamente ([8], p. 256, Propiedad 3, p. 285).

Para la parte (b), si $\ell \neq \lambda$ es un valor propio de Q de multiplicidad dos, entonces los sólidos en (2) y (3) son esferoides ([4], p.131) con secciones circulares normales a A , a través de $(a\lambda)^{-1}rA$ y 0 , de radios $(1 - a^{-1})r\ell^{-1}$ (esta vez aplicamos la parte (iii) de la observación 1 con $(s, \alpha, \beta) = ((a\lambda)^{-1}r, c\lambda^{-1}, c\ell^{-1})$) y $r\ell^{-1}$, respectivamente ([3], p. 406, Spectral Theorem).

Si Q satisface las condiciones en (c), entonces nuevamente los sólidos en (2) y (3) son esferoides, cuyas secciones circulares a través de 0 y normales a los vectores propios de ℓ , tienen radios $c\lambda^{-1}$ y $r\ell^{-1}$, respectivamente.

Consecuentemente, las elipses en (2) y (3) tienen semiejes en las direcciones B y $A \times B$ de longitudes $(1 - a^{-1})r\ell^{-1}$ y $(1 - a^{-1})r\lambda^{-1}$ (observación 1, parte (iii)), $r\ell^{-1}$ y $r\lambda^{-1}$, respectivamente (Teorema Espectral), donde B es un vector propio correspondiente a ℓ .

Si λ es de multiplicidad tres, entonces $Q = \lambda \text{diag}(1, 1, 1)$ ([1], p.126, Exercise 12), y los sólidos en (2) y (3) son esferas concéntricas en 0 , de radios $c\lambda^{-1}$ y $r\lambda^{-1}$, respectivamente. Por lo cual la base E definida en (2) es circular de radio $(1 - a^{-1})r\lambda^{-1}$ (observación 1, parte (iii) donde $s = (a\lambda)^{-1}r$ y $\alpha = \beta = c\lambda^{-1}$). ■

Corolario 1 *Sea D un dicono truncado elíptico, sólido y cerrado, centralmente simétrico en el origen 0 ; tal que*

- (i) *Su dicono de procedencia tiene ápices a una distancia h de 0 .*
- (ii) *$\pm C$ son los centros de las bases de D .*
- (iii) *P_1 y P_2 son dos puntos dados en la frontera relativa de la sección media de D , tales que*

$$\delta = \det(P_1, P_2, C) \neq 0.$$

Sea W la matriz cuadrada, no-singular, de orden tres con primera, segunda y tercera columnas $a(P_2 \times C)^T$, $a(-P_1 \times C)^T$, $(P_1 \times P_2)^T$, respectivamente,

donde $a = h \|C\|^{-1} > 1$. Entonces D es una esfera cerrada unitaria de centro 0, respecto a la norma φ sobre \mathbb{R}^3 definida en (1), para la cual, además de dicho a , tomamos

$$A = |\delta|^{-1} CO\Lambda O^T \quad \text{y} \quad Q = a^{-1} |\delta|^{-1} O\Lambda O^T, \quad (5)$$

donde O es la matriz ortogonal de orden tres, cuyas primera, segunda y tercera columnas forman un conjunto completo de vectores propios ortonormales de WW^T , correspondientes a sus valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$; y donde

$$\Lambda = \text{diag} \left(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \sqrt{\lambda_3} \right).$$

Proof. De hecho $C \neq 0$ por ser $\delta \neq 0$, por lo cual a está bien definido. Ahora, dado que 0, C y V son colineales (C entre 0 y V), donde $V = aC$ es uno de los ápices del dicono de procedencia de D , entonces $a = h \|C\|^{-1} > 1$. (En un cono elíptico con base de centro 0 y ápice V , toda sección elíptica paralela a la base tiene su centro en el segmento \overline{OV}).

Dado que¹

$$\begin{aligned} \det W &= \det W^T \\ &= a^2 \det (P_2 \times C, -P_1 \times C, P_1 \times P_2) \\ &= (A\delta)^2 \neq 0^2, \end{aligned}$$

entonces W es no singular, y así WW^T es una matriz simétrica positivamente definida ([8], p. 282). Más adelante usaremos la expresión

$$XW = \left(aX(P_2 \times C)^T, aX(-P_1 \times C)^T, X(P_1 \times P_2)^T \right) \quad (6)$$

por todo $X \in \mathbb{R}^3$.

De la descomposición $WW = O\Lambda^2 O^T$ obtenemos $a|\delta|Q = O\Lambda O^T$ como la única raíz cuadrada $\left((a|\delta|Q)^2 = WW^T \right)$ simétrica y positivamente definida de WW^T ([8], pp. 283-285). Si tomamos A como en 5, entonces A es un vector unitario y

$$P_i Q A^T = a^{-1} \delta^{-2} P_i (O\Lambda^2 O^T) C^T =$$

¹Recuérdese la identidad

$$(A \times B) \times (C \times D) = (A \times B \cdot D^T) C - (A \times B \cdot C^T) D.$$

$$\begin{aligned}
&= a^{-1}\delta^{-2}P_iWW^TC^T \\
&= a^{-1}\delta^{-2}(P_iW)(CW)^T \\
&= 0,
\end{aligned}$$

para $i = 1, 2$ (aplicando (6)). Análogamente se prueba que $CQA^T = a^{-1}$. Además

$$P_iQ^2P_i^T = (a\delta)^{-1}\|P_iW\|^2 = 1, \quad i = 1, 2.$$

Por tanto las relaciones en (3) y (2) describen (para $r = 1$) la sección media y una de las bases (simétricas con respecto a 0) de D , en este caso.

El dicono truncado elíptico $S_1[0]$, respecto a la norma φ definida en (1), con A y Q como en (5), y $a = h\|C\|^{-1}$, tiene bases de centros

$$\begin{aligned}
\pm a^{-1}AQ^{-1} &= \pm a^{-1}\{|\delta^{-1}|CO\Lambda O^T\}\{a^{-1}|\delta^{-1}|O\Lambda O^T\}^{-1} \\
&= \pm a^{-1}a(CO\Lambda O^T)\{(O^T)^{-1}\Lambda^{-1}O^{-1}\} \\
&= \pm C,
\end{aligned}$$

y bases y sección media representadas, justamente, como las de D (Teorema 1). Luego los diconos truncados D y $S_1[0]$ son iguales. ■

Ilustración 1

Sean $P_1 = (\sqrt{6}, 0, 0)$ y $P_2 = (0, \frac{\sqrt{6}}{2}, 0)$ dos puntos en la frontera relativa de la sección media elíptica

$$\{(x_1, x_2, 0) \mid x_1^2 + 4x_2^2 \leq 6\},$$

de un dicono truncado recto, cuyas bases tienen centros $\pm C$, donde $C = (0, 0, \frac{\sqrt{6}}{9})$. Su dicono de procedencia tiene ápices a una distancia $\frac{\sqrt{6}}{3}$ del origen 0.

En este caso, las expresiones

$$\begin{aligned}
h &= \frac{\sqrt{6}}{3}, & a &= \frac{\sqrt{6}}{3} \left(\frac{\sqrt{6}}{9}\right)^{-1} = 3, \\
\delta &= \det(P_1, P_2, C) = \frac{\sqrt{6}}{3}, & P_2 \times C &= \left(\frac{1}{3}, 0, 0\right), \\
-P_1 \times C &= \left(0, \frac{2}{3}, 0\right), & P_1 \times P_2 &= (0, 0, 3), \\
W &= \text{diag}(1, 2, 3), & WW^T &= \text{diag}(1, 4, 9), \\
O &= \text{diag}(1, 1, 1), & \Lambda &= \text{diag}(1, 2, 3),
\end{aligned}$$

se refieren al Corolario 1, donde la i -ésima fila de O es un vector propio de WW^T correspondiente a su valor propio $\lambda_i = i^2$, $i = 1, 2, 3$. Obtenemos así de (5)

$$A = (0, 0, 01) \quad \text{y} \quad Q = \frac{\sqrt{6}}{6} \text{diag}(1, 2, 3).$$

De este modo los valores propios de Q son $\frac{\sqrt{6}}{2}$, $\frac{\sqrt{6}}{6}$, $\frac{\sqrt{6}}{3}$; al primero corresponde A como vector propio, y a los otros dos los vectores coordenados unitarios que orientan los semiejes de las bases y de la sección media del sólido truncado. Hecho que ilustra también las partes (iii), (a) del Teorema 2.

Finalmente, los puntos (x_1, x_2, x_3) de nuestro dicono truncado (como sólido cerrado) verifican su inecuación

$$\text{máx} \left\{ \sqrt{x_1^2 + 4x_2^2} + 3|x_3|, 9|x_3| \right\} \leq \sqrt{6}.$$

Corolario 2 Si Q es una matriz simétrica positivamente definida de orden tres, entonces las siguientes dos afirmaciones son equivalentes:

- (i) λ es un valor propio de Q de multiplicidad tres;
- (ii) La esfera cerrada $S_r[0]$ de centro el origen y radio $r > 0$ (respecto a la norma φ definida en (1)) es un dicono truncado circular recto, con sección media de radio $r\lambda^{-1}$, y bases con centros $\pm(a\lambda)^{-1}rA$ y radio $(1 - a^{-1})r\lambda^{-1}$.

Proof. Si λ es de multiplicidad tres entonces $Q = \lambda \text{diag}(1, 1, 1)$ y $AQ = \lambda A$. Se sigue de inmediato la afirmación (ii) en virtud del Teorema 2, (iii), (d).

Recíprocamente, al asumir (ii) entonces $(a\lambda)^{-1}rA = -a^{-1}rAQ^{-1}$ o $(a\lambda)^{-1}rA = a^{-1}rAQ^{-1}$ (Teorema 1). Si $(a\lambda)^{-1}rA = -a^{-1}rAQ^{-1}$ entonces $-\lambda < 0$ sería un valor propio de Q !. Por tanto sólo ocurre $(a\lambda)^{-1}rA = a^{-1}rAQ^{-1}$, esto es, λ es un valor propio de Q al cual corresponde A como vector propio.

Si λ es un valor propio simple, entonces los otros dos valores propios de Q son iguales, es decir, Q tiene un valor propio μ de multiplicidad dos (de lo contrario $S_r[0]$ no sería circular; Teorema 2 (iii), (a)). Pero entonces $r\mu^{-1} = r\lambda^{-1}$ (Teorema 2, (iii), (b)) implica $\mu = \lambda$, lo cual es imposible.

Se sigue que λ tiene multiplicidad ≥ 2 . De acuerdo al Teorema 2 (iii), (c), λ no puede ser de multiplicidad dos (de lo contrario $S_r[0]$ no sería circular). Concluimos que λ tiene multiplicidad tres. ■

Observación 2 *En todo elipsoide*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a > b > c > 0,$$

existen cuatro puntos sobre su superficie (los puntos umbilicales) de modo que los planos tangentes en dichos puntos son paralelos a las secciones cíclicas del elipsoide (es decir, a los planos que cortan al elipsoide en circunferencias).

Las rectas normales al elipsoide en los puntos umbilicales pasan por su centro y son paralelas a los vectores

$$N = \left(c\sqrt{a^2 - b^2}, 0, \pm a\sqrt{b^2 - c^2} \right)$$

([9], pp.105, 253, Ejercicio 12).

Este importante resultado de Geometría Diferencial Clásica nos ayudará a responder la pregunta: Si la matriz Q tiene valores propios diferentes, ¿cómo debe ser A para que la esfera $S_r[0]$ sea un dicono truncado circular?

Teorema 3 *Sea Q una matriz simétrica positivamente definida de orden tres, y valores propios $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ a los que corresponden los vectores propios unitarios Q_1, Q_2, Q_3 . Entonces las siguientes dos afirmaciones son equivalentes:*

- (i) *La esfera cerrada $S_r[0]$ de centro el origen y radio $r > 0$ (respecto a la norma φ definida en (1)) es un dicono truncado circular;*
- (ii)

$$A = \frac{\lambda_3}{\lambda_2} \sqrt{\frac{\lambda_2^2 - \lambda_1^2}{\lambda_3^2 - \lambda_1^2}} Q_1 \pm \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \sqrt{\frac{\lambda_3^2 - \lambda_2^2}{\lambda_3^2 - \lambda_1^2}} Q_3. \quad (7)$$

En este caso el dicono truncado no es recto, con bases de radio $(1 - a^{-1})r\lambda_2^{-1}$ y sección media de radio $r\lambda_2^{-1}$.

Proof. Asumamos la afirmación (i). Sea L la matriz ortogonal de orden tres cuya i -ésima columna es Q_i^T , y consideremos la rotación $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$Y = g(X) = XL, \quad \text{para todo } X \in \mathbb{R}^3. \quad (8)$$

Entonces $Q = L\Lambda L^T$, $Q^2 = L\Lambda^2 L^T$ y el elipsoide sólido representado en (3) es congruente al elipsoide

$$Y\Lambda^2 Y^T = \lambda_1^2 y_1^2 + \lambda_2^2 y_2^2 + \lambda_3^2 y_3^2 \leq r^2, \quad Y = (y_1, y_2, y_3),$$

dado que

$$XQ^2X^T = (XL)\Lambda^2(XL)^T = Y\Lambda^2Y^T,$$

donde Λ es la matriz diagonal cuya diagonal está formada por los valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Por tanto $g(AQ)$ es un vector normal a la imagen bajo g de la región E_0 (asumida circular) definida en (3), y así

$$g(AQ) = AQL = AL\Lambda = (\lambda_1AQ_1^T, \lambda_2AQ_2^T, \lambda_3AQ_3^T) \quad (9)$$

es paralelo (y de igual longitud) a uno de los vectores

$$\begin{aligned} & \lambda_1\lambda_2\lambda_3 (\lambda_3^2 - \lambda_1^2)^{-1/2} \|g(AQ)\| N = \\ & = (\lambda_3^2 - \lambda_1^2)^{-1/2} \|g(AQ)\| \left(\sqrt{\lambda_2^2 - \lambda_1^2}, 0, \pm \sqrt{\lambda_3^2 - \lambda_2^2} \right), \end{aligned}$$

donde

$$N = (\lambda_1\lambda_2\lambda_3)^{-1} \left(\sqrt{\lambda_2^2 - \lambda_1^2}, 0, \pm \sqrt{\lambda_3^2 - \lambda_2^2} \right)$$

es el vector dado en la observación 2 con $a = \lambda_1^{-1} > b = \lambda_2^{-1} > c = \lambda_3^{-1}$.

Al igualar las segundas componentes de ambos vectores aparece arriba $AQ_2^T = 0$ y A es ortogonal a Q_2 el cual con Q_1 y Q_3 son mutuamente ortonormales (todos los valores propios de Q son diferentes). Existen escalares s y t tales que $A = sQ_1 + tQ_3$ lo que implica $s^2 + t^2 = 1$, $AQ_1^T = s$ y $AQ_3^T = t$.

Igualando los cuadrados de las primeras componentes resulta

$$\lambda_1^2 (\lambda_3^2 - \lambda_2^2) s^2 + \lambda_3^2 (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) t^2 = 0,$$

que junto con $s^2 + t^2 = 1$ forman un sistema simultáneo de solución

$$s^2 = \frac{\lambda_3^2 (\lambda_2^2 - \lambda_1^2)}{\lambda_2^2 (\lambda_3^2 - \lambda_1^2)} \quad \text{y} \quad t^2 = \frac{\lambda_1^2 (\lambda_3^2 - \lambda_2^2)}{\lambda_2^2 (\lambda_3^2 - \lambda_1^2)}.$$

Puesto que A y $-A$ producen la misma norma φ definida en (1), entonces basta tomar

$$s = \frac{\lambda_3}{\lambda_2} \sqrt{\frac{\lambda_2^2 - \lambda_1^2}{\lambda_3^2 - \lambda_1^2}} \quad \text{y} \quad t = \pm \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \sqrt{\frac{\lambda_3^2 - \lambda_2^2}{\lambda_3^2 - \lambda_1^2}}.$$

Recíprocamente, si A satisface (7) entonces puede verificarse (usando (9)) que $g(AQ)$ es paralelo a N y por tanto (de acuerdo a la observación 2) que la imagen bajo g de la región elíptica E_0 definida en (3) es circular.

De acuerdo a (7) A es una combinación lineal de Q_1 y Q_3 y, como tal, no puede ser un vector propio de Q . Se sigue de la parte (iii) del Teorema 2 que $S_r[0]$ es un dicono truncado no recto.

Finalmente, de acuerdo a la parte (ii) del Teorema 2, el dicono truncado tiene bases de radio $(1 - a^{-1})r\lambda_2^{-1}$ y sección media de radio $r\lambda_2^{-1}$. ■

Ilustración 2

Consideremos los círculos

$$E = \left\{ \left(x_1, x_2, \frac{1}{2} \right) \mid \left(x_1 - \frac{3}{4} \right)^2 + x_2^2 \leq \frac{1}{4} \right\}$$

y

$$E_0 = \{ (x_1, x_2, 0) \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1 \},$$

de centros $C = (\frac{3}{4}, 0, \frac{1}{2})$ y 0 , respectivamente. Tratemos entonces con el dicono truncado circular de bases $\pm E$ y sección media E_0 , para el cual su dicono de procedencia tiene ápices a una distancia $\frac{\sqrt{13}}{2}$ de 0 .

Entonces los puntos $P_1 = (1, 0, 0)$ y $P_2 = (0, 1, 0)$ están en la frontera relativa de E_0 . Atendiendo al Corolario 1 hallamos

$$\begin{aligned} h &= \frac{\sqrt{13}}{2}, & a &= \frac{\sqrt{13}}{2} \left(\frac{\sqrt{13}}{4} \right)^{-1} = 2, \\ \delta &= \det(P_1, P_2, C) = \frac{1}{2}, & P_2 \times C &= \left(\frac{1}{2}, 0, -\frac{3}{4} \right), \\ -P_1 \times C &= \left(0, \frac{1}{2}, 0 \right), & P_1 \times P_2 &= (0, 0, 1), \end{aligned}$$

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$WW^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & \frac{13}{4} \end{pmatrix},$$

$$O = O^T = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix},$$

$$\Lambda = \text{diag} \left(\frac{1}{2}, 1, 2 \right),$$

siendo la primera, segunda y tercera filas de O vectores propios de WW^T correspondientes a los valores propios $\frac{1}{4}$, 1 y 4. Las expresiones en (5) nos presentan

$$A = \frac{1}{5}(3, 0, 4)$$

y

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & 0 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{3}{5} & 0 & -\frac{17}{10} \end{pmatrix},$$

cuyos valores propios son $\lambda_1 = \frac{1}{2} < \lambda_2 = 1 < \lambda_3 = 2$.

Pueden verificarse en este caso la expresión (7), como la ocurrencia de todas las partes del Teorema 3.

Además descubrimos la inecuación de nuestro dicono truncado (como sólido cerrado), a saber

$$\text{máx} \left\{ \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \frac{9}{4}x_3^2 - 3x_1x_3 + |x_3|}, 2|x_3| \right\} \leq 1,$$

para todo (x_1, x_2, x_3) en el sólido.

Observación 3 *Se desprende de la observación 2 que si un elipsoide tiene exactamente dos semiejes iguales, entonces sus únicas secciones planas circulares son normales al tercer eje.*

Teorema 4 *Sea Q una matriz simétrica positivamente definida de orden tres con un valor propio μ de multiplicidad dos y λ el otro valor propio. Entonces las siguientes dos afirmaciones son equivalentes:*

- (i) *La esfera cerrada $S_r[0]$ de centro el origen y radio $r > 0$ (respecto a la norma φ definida en (1)) es un dicono truncado circular;*
- (ii) *A es un vector propio unitario de Q correspondiente a λ .*

En este caso el dicono truncado es recto con bases de radio $(1 - a^{-1})r\mu^{-1}$ y centros $\pm (a\lambda)^{-1}rA$, sección media de radio $r\mu^{-1}$.

Proof. Sean Q_1, Q_2, Q_3 un conjunto completo de vectores propios ortonormales de Q correspondientes los dos primeros a μ , y Q_3 a λ ([8], pp.263, 265).

Si $S_r[0]$ es un dicono truncado circular y g es la rotación definida en (8) (en este caso $\mu = \lambda_1 = \lambda_2$, $\lambda = \lambda_3$), entonces $g(AQ)$ es un vector normal a la imagen bajo g de la región E_0 (asumida circular) representada en (3), y

$$g(AQ) = (\mu AQ_1^T, \mu AQ_2^T, \lambda AQ_3^T).$$

De acuerdo a la observación 3 este vector $g(AQ)$ debe ser paralelo al vector coordenado $(0, 0, 1)$, de donde A, Q_1, Q_2 son ortonormales, y así $A = \pm Q_3$.

Recíprocamente, si A es un vector propio de Q correspondiente a λ se sigue de (b) en la parte (iii) del Teorema 2 que $S_r[0]$ es un dicono truncado circular recto con bases de radio $(1 - a^{-1})r\mu^{-1}$ y centros $\pm (a\lambda)^{-1}rA$, sección media de radio $r\mu^{-1}$. ■

Ilustración 3

Para $a > 1$ y $b > 0$ consideremos los círculos

$$E = \{(x_1, x_2, a^{-1}b) \mid x_1^2 + x_2^2 \leq (1 - a^{-1})^2\}$$

y

$$E_0 = \{(x_1, x_2, 0) \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1\},$$

de centros $C = (0, 0, a^{-1}b)$ y 0 , respectivamente. Sea D el dicono truncado circular de bases $\pm E$ y sección media E_0 , para el cual su dicono de procedencia tiene ápices a una distancia b de 0 . Si P_1 y P_2 son los puntos dados en la ilustración 2, entonces el Corolario 1 nos da para D ,

$$\begin{aligned} h &= b, & \delta &= \det(P_1, P_2, C) = a^{-1}b, \\ P_2 \times C &= (a^{-1}b, 0, 0), & -P_1 \times C &= (0, a^{-1}b, 0), \\ P_1 \times P_2 &= (0, 0, 1), & W &= \text{diag}(b, b, 1), \\ WW^T &= \text{diag}(b^2, b^2, 1), & \det(WW^T - \lambda I) &= -(\lambda - b^2)^2(\lambda - 1). \end{aligned}$$

Si $b = 1$ entonces $\lambda = 1$ es un valor propio de multiplicidad tres $Q (= WW^T = \Lambda = \text{diag}(1, 1, 1))$, y $A = (0, 0, 1)$, según (5). Estos resultados nos remiten al Corolario 2.

Si $b \neq 1$, entonces esta vez

$$O = O^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\Lambda = \text{diag}(b, b, 1),$$

donde la primera y segunda filas de O son vectores propios de WW^T correspondientes al valor propio doble b^2 , y la tercera fila un vector propio correspondiente al valor propio simple 1. Además aparecen en (5)

$$A = (0, 0, 1) \quad \text{y} \quad Q = \text{diag}(1, 1, b^{-1})$$

con un valor propio de multiplicidad dos $\mu = 1$, y con un valor propio simple $\lambda = b^{-1}$ al cual corresponde A como vector propio unitario. Este caso ilustra la equivalencia del Teorema 4.

Finalmente el siguiente corolario nos revela la norma euclídea en \mathbb{R}^2 como la integral sobre $[0, \pi]$ del valor absoluto de un producto interior de vectores.

Otro procedimiento geométrico que lleva al mismo resultado puede indagarse en [6], pp. 151–153.

Corolario 3 Si $\|\cdot\|$ denota la norma euclídea en \mathbb{R}^2 entonces

$$\|X\| = \frac{1}{2} \int_0^\pi |X(\cos t, \sin t)^T| dt, \quad (10)$$

para todo $X \in \mathbb{R}^2$.

Proof. Si $Q = \text{diag}(1, 1, 1)$ entonces aparece en (1) la norma

$$\varphi(X) = \text{máx} \{ \|A \times X\| + |XA^T|, a |XA^T| \},$$

respecto a la cual consideramos la esfera cerrada unitaria $S_1[0]$, o dicono truncado circular recto con bases de centros $\pm a^{-1}A$ y radio $1 - a^{-1}$, y sección media de radio unidad (Corolario 2).

Si B en \mathbb{R}^3 es tal que A y B son vectores ortonormales, entonces la función $\varphi' : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi'(X) = \text{máx} \left\{ \frac{1}{2} \int_0^\pi |X(\sin tB, \cos tA \times B)^T| dt + |XA^T|, a |XA^T| \right\},$$

para todo $X \in \mathbb{R}^3$, es también una norma sobre \mathbb{R}^3 . En efecto, $\varphi'(X) = 0$ es equivalente a

$$X(\sin tB, \cos tA \times B)^T = 0, \quad \text{para todo } t \in [0, \pi],$$

y

$$XA^T = 0.$$

De aquí el sistema de ecuaciones homogéneas

$$X(A \times B)^T = 0, \quad XA^T = 0, \quad XB^T = 0,$$

con determinante $\det(A \times B, A, B) = 1$ y solución única $X = 0$. Las otras propiedades que hacen de φ' una norma son inmediatas.

Con una treta similar a la usada en el Teorema 1 se demuestra que la esfera cerrada unitaria de centro 0, respecto a φ' , es justamente el disco truncado $S_1[0]$. Por la unicidad de φ determinada por el cuerpo normado $S_1[0]$ ([5], pp. 131–132, Theorem 15.2) concluimos $\varphi' = \varphi$.

De este modo tomando $A = (0, 0, 1)$ y $B = (1, 0, 0)$, y observando así que

$$\|(x_1, x_2)\| = \|(-x_2, x_1, 0)\| = \|A \times (x_1, x_2, 0)\|,$$

obtenemos $\varphi(x_1, x_2, 0) = \varphi'(x_1, x_2, 0)$ esto es, la igualdad en (10).

Referencias

- [1] APOSTOL TOM M., *Calculus*, Vol II, Xerox College Publishing, second edition, 1969.
- [2] BIRKHOFF G., MAC LANE S., *A Brief survey of Modern Algebra*, The Macmillan Company, second edition, 1965.
- [3] ———, *Algebra*, idem, fourth printing, 1970.
- [4] COXETER H.S.M., *Introduction to Geometry*, John Wiley & Sons, Inc., second edition, Wiley Classics Library Edition, Published 1989.
- [5] ROCKAFELLAR R. TYRREL, *Convex Analysis*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1972.
- [6] RUIZ HERNÁNDEZ LUIS ENRIQUE, *Los paralelogonos como esferas respecto a normas sobre \mathbb{R}^2* , Memorias del III Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones (Bogotá, Junio 15–17 de 1992), Universidad Pedagógica Nacional.
- [7] SCHWARTZ ABRAHAM, *Calculus and Analytic Geometry*, Holt Rinehart and Winston, Inc., third edition, 1974.
- [8] STRANG GILBERT, *Algebra Lineal y sus Aplicaciones*, Fondo Educativo Interamericano, S.A., 1982.
- [9] STRUIK DIRK J., *Geometría Diferencial Clásica*, Aguilar S.A., de Ediciones, tercera edición, 1966, primera reimpresión 1970.