Revista INTEGRACIÓN
Universidad Industrial de Santander
Escuela de Matemáticas
Vol. 15, No 1, p. 39–44, enero–junio de 1997

Formulación geométrica del sistema de referencia en la relatividad general

ÁNGEL JOSÉ CHACÓN VELASCO*

Resumen

Se analizan las particularidades de los sistemas de referencia en la teoría general de la relatividad, y se llega a una formulación geométrica completa de todas las magnitudes que caracterizan un sistema de referencia en esta teoría.

Abstract

This paper analyzes the particularities of the frame reference systems in the general theory of relativity; it has been obtained the complete formula of all magnitudes, which characterizes the frame reference system of this theory.

1. Introducción

El sistema de referencia es esencialmente mucho más que una simple convención para marcar los puntos del espacio, que es lo que hacemos básicamente al introducir un sistema de coordenadas en la física. Con el sistema de referencia están relacionados los procesos de medida de los diferentes fenómenos físicos. Los procesos de medida se realizan mediante instrumentos, entre los cuales se encuentran incluidos nuestros sentidos; por tanto, los resultados de dichas mediciones dependen tanto del movimiento de los instrumentos como del carácter del movimiento del observador.

*Escuela de Física, Universidad Industrial de Santander, A.A 678, Bucaramanga, COLOMBIA. (jochave@uis.edu.co)

De acuerdo con lo anterior, cabe preguntarse: ¿cómo comparar las magnitudes físicas medidas por diferentes observadores?; ¿cuáles magnitudes puede el observador medir directamente y cuales sólo indirectamente?; ¿cómo dependen los resultados de la medición del estado de movimiento del observador? Estos interrogantes plantean el problema de una formulación geométrica apropiada del sistema de referencia, lo que no es plenamente resuelto al introducir simplemente el sistema de coordenadas. Tanto en la teoría especial (TER) como en la teoría general de la relatividad (TGR), los conceptos de espacio y tiempo tratados como entidades separadas son reemplazados por el concepto de espacio–tiempo o variedad tetradimensional; sin embargo, la necesidad de establecer una relación entre el modelo del espacio–tiempo y las mediciones de magnitudes físicas concretas hace necesaria una separación de dicha variedad en un subespacio tridimensional o espacio físico y otro unidimensional, el tiempo físico, ambos relacionados con el sistema de referencia. Dicho de otro modo: una separación $3+1$ del espacio–tiempo a través de un método conocido como método del campo τ implica la necesidad de introducir, junto con la geometría del espacio–tiempo, ciertos objetos geométricos que reflejen el carácter del movimiento del observador y de sus instrumentos de medida. Entre los métodos establecidos para la formulación del sistema de referencia se conocen, además del método del campo τ o de las mónadas, el método cronogeométrico o de las magnitudes invariantes cronogeométricas, y otros [1].

2. Características físico–geométricas del sistema de referencia

En términos generales un sistema de referencia es un cuerpo de referencia idealizado, carente de masa pero susceptible de deformación, sobre el cual se ha establecido previamente un sistema de coordenadas apropiado y donde en cada punto es necesario introducir patrones ideales de medición de la longitud y el tiempo. Un reloj mide el tiempo real mientras que un reloj coordenado mide el tiempo de coordenadas. Es necesario que los patrones ideales tengan su prototipo en patrones reales; para un patrón ideal de longitud se toma como prototipo la red cristalina, mientras que para un patrón ideal de tiempo se toman las oscilaciones de los átomos o de las moléculas en la red. En la TER usualmente se utiliza sistemas de referencia inerciales, donde el cuerpo de referencia es considerado como un cuerpo absolutamente rígido, sin rotación e indeformable, por lo que sus líneas de mundo son rectas; sin embargo, y sin que esto implique el paso a la TGR, es posible introducir un sistema no inercial de referencia para la descripción del movimiento. Pero entonces, ¿qué diferencia, en este caso, el movimiento del cuerpo de referencia de un movimiento similar en un sistema de referencia inercial?

Los puntos del cuerpo de referencia se mueven con aceleración siempre y cuando el movimiento del sistema de referencia esté relacionado con un cuerpo de referencia no inercial, lo que implica para el cuerpo de referencia la posibilidad de rotar y de deformarse, comportamiento característico de un cuerpo rígido. La deformación puéde ser de dos tipos: de tensión o compresión y de cizallamiento. Cuando se da deformación por tensión la forma de una determinada configuración inicial de puntos sobre el cuerpo de referencia no varía; por el contrario, si la deformación se da por cizallamiento, varía la configuración inicial de los puntos. Por ejemplo, si inicialmente se marca un conjunto de puntos sobre una esfera, bajo la acción de un esfuerzo que la deforme la esfera se convierte en un elipsoide con una determinada configuración axial. A estos tres aspectos se reduce la caracterización del movimiento de un sistema de referencia. La velocidad angular y la velocidad lineal de un cuerpo rígido están relacionadas por $\nu = \omega \times r$. Tomando el rotacional de esta expresión para un valor constante de r se obtiene $\omega = \frac{1}{2}\nabla \times \nu$, ecuación válida también para un cuerpo deformable.

Para obtener la expresión correspondiente en la TGR se procede de la siguiente manera: se reemplaza la velocidad V por la 4–velocidad V_μ, se generaliza el rotacional tridimensional a tetradimensional, se proyecta sobre un 3–espacio local del sistema de referencia; tomando así el gradiente del campo de 4–velocidades del sistema de referencia o campo de las mónadas $\tau_{\mu,\nu}$, se antisimetriza esta expresión y se proyecta sobre el 3–espacio mediante el proyector b_ν^α, y se obtiene el tensor de velocidad angular característico de la rotación del sistema de referencia, el cual se denota como $A_{\alpha\beta}$ [2].

El vector aceleración del sistema se obtiene antisimetrizando el gradiente anterior y proyectándolo para cada índice en la dirección del tiempo físico del sistema de referencia, o sea, sobre τ^μ; sin embargo, el mismo resultado se obtiene si se proyecta el gradiente covariante de la mónada según los índices de diferenciación sobre la misma mónada.

La deformación es caracterizada por el tensor de velocidad de deformación $D_{\mu\nu}$, que define las proyecciones del gradiente covariante simetrizado sobre el correspondiente 3–espacio. Los anteriores tensores físicos y geométricos nos permiten interpretar físicamente, desde la posición del sistema de referencia, todas las ecuaciones tensoriales y las relaciones propias de la relatividad general.

3. Geometría de la congruencia

Una congruencia se define como un conjunto de líneas de mundo temporales con las siguientes características: *a*) cada línea pasa por uno, y sólo uno, de los puntos del espacio–tiempo; *b*) a cada línea de mundo se le asigna unívocamente un vector tangente o mónada; a la vez estas forman un campo vectorial de 4–velocidades. La congruencia en la variedad tetradimensional se define a través de una familia de líneas que dependen de tres parámetros (uno de ellos, λ, a lo largo de las líneas de mundo), tomando uno solo de los parámetros y denotándolo como σ; se definen dos campos vectoriales: $u = \frac{\partial}{\partial\lambda}$ como σ y $\omega = \frac{\partial}{\partial\sigma}$; la independencia de los parámetros se manifiesta en la relación de conmutación $[u,\omega] = \underset{u}{\pounds}\,\omega = 0$; de modo que las líneas integrales de estos campos pueden servir como líneas coordenadas. Si la línea u es geodésica, $\nabla_u u = 0$; entonces la definición del operador de curvatura,

$$R\,(u,\omega) = \nabla_u\nabla_\omega - \nabla_\omega\nabla_u - \nabla_{[u,\omega]},$$

conduce a la ecuación de Jacobi o ecuación de desviación de las geodésicas, en la forma

$$R\,(u,\omega)\,u = \nabla_u\nabla_u\omega.$$

Denotando como $\nabla_u^F u$ el transporte de Fermi–Walker, es válida la equivalencia de ∇ actuando sobre una función escalar f : $\nabla_u^F f \equiv \nabla_u f \equiv uf = \frac{\partial}{\partial\lambda} f$, de donde se deduce que si $\nabla_u^F v = \nabla_u^F \omega$, entonces $u\,(v\cdot\omega) = 0$, y si $u\cdot v = 0$ entonces, $u\cdot\nabla_u^F v = 0$. Denotando $u = \nabla_u u$ y utilizando la operación de proyección sobre un subespacio local ortogonal a la congruencia u, $p_u = g\varepsilon\cdot u\otimes u$, se obtiene una ecuación del tipo de Jacobi:

$$\nabla_u^F\nabla_u^F v = R\,(u,v)\,u + p_u\left(\nabla_u\,\dot{u},\ \right) + (v\cdot\dot{u})\,\dot{u}\ .$$

Sin embargo, es necesario recordar que el transporte de Fermi–Walker está definido de la forma

$$\delta\cdot v = -\left[\nabla_u v + \varepsilon\cdot u\,(v\nabla_u u) - \varepsilon\cdot\nabla_u u\,(uv)\right]d\lambda,$$

donde $\varepsilon = u\cdot u$, a lo largo de la curva dada sólo para líneas no isotrópicas; en este transporte en particular se conservan los ángulos entre los vectores transportados y los vectores tangentes a la curva, ya que, a diferencia del transporte paralelo, la variación del vector tangente hacia una determinada curva es cero.

Si escribimos la relación

$$u_{\mu,\lambda} = \varepsilon\cdot u_\lambda G_\mu + A_{\lambda\mu} + D_{\lambda\mu},$$

donde todas las magnitudes da la derecha, excepto u, son ortogonales a u, encontramos que $G = u$. Sean A y D las partes antisimétrica y simétrica del resto de la expresión; entonces tenemos que

$$A_{\lambda\mu} + D_{\lambda\mu} = b_{\mu} \cdot \nabla_{b\lambda} u \equiv -u \cdot \nabla_{b\lambda} b_{\mu},$$

de donde el tensor de velocidad de deformación de la congruencia se expresa como

$$D_{\lambda\mu} = -u \cdot \nabla_{b(\lambda} b_{\mu)} = P_{(\lambda} P^{\beta}_{\mu)} u_{\alpha;\beta} = \frac{1}{2} \underset{u}{\pounds} P_{\lambda\mu},$$

donde la derivada de Lie se utiliza no sobre los tensores sino sobre sus componentes, entendiendo tales componentes como coordenadas.

El tensor antisimétrico A que representa la rotación de la congruencia se representa como

$$A_{\lambda\mu} = -u \cdot \nabla_{b[\lambda} b_{\mu]};$$

la igualdad a cero del tensor A es condición necesaria y suficiente para que el subespacio cumpla con la condición de holonomicidad ortogonal a la congruencia u [3].

En el lenguaje invariante de las formas de Cartan, una congruencia como de tiempo es caracterizada por los campos de aceleración

$$G = - * (u \wedge * du),$$

de rotación

$$\omega = \frac{1}{2} * (u \wedge du),$$

y de velocidad en la deformación

$$D_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \underset{u}{\pounds} b_{\mu\nu};$$

lo que permite de forma clara, sintética y general formular las leyes de movimiento para las partículas en la electrodinámica y la gravitación [4, 5].

Referencias

[1] Y. S. Vladímirov, *Sistemas de referencia en la teoría de la gravitación*, Moscú,1982 (en ruso)

[2] Y. S. Vladímirov, N. V. Mitskiévich, Y. Horsky. *Espacio Tiempo y gravitación*, Moscú, 1984 (en ruso).

[3] N. V. MITSKIÉVICH, *Algunas relaciones diferenciales de la geometría de la congruencia*, Revista Universidad Amistad de los Pueblos, "Analogías entre la gravitación y el electromagnétismo", Moscú, 1985 (en ruso).

[4] ÁNGEL JOSÉ CHACÓN V., *Tesis de Maestría: "Aplicaciones astrofísicas de la electrodinámica de los agujeros negros"* UIS, 1994.

[5] N. V. MITSKIÉVICH, G. A. TSALAKOU, *Charged fluid without electric field: a generalization of the G del solution*, Class. Quantum Grav. 8, p. 209–218, 1991.