Revista INTEGRACIÓN
Universidad Industrial de Santander
Escuela de Matemáticas
Vol. 15, No 2, p. 63–75, julio–diciembre de 1997

Condiciones necesarias y suficientes de no oscilación absoluta para una clase de intervalos de matrices de tercer orden

M. NICADO GARCÍA*
R. HING CORTÓN*

Resumen

Mediante la solución de un problema de optimización paramétrica se obtienen condiciones necesarias y suficientes para la no oscilación de una clase de intervalos de matrices de tercer orden, expresadas mediante un número finito de desigualdades algebraicas entre sus parámetros.

1. Introducción

Considérese el sistema de control automático de tercer orden dado por la ecuación

$$\dot{x}= \mathbf{A}_0\mathbf{x} + \mathbf{bu},$$

donde A_0 es una matriz de tamaño $(3,3)$, $\mathbf{b}$ es un vector tridimensional y el control es

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{c}^t\mathbf{x}(t).$$

Sobre los coeficientes del control no se posee una información completa; sólo se conoce que $\mathbf{c} = \mathbf{c}_0 + \mathbf{v}$, donde c_0 está dado y el vector $\mathbf{v}$, que representa las perturbaciones esacionarias, pertenece al paralelepípedo definido por

$$V = \left\{(v_1, v_2, v_3) \mid | v_i | \leq v_i^0\right\}.$$

Este sistema puede ser representado por la ecuación

$$\dot{x}= (A + \mathbf{bv}^t)x, \tag{1}$$

donde $\mathbf{v} \in V$, $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \mathbf{bc}_0^t = [a_{ij}]_{i,j=\overline{1,3}}$ es la matriz nominal del sistema y $\mathbf{bv^t}$ es la matriz de perturbaciones. Se supone que el sistema (1) satisface la condición de controlabilidad,

$$\det\begin{bmatrix}\mathbf{b} & \mathbf{Ab} & \mathbf{A}^2\mathbf{b}\end{bmatrix} \neq \mathbf{0}. \tag{2}$$

---

*Facultad de Matemática, Física y Computación, Universidad Central de las Villas, Santa Clara, CUBA.

La incertidumbre en este modelo puede representarse considerando que la matriz del sistema (1) pertenece al intervalo de matrices

$$\mathcal{A} = \left[a_{ij} - b_j v_j^0, a_{ij} + b_j v_j^0\right]_{i,j=\overline{1,3}}. \tag{3}$$

Se supone que (3) satisface las condiciones necesarias y suficientes de estabilidad asintótica encontradas en [1]. En varios trabajos relacionados con el análisis de la robustez de los sistemas modelados con incertidumbre, se estudia la estabilidad asintótica de los intervalos de matrices [2, 3, 4]. Para las aplicaciones prácticas resulta importante también estudiar la no existencia de soluciones oscilantes, ya que en algunos casos ellas son tecnológicamente inadmisibles. El objetivo de este trabajo es obtener condiciones necesarias y suficientes para que el sistema (1), representado por (3), no tenga soluciones oscilantes.

2. Definiciones y resultados principales

Definición 1 *La solución* $\mathbf{x}(t)$ *de un sistema dinámico* $\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}+\mathbf{b}\mathbf{v}(t)^t)\mathbf{x}$ *es oscilante con relación a la coordenada* x_j*, si* x_j *no es idénticamente nula pero tiene infinitos ceros en el semieje* $[0,\infty)$.

Definición 2 *La solución no trivial* $\mathbf{x}(t)$ *de un sistema dinámico* $\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}+\mathbf{b}\mathbf{v}^t)\mathbf{x}$ *es oscilante, si lo es con relación a todas las coordenadas que no son idénticamente nulas.*

Definición 3 *El sistema dinámico* $\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}+\mathbf{b}\mathbf{v}^t)\mathbf{x}$ *es no oscilante con relación a la coordenada* x_i*, si no tiene ninguna solución oscilante con relación a dicha coordenada. Igualmente podemos definir un sistema dinámico no oscilante, si no tiene ninguna solución que lo sea.*

Definición 4 *El intervalo de matrices* (3) *es no oscilante, si para toda* $\mathbf{v} \in V$ *el sistema dinámico* $\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}+\mathbf{b}\mathbf{v}^t)\mathbf{x}$ *es no oscilante.*

En el caso del intervalo de matrices (3) los sistemas dinámicos son de coeficientes constantes, por lo que la no oscilación depende del comportamiento de los valores propios de las matrices $[\mathbf{A}+\mathbf{b}\mathbf{v}^t]$, $\mathbf{v} \in V$. Si los valores propios son reales, las componentes de cualquier solución pueden ser idénticamente nulas, pero en el caso de no serlo, no pueden tener infinitos ceros, por lo que el sistema es no oscilante. Si hay un par de valores propios que son complejos conjugados, entonces se obtienen soluciones que son oscilantes, ya que las componentes no idénticamente nulas son combinaciones lineales de senos y cosenos. De lo anteriormente expuesto se deduce la proposición siguiente:

Proposición 1 *Una condición necesaria y suficiente para que* (3) *sea absolutamente no oscilante es que*

$$\min_{\mathbf{v}\in V} D(\mathbf{v}) \geq 0, \tag{4}$$

donde $D(\mathbf{v})$ es el discriminante de la ecuación característica:

$$\lambda^3 - \operatorname{tra}(\mathbf{A}+\mathbf{b}\mathbf{v}^t)\lambda^2 + \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{3} (\mathbf{A}+\mathbf{b}\mathbf{v}^t)\begin{pmatrix} i & j \\ i & j \end{pmatrix}\lambda - \det\mathbf{A} = 0. \tag{5}$$

Demostración. Como el sistema (1) es autónomo, la existencia de soluciones oscilantes depende de los valores propios de su ecuación caracteríatica. Si la matriz $[\mathbf{A}+\mathbf{b}\mathbf{v}^t]$, tiene valores propios diferentes de cero, existen soluciones que son combinaciones lineales exponenciales multiplicadas por senos y cosenos, por lo que sus coordenadas no nulas tienen infinitos ceros en $t \in [0,\infty)$. ∎

Para estudiar la oscilación (3) utilizaremos una transformación del espacio de fase que mantenga las propiedades algebraicas y topológicas de las trayectorias. En [5] se demuestra que el sistema de control automático (1) es estrictamente algebraicamente equivalente al sistema

$$\dot{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -P_0 & -Q_0 & -R_0 \end{pmatrix}\mathbf{y} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t),$$

es decir, existe una matriz no singular, constante, $\mathbf{T}$, tal que para $t > 0$ relaciona sus vectores numéricos de fase como $(t, \mathbf{y}) = (t, \mathbf{T}\mathbf{x})$, y esta equivalencia algebraica estricta implica la equivalencia topológica. Aplicando este cambio de base en el espacio de fase (1) obtendremos

$$\dot{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -P_0 & -Q_0 & -R_0 \end{pmatrix}\mathbf{y} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mathbf{v}^t\mathbf{y},$$

que puede escribirse como

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2, \\ \dot{y}_2 &= y_3, \\ \dot{y}_3 &= -P(\mathbf{v})y_1 - Q(\mathbf{v})y_2 - R(\mathbf{v})y_3, \mathbf{v} \in V. \end{aligned}$$

La matriz de transformación $\mathbf{T}$ se obtiene mediante operaciones algebraicas elementales y es igual a

$$\mathbf{T} = \left[\mathbf{A}^2\mathbf{b} - (\operatorname{tra}\mathbf{A})\mathbf{A}\mathbf{b} + \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{3} \mathbf{A}\begin{pmatrix} i & j \\ i & j \end{pmatrix}\mathbf{b} \quad \mathbf{A}\mathbf{b} - (\operatorname{tra}\mathbf{A})\mathbf{b} \quad \mathbf{b} \right]. \tag{6}$$

Es evidente que (6) es algebraicamente equivalente a la matriz de controlabilidad (2) y es por tanto no singular.

La matriz (6) realiza una transformación lineal affín del conjunto de los valores admisibles de las perturbaciones $\mathbf{v}^t = -(P - P_0, Q - Q_0, R - R_0)\,\mathbf{T}^{-1}$, mediante la cual el paralelepípedo V se transforma en el paralelepípedo oblicuo Ω definido por:

$$
\begin{aligned}
\Omega &= \left\{ \begin{array}{c} (P,Q,R) \mid -v_i^0 \le \Delta_{1i}(P-P_0) + \Delta_{2i}(Q-Q_0) + \\ \Delta_{3i}(R-R_0) \le v_i^0 i \end{array} \right\}, \quad i = \overline{1,3}; \\
P_0 &= -\det \mathbf{A}; \qquad Q_0 \\
&= \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{3} \begin{pmatrix} i & j \\ i & j \end{pmatrix}; \qquad R_0 = -\mathrm{tra}\,\mathbf{A}; \qquad (7) \\
-\mathbf{T}^{-1} &= [\Delta_{ij}], \qquad i,j = \overline{1,3}.
\end{aligned}
$$

En virtud de esta transformación,

$$
D(\mathbf{v}) = \left(\frac{R^2 - 3Q}{9}\right)^3 = \left(\frac{3R\,(3Q - R^2) + (R^3 - 27P)}{9}\right)^2 = \overline{D}\,(P,Q,R)\,, \qquad (8)
$$

y podemos demostrar el siguiente lema:

Lema 1 *La función $D(v)$ alcanza sus valores extremos sobre V en la frontera de este paralelepípedo:*

$$
\min_V D(\mathbf{v}) = \min_{\partial V} D(\mathbf{v}) = \min_{\partial \Omega} \overline{D}(P,Q,R).
$$

Demostración. Por la condición necesaria de extremo local, los puntos estacionarios en el interior de V deben satisfacer el sistema:

$$
grad\overline{D}(P.\,Q,R)\mathbf{T} = 0.
$$

Por ser $\mathbf{T}$ no singular,

$$
\frac{\partial D}{\partial R} = \frac{\partial D}{\partial Q} = \frac{\partial D}{\partial P}. \qquad (9)
$$

Este sistema sugiere trabajar sobre el paralelepípedo Ω, donde las expresiones son más sencillas, aunque la definición de la región es más compleja, contrario a lo que sucede en el espacio de las variables v_1, v_2, v_3, donde son más complejas las expresiones pero es mucho más sencilla la región V, y posteriormente obtener $\mathbf{v}$ mediante la transformación (7). En adelante trabajaremos simultáneamente con ambas representaciones. El sistema (9) queda expresado como

$$
\left\{ \begin{array}{l} 27P - 9RQ + 2R^3 = 0, \\ 9PR - 6Q^2 + QR^2 = 0, \\ 9PQ - 6PR^2 + Q^2R = 0. \end{array} \right.
$$

La solución del sistema es la curva

$$C:\begin{cases} P=\frac{R^3}{27}, \\ Q=\frac{R^2}{3}. \end{cases} \tag{10}$$

Analizando la posición de C con respecto al paralelepípedo Ω, se encuentran 2 posibilidades:

1. $C\cap \operatorname{int}\Omega=\emptyset$; por tanto $\overline{D}(P,Q,R)$ no tiene extremos en el $\mathbf{int}\Omega$, por no cumplirse la condición necesaria; y como Ω es compacto, la función debe alcanzar sus extremos en la frontera de Ω.

2. $C\cap \operatorname{int}\Omega\neq\emptyset$; en este caso serán infinitos los puntos estacionarios que se encuentran en $\mathbf{int}\Omega$, pero como C no es un conjunto acotado, no puede estar totalmente contenido en $\mathbf{int}\Omega$, y entonces también hay puntos estacionarios en la frontera del paralelepípedo.

   Como todos los puntos estacionarios satisfacen (10), de la expresión (8) es evidente que $D(\mathbf{v})$ evaluado sobre C es igual a cero, por lo que son de extremos, este mismo valor extremo; se alcanza en la frontera de Ω, y por tanto en la frontera de V, por lo que se puede reducir la búsqueda de estos a la frontera. ∎

Análisis sobre la frontera

Lema 2 *La búsqueda de valores extremos sobre cada una de las caras del paralelepípedo V puede reducirse a la búsqueda de valores extremos sobre las aristas y sobre un conjunto finito de puntos en el interior de la cara.*

Demostración. Sea la cara

$C(i,\gamma)=\{\mathbf{v}\;|v_i=\gamma v_i^0,|v_j|\leq v_j^0,|v_k|\leq v_k^0,\{i,j,k\}=\{1,2,3\}\},\quad i=\overline{1,3},\gamma\in\{-1,1\}.$

Sobre el plano $v_i=\gamma v_i^0$ se verifica que

$$\Delta_{1i}P+\Delta_{2i}Q+\Delta_{3i}R=\gamma v_i^0+\Delta_{1i}P_0+\Delta_{2i}Q_0+\Delta_{3i}R_0=B. \tag{11}$$

Analizaremos varios casos:

I. Si $\Delta_{1i}\neq 0$, entonces de (11) se obtiene $P=B-\frac{\Delta_{2i}}{\Delta_{1i}}$, y la condición necesaria de extremo de $D(\mathbf{v})$ sobre el plano (11) se convierte en

$$\frac{\partial D}{\partial Q}-\frac{\Delta_{2i}}{\Delta_{1i}}\frac{\partial D}{\partial P}=0,\quad \frac{\partial D}{\partial R}-\frac{\Delta_{3i}}{\Delta_{1i}}\frac{\partial D}{\partial P}=0,\quad D(\mathbf{v})=\overline{D}(P(Q,R),Q,R);$$

haciendo $C=\frac{\Delta_{2i}}{\Delta_{1i}}$, $E=\frac{\Delta_{3i}}{\Delta_{1i}}$ y sustituyendo las derivadas, se obtiene el sistema polinómico multivariado:

$$\begin{aligned} f_1= \quad & 6Q^2-QR^2+(27E-9R)(CR-EQ-B) \\ & +E\left(2R^3-9RQ\right)=0, \\ f_2= \quad & -RQ^2+\left(6R^2-9Q+27C\right)(CR-EQ-B) \\ & +C\left(2R^3-9RQ\right)=0. \end{aligned} \tag{12}$$

Denotemos $F = \{f_1, f_2\}$, y consideremos estos polinomios como elementos del anillo de polinomios multivariados, con coeficientes en el campo de las fracciones racionales $Q(B, C, E)$. Hallamos una Base de Groebner para el Ideal(F) y obtenemos:

$$GB = \left\{ \sum_{j=0}^{8} h_{1j} R^j, h_{31} Q + \sum_{j=0}^{7} h_{2j} R^j \right\} = \{g_1, g_2\},$$

donde $h_{ij} = h_{ij}(B, C, E)$ son polinomios.

Como Ideal(F) = Ideal(GB), para analizar las soluciones de (12) podemos hallar las raíces comunes de los dos polinomios en GB. Los coeficientes de estos polinomios son, a su vez, funciones polinómicas de los parámetros, por lo que algunos pueden anularse; esto nos obliga a analizar diferentes alternativas:

1. Si los coeficientes de g_1, g_2 son todos nulos, todos los pares (Q, R) satisfacen el sistema (12), $D(\mathbf{v})$ es constante en la cara $C(i, \gamma)$ y por tanto alcanza sus valores extremos en las aristas de la misma.

2. Si en uno de los dos polinomios el único coeficiente no nulo es h_{10} ó h_{20}, entonces el sistema $g_1 = 0$, $g_2 = 0$, y por ende el sistema (12), es no resoluble; este es el caso en el que el polinomio de grado cero pertenece a GB; entonces, no existen puntos estacionarios en el interior de la cara, y los extremos se alcanzan en las aristas de estas.

   Excluyendo estos dos casos, nos quedan aún las siguientes posibilidades:

3. Todos los coeficientes en g_1 son nulos:

   (a) $h_{31} \neq 0$

   - $h_{2i} = 0$, $i = \overline{1,7}$; entonces existe un único valor de $Q_1 = \frac{h_{20}}{h_{31}}$ que satisface g_2, por lo que todos los pares (Q, R) son soluciones de (12). El conjunto de puntos estacionarios es la recta $Q = Q_1$, paralela al eje $Q = 0$.
   - Existe al menos $h_{2i} \neq 0, i = \overline{1,7}$; entonces, el conjunto de puntos estacionarios es la curva definida por

   $$Q = h_{31}^{-1} \sum_{j=0}^{7} h_{2j} R^j.$$

   (b) $h_{31} = 0$: en este caso, el conjunto de puntos estacionarios está definido por los pares (Q, R), donde Q es arbitrario y las R son las raíces del polinomio

   $$\sum_{j=1}^{7} h_{2j} R^j,$$

   es decir, un conjunto finito de rectas paralelas al eje $R = 0$, definidas por $R = R_i, i = \overline{1,s}, s \leq 7$.

4. Existe un $h_{ij} \neq 0, j = \overline{1,8}$: entonces el polinomio g_1 puede tener un número finito de raíces reales, no más de 8, y debemos analizar dos variantes:

   (a) $h_{31} = 0$: entonces, si la intersección de las raíces reales de g_1 con las raíces reales de $\sum_{j=0}^{7} h_{2j} R^j = 0$ es vacía, el conjunto de puntos estacionarios es vacío, y la función $D(\mathbf{v})$ alcanza sus extremos en las aristas de $C(i, \gamma)$.
   Si hay raíces reales comunes, el conjunto de puntos estacionarios está constituido por las rectas $R = R_i, i = \overline{1,s}, s \leq 7$, donde las R_i son las raíces comunes.

   (b) $h_{31} \neq 0$: entonces por cada $R_i, i = \overline{1,s}, s \leq 8$, raíz real de $g_1 = 0$, encontramos un único valor de Q definido por

$$Q = h_{31}^{-1} \sum_{j=0}^{7} h_{2j} R_i^j, \quad i = \overline{1,s},$$

   por lo que el conjunto de puntos estacionarios sobre el plano (11) es finito y vacío. En este caso los extremos de $D(\mathbf{v})$ sobre la cara pueden estar en los puntos estacionarios contenidos en el interior de ella o sobre sus aristas.

En los casos 3(a), 3(b) y 4(a) obtenemos que el conjunto de puntos estacionarios es infinito; en este último caso está constituido por una o varias (hasta 8) curvas suaves (diferenciables). Si estas curvas no se intersecan con el interior de la cara, entonces no hay puntos estacionarios en este interior y los extremos se alcanzan en la frontera. Si se intersecan con el interior de la cara, entonces intersecan a las aristas, ya que se trata de conjuntos no acotados que no pueden estar contenidos en dicha cara. Veamos ahora que sobre esas curvas $\overline{D}(P(Q,R),Q,R)$ se mantiene constante. Sean (Q_1, R_1) y (Q_2, R_2) dos puntos sobre una de estas curvas que denominaremos Γ; planteemos la integral

$$\begin{aligned} D(P(Q_2,R_2),Q_2,R_2) - D(P(Q_1,R_1),Q_1,R_1) &= \int_\Gamma dD(P(Q,R),Q,R) \\ &= \int_\Gamma f_1(Q,R)dQ + f_2(Q,R)dR = 0, \end{aligned}$$

con lo que queda demostrado que aun cuando existan infinitos puntos estacionarios en el interior de la cara, podemos restringir la búsqueda de extremos a la frontera de la misma.

II. Si $\Delta_{1i} = 0$ y $\Delta_{2i} \neq 0$, entonces de (11) se obtiene $Q = B - \frac{\Delta_{31}}{\Delta_{21}} R$, por lo que $D(\mathbf{v}) = \Big|_{v_i = \gamma_i v_i^0} D\left(P, Q\left(R\right), R\right)$, y la condición necesaria de extremo sobre este plano consiste en

$$\frac{\partial D}{\partial P} = 0, \quad \frac{\partial D}{\partial R} - \frac{\Delta_{3i}}{\Delta_{2i}} \frac{\partial D}{\partial R} = 0;$$

haciendo $C = \frac{\Delta_{3i}}{\Delta_{2i}}$ y sustituyendo las expresiones de las derivadas, se obtiene el sistema polinómico multivariado

$$\begin{cases} f_1 = 6PR^2 - R(CR-B)^2 - 9P(CR-B) = 0, \\ f_2 = 2R^3 + 27P - 9CRP + 6C(CR-B)^2 - (CR-B)(9R - CR^2) = 0. \end{cases}$$

Denotemos $F = \{f_1, f_2\}$; considerando estos polinomios como elementos del anillo de polinomios bivariados con coeficientes en el campo de las fracciones racionales $Q(B,C)$, hallamos una Base de Groebner para el $Ideal(F)$ y obtenemos

$$GB = \left\{ \sum_{j=0}^{5} h_{1j}R^j, h_{31}P + \sum_{j=0}^{4} h_{2j}R^j \right\},$$

por lo que, análogamente al caso I, se obtiene que los puntos extremos sólo pueden alcanzarse sobre las aristas o sobre un conjunto finito de puntos estacionarios en el interior de la cara.

III. Si $\Delta_{1i} = \Delta_{2i} = 0$, entonces por la condición (2) $\Delta_{3i} \neq 0$, y de (11) se obtiene que $R = \frac{B}{\Delta_{3i}}$, por lo que $D(\mathbf{v})$ sobre el plano (11) se convierte en $D(\mathbf{v}) = D(P,Q,B)$ y la condición de extremos está dada por

$$\frac{\partial D}{\partial P} = 0, \quad \frac{\partial D}{\partial Q} = 0.$$

Sustituyendo estas derivadas se obtiene

$$\begin{cases} f_1 = 6Q^2 - B^2Q + 9BP = 0, \\ f_2 = 27P - 2B^3 + 9BQ = 0. \end{cases}$$

La base de Groebner para el $Ideal(F)$, está dada por

$$GB = \left\{9Q^2 - 6B^2Q + B^4, \quad -2B^3 + 27P + 9BQ\right\} = \{g_1, g_2\}.$$

Teniendo en cuenta que el primer polinomio de la base es un cuadrado perfecto, se obtiene una raíz común $\left(\frac{-B^3}{27}, \frac{B^2}{3}\right)$, que no está en el paralelepípedo Ω, ya que si $B < 0$, entonces $R < 0$; si $B > 0$, entonces $P < 0$, por lo que los extremos se alcanzan en los extremos de la cara. ∎

Teorema 1 *El intervalo de matrices* (3) *es absolutamente no oscilante si, y sólo si, se verifica que* $D(\mathbf{v}) \geq 0$ *para el conjunto finito de puntos definidos por:*

1. *Para* $i = \overline{1,3}$ *y* $\gamma_i \in \{-1,1\}, \{i,j,k\} = \{1,2,3\}, j < k,$

$$\Delta_{1i} = (b_k\overline{a}_j - b_j\overline{a}_k)\mathbf{b}; \quad \Delta_{1i} = (b_k\overline{a}_j - b_j\overline{a}_k)\mathbf{A}\mathbf{b} - \Delta_{1i}\mathrm{tra}\,\mathbf{A};$$

$$\Delta_{3i} = (\overline{a}_k\mathbf{b}\overline{a}_j - \overline{a}_j\mathbf{b}\overline{a}_k)(\mathbf{A}\mathbf{b} - \mathbf{b}\mathrm{tra}\,\mathbf{A}) + \Delta_{2i}\mathrm{tra}\,\mathbf{A} - \Delta_{1i}\sum_{\substack{m,n=1\\ m<n}}^{3} \mathbf{A}\begin{pmatrix} m & n \\ m & n \end{pmatrix};$$

$$P_{0i} = -detA - \left(\overline{a}_i\mathbf{Ab} - \overline{a}_i\mathbf{b}\mathrm{tra}\,\mathbf{A} + b_i \sum_{\substack{s,t=1\\ s<t}}^{3} \mathbf{A}\begin{pmatrix} s & t \\ s & t \end{pmatrix} \right) \gamma_i v_i^0;$$

$$Q_{0i} = \sum_{\substack{s,t=1\\ s<t}}^{3} \mathbf{A}\begin{pmatrix} s & t \\ s & t \end{pmatrix} - (\overline{a}_i\mathbf{b} - b_i\mathrm{tra}\,\mathbf{A})\,\gamma_i v_i^0;$$

$$R_{0i} = \mathrm{tra}\,\mathbf{A} - b_i\gamma_i v_i^0,$$

hacer $v_i = \gamma_i v_i^0$ *y*

$$\begin{pmatrix} v_j \\ v_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta_{1j} & \Delta_{2j} & \Delta_{3j} \\ \Delta_{1k} & \Delta_{2k} & \Delta_{3k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P + det\mathbf{A} \\ Q - \sum_{\substack{i,j=1\\ s<t}}^{3} \mathbf{A}\begin{pmatrix} i & j \\ i & j \end{pmatrix} \\ R + \mathrm{tra}\,\mathbf{A} \end{pmatrix},$$

si $|v_j| \le v_j^0, \qquad |v_k| \le v_k^0,$

donde P, Q *y* R *son las raíces reales de*

(a) *el sistema polinómico multivariado*

$$\begin{cases} CQ^2 - QR^2 + (27E - 9R)(CR - EQ - B) + E(2R^3 - 9RQ) = 0, \\ -RQ^2 + (6R^2 - 9Q + 27C)(CR + EQ - B) + C(2R^3 - 9RQ) = 0, \\ P = B - CQ - ER, \end{cases}$$

$$B = CR_{0i} + EQ_{0i} - P_{0i}, \qquad C = \frac{\Delta_{3i}}{\Delta_{1i}}, \qquad E = \frac{\Delta_{2i}}{\Delta_{1i}},$$

si $\Delta_{1i} \neq 0$ *y éste tiene un número finito de raíces;*

(b) *el sistema polinómico multivariado*

$$\begin{cases} 6R^2P - R(CR - B)^2 - 9P(CR - B) = 0, \\ 2R^3 + 27P - 9CRP + 6C(CR - B)^2 - (CR - B)(9R - CR^2) = 0, \\ Q = B - CR, \end{cases}$$

$$B = CR_{0i} + Q_{0i}, \qquad C = \frac{\Delta_{3i}}{\Delta_{2i}},$$

si $\Delta_{1i} = 0$, $\Delta_{2i} \neq 0$ *y éste tiene un número finito de raíces;*

(c) *el sistema polinómico multivariado*

$$\begin{cases} 6Q^2 + B^2Q + 9BP = 0, \\ 27P - 2B^3 + 9BQ = 0, \\ R = B, \end{cases}$$

si $\Delta_{1i} = 0, \Delta_{2i} = 0.$

2. *Para* $i, j = \overline{1,3}$, $\gamma_i, \gamma_j \in \{-1,1\}, \{i,j,k\} = \{1,2,3\}$,

$$P_{0k} = P_{0i} - \left(\overline{a}_j \mathbf{A}\mathbf{b} - \overline{a}_j \mathbf{b} \operatorname{tra} \mathbf{A} + b_j \sum_{\substack{s,t=1 \\ s<t}}^{3} \mathbf{A} \begin{pmatrix} s & t \\ s & t \end{pmatrix} \right) \gamma_j v_j^0, \tag{13}$$

$$Q_{0k} = Q_{0i} - (\overline{a}_j \mathbf{b} - b_j \operatorname{tra} \mathbf{A})\, \gamma_j v_j^0, \qquad R_{0k} = R_{0i} - b_j \gamma_j v_j^0,$$

hacer $v_i = \gamma_i v_i^0$, $v_j = \gamma_j v_j^0$.

(a) *Si* $b_k \neq 0$, *hacer* $v_k = -\frac{1}{b_k}(R - R_{0k})$, *donde* R *son las raíces de la ecuación cúbica*

$$\begin{gathered} 2(C_{2k}^2 - 4C_{1k})R^3 + (3C_{2k}(B_{2k} + 9C_{1k} - 2C_{2k}^2) - 6B_{1k})R^2 + (B_{2k}(B_{2k} \\ +18C_{1k} - 12C_{2k}^2) - 27C_{1k}^2 + 18B_{1k}C_{2k})R + (9B_{1k}(B_{2k} - 3C_{1k}) \\ -6B_{2k}^2 C_{2k}) = 0, \end{gathered} \tag{14}$$

$$C_{1k} = \frac{1}{b_k} \left(\overline{a}_k \mathbf{A}\mathbf{b} - \overline{a}_k \mathbf{b} \operatorname{tra} \mathbf{A} + b_k \sum_{\substack{s,t=1 \\ s<t}}^{3} \mathbf{A} \begin{pmatrix} s & t \\ s & t \end{pmatrix} \right),$$

$$C_{2k} = \frac{1}{b_k} (\overline{a}_k \mathbf{b} - b_k \operatorname{tra} \mathbf{A}), \; B_{1k} = P_{0k} - C_{1k} R_{0k}, \; B_{2k} = Q_{0k} - C_{2k} R_{0k},$$

que satisfacen

$$|v_k| \leq v_k^0 \tag{15}$$

si la ecuación tiene un número finito de soluciones.

(b) *Si* $b_k = 0$ *y* $\overline{a}_k \mathbf{b} - b_k \, Tra\mathbf{A} \neq 0$, *entonces*

$$v_k = -\frac{1}{\overline{a}_k \mathbf{b}} (Q - Q_{0k}),$$

donde Q *son las raíces de la ecuación cuadrática*

$$\begin{gathered} -2B_{4k}^3 C_{3k} + 9B_{3k}B_{4k} - 27B_{3k}C_{3k} - 6Q^2 + \\ (-27C_{3k}^2 + B_{4k}^2 + 18B_{4k}C_{3k})Q = 0, \end{gathered} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} C_{3k} &= \frac{\overline{a}_k \mathbf{A}\mathbf{b} - \overline{a}_k \mathbf{b} \operatorname{tra} \mathbf{A} + b_k \sum_{\substack{s,t=1 \\ s<t}}^{3} \mathbf{A} \begin{pmatrix} s & t \\ s & t \end{pmatrix}}{\overline{a}_k \mathbf{b} - b_k \operatorname{tra} \mathbf{A}}, \\ B_{3k} &= P_{0k} - C_{3k} Q_{0k}, \\ B_{4k} &= R_{0k}, \end{aligned}$$

que satisfacen (15).

(c) *Si* $b_k = \overline{a}_k\mathbf{b} = 0$, *entonces*, $v_k = \frac{P-P_0}{\overline{a}_k\mathbf{A}\mathbf{b}=\mathbf{0}}$,
donde P *son las raíces reales de la ecuación lineal*

$$-27P + 2B_{6k}(-2B_{6k}^2 + 9B_{5k}) = 0, \tag{17}$$

$$B_{5k} = Q_{0k}, \qquad B_{6k} = R_{0k},$$

que satisfacen (15).

3. *Para* $\gamma_i, \gamma_j, \gamma_k \in \{-1, 1\}$, *hacer* $v_i = \gamma_i v_i^0, \quad v_j = \gamma_j v_j^0, \quad v_k = \gamma_k v_k^0.$

Demostración. Por el Lema 2 debemos buscar

$$\min_{\partial V} D(\mathbf{v}) = \min_{\partial\Omega} \overline{D}(P, Q, R).$$

Fijamos una de las caras

$$v_i = \gamma_i v_i^0, \quad \gamma_i \in \{-1, 1\}, \quad i = \overline{1,3}, \quad \{i, j, k\} = \{1, 2, 3\},$$

$$|v_k| \le v_k^0, \quad |v_j| \le v_j^0, \quad j < k.$$

Los resultados 1(a), 1(b) y 1(c), se deducen directamente del Lema 2.
De ellos se obtiene el conjunto de los posibles puntos de extremos en el interior de la cara analizada, el cual puede ser vacío. Pasamos al análisis de las aristas.
Para esto se fija la arista definida por

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(i, j, \gamma_i, \gamma_j) &= \left\{\mathbf{v} \in V \,|v_i = \gamma_i v_i^0, \quad v_j = \gamma_j v_j^0\right\}, \qquad |v_k| \le v_i^0, \\ \{i, j, k\} &= 1, 2, 3 \qquad \gamma_i, \gamma_j \in \{-1, 1\}, \qquad i, j \in \overline{1,3}, \qquad i < j. \end{aligned}$$

Sobre la arista se obtiene que

$$P(\mathbf{v}) = P_{0k} - \left(\overline{a}_k\mathbf{A}\mathbf{b} - \overline{a}_k\mathbf{b}\,\mathrm{tra}\,\mathbf{A} + b_k \sum_{\substack{s,t=1\\ s<t}}^{3} \mathbf{A}\begin{pmatrix} s & t \\ s & t \end{pmatrix}\right) v_k,$$

$$Q(\mathbf{v}) = Q_{0k} - (\overline{a}_k\mathbf{b} - b_k \mathrm{tra}\,\mathbf{A})\, v_k, \tag{18}$$

$$R = R_{0k} - b_k v_k,$$

donde P_{0k}, Q_{0k} y R_{0k} están definidas por (13).

- Si $b_k \neq 0$, entonces a partir de la tercera ecuación de (18) se obtiene

$$v_k = -\frac{1}{b_k}(R - R_{0k}). \tag{19}$$

Sustituimos(19) en P y Q y obtenemos

$$P(\mathbf{v}) = P_{0k} - \left(\overline{a}_k\mathbf{A}\mathbf{b} - \overline{a}_k\mathbf{b}\mathrm{tra}\,\mathbf{A} + b_k \sum_{s,t=1 s<t}^{3} \mathbf{A}\begin{pmatrix} s & t \\ s & t \end{pmatrix}\right)\left(-\frac{1}{b_k}(R - R_{0k})\right),$$

$$Q(\mathbf{v}) = Q_{0k} - (\bar{a}_k\mathbf{b} - b_k \operatorname{tra} \mathbf{A}) \left(-\frac{1}{b_k}(R - R_{0k}) \right). \tag{20}$$

Aplicando la condición necesaria de extremo a la función $D(\mathbf{v})$ evaluada sobre la arista y sustituyendo en esta expresión las expresiones (20), encontramos la ecuación cúbica (14). Las soluciones reales de esta ecuación dependientes de R son sustituidas en (19), obteniendo valores de v_k. Si estos valores se encuentran dentro de la arista, es decir, si se satisface la desigualdad (15), existe un punto estacionario dentro de la arista y se pasa a analizar otra arista.

- Si $b_k = 0$ y $\bar{a}_k\mathbf{b} \neq 0$, podemos, a partir de la segunda ecuación de (18), expresar v_k como

$$v_k = -\frac{1}{\bar{a}_k\mathbf{b}}(Q - Q_{0k}). \tag{21}$$

La expresión (21) sustituida en la primera y tercera ecuación de (18) permite encontrar P y R en función Q:

$$P(\mathbf{v}) = P_{0k} - (\bar{a}_k\mathbf{A}\mathbf{b} - \bar{a}_k\mathbf{b} \operatorname{tra} \mathbf{A}) \left(-\frac{1}{\bar{a}_k\mathbf{b}}(Q - Q_{0k}) \right), \tag{22}$$

$$R(\mathbf{v}) = R_{0k}.$$

Luego de aplicar la condición necesaria de extremo a la función $D(\mathbf{v})$ evaluada sobre la arista, sustituimos (22) y encontramos la ecuación cuadrática (16). Las raíces reales de esta ecuación evaluadas en (21) permiten encontrar valores de v_k que pueden o no encontrarse dentro de la arista, por lo que debemos comprobar la desigualdad (15). Si se satisface esta desigualdad entonces se garantiza que existe un punto estacionario dentro de la arista y se pasa a analizar otra arista.

- Si $b_k = 0 = \bar{a}_k\mathbf{b} = 0$, entonces por la condición de controlabilidad $\bar{a}_k\mathbf{A}\mathbf{b} \neq 0$, y por tanto es posible despejar v_k de la primera ecuación de (18):

$$v_k = -\frac{1}{\bar{a}_k\mathbf{A}\mathbf{b}}(P - P_{0k}). \tag{23}$$

La expresión (23) es sustituida en el resto de las ecuaciones de (18), obteniéndose que

$$Q(\mathbf{v}) = Q_{0k}, \qquad R(\mathbf{v}) = R_{0k}.$$

Estas expresiones son sustituidas en la expresión que se obtiene al aplicar la condición necesaria de extremo a la función $D(\mathbf{v})$ evaluada sobre la arista, encontrando la ecuación (17), que es una ecuación lineal. La solución de esta ecuación es sustituida en (23) y obtenemos el valor de v_k; este puede o no encontrarse sobre la arista, es decir, es necesario comprobar la desigualdad (15). Si se satisface esta desigualdad, entonces se garantiza que existe un punto estacionario dentro de la arista y se puede pasar a analizar otra arista.

Después de analizar todas las aristas, analizamos los vértices, que son los puntos descritos en el caso III.

Si en todos estos puntos se satisface que $D(\mathbf{v}) \geq 0$, entonces el intervalo de matrices $\mathcal{A}$ es no oscilante.

Podemos observar que el número de puntos en los que se evalúa $D(\mathbf{v})$ no excede de 92, ya que en cada cara se obtendrían como máximo 8 pares de valores reales, para un total de 48 evaluaciones; en cada arista como máximo se obtienen tres valores reales para un total de 36 evaluaciones, más los 8 vértices, por lo que existen condiciones para diseñar un algoritmo.

3. Conclusiones

En este trabajo se han demostrado condiciones necesarias y suficientes para la no oscilación absoluta de una clase de intervalos de matrices de tercer orden. Las mismas han sido algoritmizadas para lograr que sean de fácil manejo en cálculos ingenieriles. El algoritmo fue implementado y comprobado en diferentes ejemplos numéricos.

Referencias

[1] Hing R., Nicado M. *On necessary conditions for the asymptotic stability of interval matrices.* Investigación de Operaciones, Universidad de La Habana, 1998.

[2] Argoun M. B. "On sufficient conditions for the stability of interval matrices." *INT. J. CONTROL*, 1986, Vol. 44, No.5, 1245-1250.

[3] Chung-Li J. "Sufficient conditions for the asymptotic stability of interval matrices." *INT. J. CONTROL*, 1987, Vol. 46,5,1803.

[4] Bauer P. H., Premaratne K., Durán J. A. "Necessary and sufficient condition for robust asymptotic stability of time-variant discrete systems." *IEEE Trans. on Automatic Control,* Vol. 38, No. 9. 1993.

[5] Butkovskii A. G. *Fásovie portrieti upravliáemij sistiem.* Naúka, 1985 (en ruso).