Revista INTEGRACIÓN
Universidad Industrial de Santander
Escuela de Matemáticas
Vol. 15, No 2, p. 77–87, julio–diciembre de 1997

Un modelo de sorción dinámica con coeficiente de difusión variable

HENRY LAMOS ||
YANETH ORELLANA**

Resumen

En el presente trabajo se demuestran las propiedades de un modelo matemático de sorción dinámica con cinética de difusión mixta; en particular, se demuestran la positividad y negatividad de las derivadas parciales de la solución y la dependencia continua de la solución del coeficiente $\beta(\xi)$, y se presentan algunos experimentos numéricos.

1. Introducción

La sorción consiste en la división de la sustancia sorbida (de sus componentes químicos) en fases (es decir, el movimiento de sustancias disueltas de un estado solvente a uno sorbente, o de material sorbente).

La división de sustancias disueltas en fases está condicionada por la afinidad relativa de dichas sustancias respecto al solvente y al sorbente, afinidad que es fundamentalmente un fenómeno molecular y se encuentra en función de una gran variedad de mecanismos químicos, físicos y electrostáticos.

La absorción (adsorción) de los gases en los líquidos (sólidos) es una de las técnicas más utilizadas para controlar la composición de los gases residuales industriales antes de su descarga en la atmósfera.

La limpieza de residuos por el método de absorción consiste en dividir la mezcla gaseosa en componentes; a través de la absorción uno o varios de los componentes de la mezcla gaseosa (absorbato) quedan atrapados por un sorbente líquido (absorbente) que conduce a la formación de una solución.

||Profesor Titular, Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander, A.A. 678, Bucaramanga, COLOMBIA.

**Profesora Asistente Universidad Autónoma de Bucaramanga, A.A. 1642, Bucaramanga, COLOMBIA.

El método de adsorción está fundamentado sobre las propiedades físicas de ciertos cuerpos sólidos, con una estructura ultramicroscópica, de extraer selectivamente y concentrar sobre su superficie componentes de la mezcla gaseosa. En calidad de adsorbentes se eligen sustancias que tengan un área de superficie grande por masa unitaria.

El presente trabajo está dedicado al estudio de las propiedades de un modelo matemático de la sorción dinámica con cinética de difusión mixta [7].

2. Planteamiento del modelo matemático

Supóngase que una columna cilíndrica de sección transversal constante (el eje del cual lo tomamos como el eje de coordenadas x), se llena uniformemente con granos de un sorbente (con coeficiente de porosidad igual a $\kappa \in (0,1)$), y se hace pasar por ella un gas con velocidad contante igual ν_1 bajo temperatura constante. La concentración del gas en la entrada de la columna es igual a $\mu(t)$. Imaginemos el grano dividido en dos partes: la superficie del grano, con volumen α_0, se considerará como una de las partes, en la cual la concentración del gas absorbido es igual $v(x,t)$; y la otra, la parte interna del grano, con volumen igual a $(1-\alpha_0)$ y concentración $c(x,t)$. Condicionalmente consideraremos que el proceso de difusión externo está unido con la capa superficial, y que el intercambio entre capas en el sorbente está ligado con el proceso de difusión interno. Representemos por $u(x,t)$ la concentración del gas en el flujo, por $a(x,t)$ la concentración del gas absorbido y por $y(x,t)$ la concentración en equilibrio con la concentracioń $v(x,t)$ en la parte de la superficie del grano. El proceso de absorción dinámica con cinética de difusión mixta, la cual no está en equilibrio, puede ser descrito por el siguiente problema:

$$
\begin{aligned}
\nu u_x(x,t) + a_t(x,t) &= 0, && (x,t) \in Q_T, && (1)\\
a_t(x,t) &= \beta(u(x,t) - y(x,t)), && (x,t) \in Q_T, && (2)\\
v(x,t) &= f(y(x,t)), && (x,t) \in Q_T, && (3)\\
a(x,t) &= \alpha_0 v(x,t) + (1-\alpha_0)c(x,t), && (x,t) \in Q_T, && (4)\\
c_t(x,t) &= \gamma_0(v(x,t) - c(x,t)), && (x,t) \in Q_T, && (5)\\
u(0,t) &= \mu(t), && 0 \le t \le T, && (6)\\
a(x,0) &= c(x,0) = 0, && 0 \le x \le l; && (7)
\end{aligned}
$$

aquí $Q_T = \{(x,t) : 0 \le x \le l, \quad 0 \le t \le T\}$, $\nu = \nu_1 \frac{\kappa}{1-\kappa}$, β, γ_0 son los coeficientes cinéticos positivos de difusión externa y de difusión interna respectivamente, α_0 es una constante también positiva, $\alpha_0 < 1$, y la isoterma de sorción $f(\xi)$ es una función monótona creciente tal que $f(0) = 0$.

Consideremos que en el modelo $(1)-(7)$ el coeficiente β es función de la concentración u.

Antes de pasar a la investigación de este modelo hagamos algunas transformaciones en él. Representemos por $F(\xi)$ la función inversa a $f(\xi)$. Realizando transformaciones simples, escribimos a $(1)-(7)$ de la siguiente forma:

$$\nu u_x(x,t)+\beta(u)(u(x,t)-y(x,t))=0, \qquad (x,t)\in Q_T, \tag{8}$$

$$a_t(x,t)=\beta(u)(u(x,t)-y(x,t)), \qquad (x,t)\in Q_T, \tag{9}$$

$$y(x,t)=F(v(x,t)), \qquad (x,t)\in Q_T, \tag{10}$$

$$c(x,t)=\frac{1}{(1-\alpha_0)}a(x,t)-\frac{\alpha_0}{(1-\alpha_0)}v(x,t), \qquad (x,t)\in Q_T, \tag{11}$$

$$c_t(x,t)=\gamma_0(v(x,t)-c(x,t)), \qquad (x,t)\in Q_T, \tag{12}$$

$$u(0,t)=\mu(t), \qquad 0\le t\le T, \tag{13}$$

$$a(x,0)=c(x,0)=0, \qquad 0\le x\le l. \tag{14}$$

Despejando de $(8)-(12)$ las funciones $y(x,t)$ y $c(x,t)$, obtenemos las siguientes ecuaciones para $u(x,t)$, $a(x,t)$ y $v(x,t)$:

$$\nu u_x(x,t)+\beta(u)(u(x,t)-F(v(x,t)))=0, \qquad (x,t)\in Q_T,$$

$$a_t(x,t)=\beta(u)(u(x,t)-F(v(x,t))), \qquad (x,t)\in Q_T,$$

$$v_t+\frac{\gamma_0}{\alpha_0}v=\frac{\beta(u)}{\alpha_0}u+\frac{\gamma_0}{\alpha_0}a-\frac{\beta(u)}{\alpha_0}F(v), \qquad (x,t)\in Q_T.$$

Introduciendo las representaciones

$$\gamma=\frac{\gamma_0}{\alpha_0}, \qquad \lambda=\frac{1}{\alpha_0},$$

obtenemos como resultado final el siguiente problema inicial-contorno:

$$\nu u_x+\beta(u)u=\beta(u)F(v), \qquad (x,t)\in Q_T, \tag{15}$$

$$a_t=\beta(u)(u-F(v)), \qquad (x,t)\in Q_T, \tag{16}$$

$$v_t+\gamma v=\gamma a+\lambda\beta(u)(u-F(v)), \qquad (x,t)\in Q_T, \tag{17}$$

$$u(0,t)=\mu(t), \qquad 0\le t\le T, \tag{18}$$

$$a(x,0)=v(x,0)=0, \qquad 0\le x\le l, \tag{19}$$

Anotemos que $\lambda>1$, ya que $0<\alpha_0<1$.

3. Propiedades de la solución del problema (15)-(19)

Teorema 1 *Sea dado el problema* (15) (19), *y supóngase que las funciones* $\mu(t)$, $\beta(\xi)$, $F(\xi)$ *satisfacen las siguientes condiciones:*

$$\mu\in C^1[0,T],\ \mu(0)=0,\ \mu'(t)>0,\ t\in[0,T], \tag{20}$$

$$\beta\in C^1(-\infty,\infty), \quad 0<d_1\le\beta(\xi)\le d_2,$$

$$0 < \beta'(\xi) < d_3, para \quad \xi \in (-\infty, \infty), \qquad d_i - const, \quad i = 1, 2, 3, \tag{21}$$

y

$$\begin{aligned} F &\in C^1(-\infty, \infty), \quad F(0) = 0; \quad 0 < F'(\xi) < c_1, \\ para \quad \xi &\in (-\infty, \infty), \qquad c_1 - const. \end{aligned} \tag{22}$$

Entonces existe solución única $\{u(x,t), a(x,t), v(x,t)\}$ *tal que* $u, a, v \in C^1[Q_T]$ *y* u, a, v *satisfacen (15)-(19). Además,*

$$u_t(x,t) > 0, \qquad a_t(x,t) > 0, \qquad v_t(x,t) > 0, \qquad (x,t) \in {Q_T}^0, \tag{23}$$

$$u_x(x,t) < 0, \qquad a_x(x,t) < 0, \qquad v_x(x,t) < 0, \qquad (x,t) \in {Q_T}^0, \tag{24}$$

donde ${Q_T}^0 = \{(x,t), 0 \leq x \leq l, 0 < t \leq T\}$.

Proof. Integrando (15)-(19) y realizando transformaciones simples obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones integrales para las funciones $u(x,t)$, $a(x,t)$, $v(x,t)$ en Q_T:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \mu(t) \exp\left\{-\int_0^x \beta(u(s,t))ds\right\} + \int_0^x \exp\left\{-\int_\xi^x \beta(u(s,t))ds\right\} \times \\ &\quad \times \beta(u(\xi,t))F(v(\xi,t))d\xi, \end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned} a(x,t) &= \int_0^t \mu(\tau)\beta(u(x,\tau)) \exp\left\{-\int_0^x \alpha(u(s,\tau))ds\right\} d\tau - \\ &\quad - \int_0^t \beta(u(x,\tau))F(v(x,\tau))d\tau + \\ &\quad + \int_0^t \int_0^x \beta(u(x,\tau)) \exp\left\{-\int_\xi^x \alpha(u(s,\tau))ds\right\} \alpha(u(\xi,\tau))F(v(\xi,\tau))d\xi d\tau, \end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned} v(x,t) &= \int_0^t \mu(\tau)\beta(u(x,\tau)) \exp\left\{-\int_0^x \beta(u(s,\tau))ds\right\} d\tau + \\ &\quad + \int_0^x \int_0^t \exp\left\{-\int_0^x \beta(u(s,\tau))ds\right\} \beta(u(x,\tau))\beta(u(\xi,\tau))F(v(\xi,\tau))d\xi d\tau - \\ &\quad - \int_0^t \beta(u(x,\tau))F(v(x,\tau))d\tau - \\ &\quad - \int_0^t \exp\{-\gamma(t-\tau)\} \beta_1(u(x,\tau)) \exp\left\{-\int_0^x \beta(u(s,\tau))ds\right\} \mu(\tau)d\tau - \\ &\quad - \int_0^x \int_0^t \exp\{-\gamma(t-\tau)\}\beta_1(u(x,\tau)) \exp\left\{-\int_\xi^x \beta(u(s,\tau))ds\right\} \times \\ &\quad \times \beta(u(\xi,\tau))F(v(\xi,\tau))d\tau d\xi + \\ &\quad + \int_0^t \exp\{-\gamma(t-\tau)\} \beta_1(u(x,\tau))F(v(x,\tau))d\tau, \end{aligned} \tag{27}$$

donde $\beta_1(u) = \beta(u) - \lambda\beta(u)$.

Por lo tanto, si las funciones $u(x,t)$, $a(x,t)$ y $v(x,t)$ son soluciones del problema (15)-(19), entonces ellas satisfacen (25)-(27). Por otro lado, si las funciones

$$u(x,t),\ a(x,t),\ v(x,t) \in C^1[Q_T]$$

satisfacen el sistema (25)-(27), entonces en Q_T existen las derivadas continuas u_x, a_t, y v_t, y las funciones u, a, v satisfacen (15)-(19).

Utilizando el método de sucesiones aproximadas se demuestra que el sistema de ecuaciones integrales (25)-(27) tiene solución única, la cual pertenece al espacio $C[Q_T]$. En forma análoga a como en hizo en [4], se puede demostrar que

$$u(x,t), a(x,t)\ y\ v(x,t) \in C^1[Q_T].$$

Demostremos ahora las desigualdades (23)-(24).

Puesto que las funciones $u(x,t), a(x,t), v(x,t) \in C^1[Q_T]$, de (15)-(19) se sigue que las derivadas u_{xt}, a_{tt}, v_{tt} existen y son continuas en el rectángulo Q_T.

Consideremos las funciones

$$z(x,t) = u_t(x,t), \qquad p(x,t) = a_t(x,t), \qquad q(x,t) = v_t(x,t),$$

las cuales son soluciones del siguiente problema:

$$\nu z_x + [\beta'(u)u + \beta(u) - \beta'(u)F(v)]z = \beta(u)F'(v)q, \qquad (x,t) \in Q_T, \tag{28}$$

$$p_t = [\beta'(u)u + \beta(u) - \beta'(u)F(v)]\,z - \beta(u)F'(v)q, (x,t) \in Q_T, \tag{29}$$

$$q_t + \gamma q = \gamma p + \frac{1}{\alpha_0} p_t, \qquad (x,t) \in Q_T, \tag{30}$$

$$z(0,t) = \mu'(t), \qquad 0 \le t \le T, \tag{31}$$

$$p(x,0) = q(x,0) = 0, \qquad 0 \le x \le l. \tag{32}$$

Representemos por $\Phi(x,t) = \beta'(u)u + \beta(u) - \beta'(u)F(v)$.

De (28)-(32) se desprende que las funciones z, q satisfacen en Q_T el siguiente sistema de ecuaciones integrales:

$$\begin{aligned} z(x,t) &= \mu'(t)\exp\left\{-1/\nu \int_0^x \Phi(s,t)ds\right\} \\ &+ \frac{1}{\nu}\int_0^x \exp\left\{-1/\nu \int_\xi^x \Phi(s,t)ds\right\} \beta(u(\xi,t))F'(v(\xi,t))q(\xi,t)d\xi, \end{aligned} \tag{33}$$

$$\begin{aligned} q(x,t) &= \int_0^t \exp\left\{-\gamma(t-\tau) - \lambda\int_\tau^t \beta(u(x,\tau))F'(v(x,s))ds\right\} \times \\ & \left[\gamma p(x,\tau) + \frac{\Phi(x,\tau)}{\alpha_0} z(x,\tau)\right] d\tau. \end{aligned} \tag{34}$$

Por otro lado

$$q(x,t) = \gamma \int_0^t \exp\{-\gamma(t-\tau)\} p(x,\tau)d\tau + \frac{1}{\alpha_0}\int_0^t \exp\{-\gamma(t-\tau)\} p_t(x,\tau)d\tau. \quad (35)$$

Integrando por partes la última expresión tenemos

$$\begin{aligned} q(x,t) &= \gamma \int_0^t \exp\{-\gamma(t-\tau)\} p(x,\tau)d\tau + \frac{1}{\alpha_0}\exp\{-\gamma(t-\tau)\} p(x,\tau)|_0^t - \\ &\quad \frac{\gamma}{\alpha_0}\int_0^t \exp\{-\gamma(t-\tau)\} p(x,\tau)d\tau. \end{aligned} \quad (36)$$

Reemplazando esta expresión en la ecuación (29), obtenemos

$$p_t + \frac{\beta(u)}{\alpha_0}F'(v)p = \Phi(x,t)z - \gamma\left[\beta(u) - \frac{\beta(u)}{\alpha_0}\right]F'(v)\int_0^t \exp\{-\gamma(t-\tau)\}p(x,\tau)d\tau. \quad (37)$$

Resolviendo la ecuación (37) y cambiando los límites de integración tenemos

$$\begin{aligned} p(x,t) &= \int_0^t \exp\left\{-1/\alpha_0 \int_\tau^t \beta(u(x,s))F'(v(x,s))ds\right\}\Phi(x,\tau)z(x,\tau)d\tau \\ &\quad -\gamma\left[1-\frac{1}{\alpha_0}\right]\int_0^t p(x,\theta)\left[\int_\theta^t \exp\left\{-1/\alpha_0\int_\tau^t \beta(u(x,s))F'(v(x,s))ds\right\}\times\right. \\ &\quad \left.(u(x,\tau))F'(v(x,\tau))\exp\{-\gamma(\tau-\theta)\}d\tau\right]d\theta. \end{aligned} \quad (38)$$

De (33),(29),(30) también se deprende que $z(x,0) = \mu'(0)\exp\{-1/\nu\int_0^x \Phi(s,0)ds\} > 0$, $p_t(x,0) = \Phi(x,0)z(x,0) > 0$, $q_t(x,0) = \Phi(x,0)/\alpha_0 z(x,0) > 0$ para $x \in [0,l]$, ya que

$$\Phi(x,0) = \beta'(u(x,0))u(x,0) + \beta(u(x,0)) - \beta'(u(x,0))F(v(x,0)) > 0. \quad (39)$$

Por lo tanto, existe un $t_0 \in (0,T]$ tal que $z(x,t) > 0$, $p(x,t) > 0$, $q(x,t) > 0$ y $\Phi(x,t) > 0$ para todo $x \in [0,l]$, $t \in (0,t_0]$. Supongamos que la positividad de las funciones $z(x,t)$, $p(x,t)$, $q(x,t)$, $\Phi(x,t)$ para $(x,t) \in {Q_T}^0$ no tiene lugar. Entonces existen $t_1 \in (t_0,T]$, $x_1 \in [0,l]$ tales que, $z(x,t) > 0$, $p(x,t) > 0$, $q(x,t) > 0$, $\Phi(x,t) > 0$ para $x \in [0,l]$, $t \in (0,t_1)$,

$$z(x_1,t_1)p(x_1,t_1)q(x_1,t_1)\Phi(x_1,t_1) = 0. \quad (40)$$

Esta igualdad tiene lugar cuando se haga cero aunque sea uno de los miembros. Demostremos que esto no se puede dar. En efecto, de (33) se desprende que $z(x_1,t_1) > 0$, de (34) $q(x_1,t_1) > 0$, de (38) $p(x_1,t_1) > 0$ y $\Phi(x_1,t_1) > 0$. Así que las suposiciones hechas no son verdaderas y las desigualdades (23) quedan demostradas.

Las desigualdades (24) se demuestran de manera análoga. ∎

Corolario 1 . *Si las funciones* $\{u(x,t), a(x,t), v(x,t)\}$ *son soluciones del problema* $(15)-(19)$ *y se satisfacen las condiciones* $(20)-(22)$, *y* $F(+\infty) > \mu(T)$, *entonces para cualquier* $\tau \in (0,T]$ *en* Q_τ *son válidas las siguientes desigualdades:*

$$\begin{aligned} 0 &\leq u(x,t) \leq u(0,\tau) = \mu(\tau), && (41)\\ 0 &\leq a(x,t) \leq a(0,\tau), && (42)\\ 0 &\leq v(x,t) \leq f(u(x,t)) \leq f(\mu(\tau)). && (43) \end{aligned}$$

Proof. Las desigualdades (41)-(42) son consecuencias inmediatas del Teorema 1 y de la no negatividad de la función $v(x,t)$. Demostremos la cota superior de la función $v(x,t)$. De la ecuación (16) y de la desigualdad (23) para $a_t(x,t)$ tenemos que $u(x,t) \geq F(v(x,t))$ en Q_τ. De la última desigualdad y del crecimiento monótono de la función $f(\xi)$ (función inversa de $F(\xi)$) se desprende que $v(x,t) \leq f(u(x,t)) \leq f(\mu(\tau))$ en Q_τ, y la desigualdad (43) queda totalmente demostrada. ∎

4. Dependencia continua de la solución del coeficiente $\beta(\xi)$

Teorema 2 *Supongamos que las funciones* $\mu(t)$, $\beta_i(\xi)$, $i = 1,2$, *y* $F(\xi)$ *satisfacen las condiciones* $(20)-(22)$ *respectivamente.*

Si

$$u_1(x,t), a_1(x,t), v_1(x,t) \text{ y } u_2(x,t), a_2(x,t), v_2(x,t)$$

son soluciones del problema (15)-(19), *definidas por las funciones*

$$\mu(t), \beta_1(\xi) \text{ y } \mu(t), \beta_2(\xi),$$

respectivamente, entonces

$$\begin{aligned} \max_{0\leq x\leq l, 0\leq t\leq T} |u_1(x,t) - u_2(x,t)| &\leq k_1 \|\beta_1(\xi) - \beta_2(\xi)\|_{C[0,R]}, && (44)\\ \max_{0\leq x\leq l, 0\leq t\leq T} |a_1(x,t) - a_2(x,t)| &\leq k_2 \|\beta_1(\xi) - \beta_2(\xi)\|_{C[0,R]}, && (45)\\ \max_{0\leq x\leq l, 0\leq t\leq T} |v_1(x,t) - v_2(x,t)| &\leq k_3 \|\beta_1(\xi) - \beta_2(\xi)\|_{C[0,R]}, && (46) \end{aligned}$$

donde k_1, k_2, k_3 *son constantes positivas y* $R = \mu(T)$.

Proof. Introduzcamos las siguientes funciones:

$$\begin{aligned} q(x,t) &= {}_1(x,t) - u_2(x,t); p(x,t) = a_1(x,t) - a_2(x,t);\\ w(x,t) &= v_1(x,t) - v_2(x,t); \qquad z(\xi) = \beta_1(\xi) - \beta_2(\xi). \end{aligned}$$

De (15)-(19) se desprende que las funciones $q(x,t)$, $p(x,t)$, $w(x,t)$ son solución del problema

$$\nu q_x + r(x,t)q = z(u_2(x,t))g(x,t) + \overline{B}(x,t)w, \qquad (x,t) \in Q_T, \quad (47)$$

$$p_t = r(x,t)q - z(u_2(x,t))g(x,t) - \overline{B}(x,t)w, \qquad (x,t) \in Q_T, \quad (48)$$
$$w_t + \gamma w = \gamma p + \lambda[r(x,t)q - z(u_2(x,t))g(x,t) - \overline{B}(x,t)w], \qquad (x,t) \in Q_T, \quad (49)$$
$$q(0,t) = 0, \qquad 0 \le t \le T, \quad (50)$$
$$p(x,0) = w(x,0) = 0, \qquad 0 \le x \le l, \quad (51)$$

donde

$$\begin{aligned} g(x,t) &= F(v_1(x,t)) - u_1(x,t), \\ r(x,t) &= \beta_2(u_2(x,t)) - g(x,t)\int_0^1 \beta_1'[u_2(x,t) + \theta(u_1(x,t) - u_2(x,t))]d\theta, \\ \overline{B}(x,t) &= \beta_2(u_2(x,t))\int_0^1 F'(v_2(x,t) + \theta[v_1(x,t) - v_2(x,t)])d\theta. \end{aligned}$$

Para este problema se obtiene la siguiente representación integral para la solución [8]:

$$\begin{aligned} q(x,t) &= \frac{1}{\nu}\int_0^x z(u_2(\xi,\tau))g(\xi,\tau)\exp\left\{-\frac{1}{\nu}\int_0^x r(s,t)ds\right\}d\xi \\ &\quad + \frac{1}{\nu}\int_0^x\int_0^t B_6(x,\xi,t,\tau)z(u_2(\xi,\tau))d\tau d\xi, \end{aligned} \qquad (52)$$

donde $B_6(x,\xi,t,\tau)$ es una función continua junto con sus primeras derivadas parciales en $0 \le x \le \xi \le l$, $0 \le t \le \tau \le T$. Por lo tanto,

$$|q(x,t)| \le \frac{1}{\nu}\int_0^x \exp\left\{-\frac{1}{\nu}\int_0^x r(s,t)ds\right\}|z(u_2(\xi,\tau))||g(\xi,\tau)|d\xi$$

$$+\frac{1}{\nu}\int_0^x\int_0^t |B_6(x,\xi,t,\tau)||z(u_2(\xi,\tau))|d\tau d\xi, \qquad (x,t) \in Q_T. \qquad (53)$$

De la desigualdad $0 \le u(x,t) \le \mu(\tau)$ se desprende que

$$\max_{0\le x\le l,\quad 0\le t\le T} |z(u_2((x,t))| \le \|\beta_1(\xi) - \beta_2(\xi)\|_{C[0,R]}. \qquad (54)$$

Del hecho de que la función $B_6(x,\xi,t,\tau)$ es acotada y de que $g(x,t)$ también lo es, obtenemos la cota (44) utilizando la desigualdad (54) en (53). De igual forma, con la representación para $w(x,t)$ obtenemos la cota (46).

Demostremos la desigualdad (45). Integrando (48) con la condición $p(x,0) = 0$, obtenemos

$$p(x,t) = \int_0^t r(x,\tau)q(x,\tau)d\tau - \int_0^t z(u_2(x,\tau))g(x,\tau)d\tau - \int_0^t \overline{B}(x,\tau)w(x,\tau)d\tau.$$

De esta representación para $p(x,t)$ y de las cotas (44), (46) se obtiene la cota (45), y el teorema queda demostrado. ∎

5. Resultados de los experimentos numéricos

Para los modelos matemáticos del proceso de sorción dinámica tienen un valor importante los métodos numéricos para la solución de los problemas de contorno-inicial debido a que sólo en algunos casos particulares se obtienen soluciones analíticas.

Se desarrollaron una serie de cálculos numéricos para diferentes formas de isotermas de Langmuir y diferentes concentraciones iniciales, donde se ve que el frente de la concentración depende sustancialmente de los coeficientes.

En las gráficas (1)-(3) se muestra la solución del problema directo para los siguientes datos:

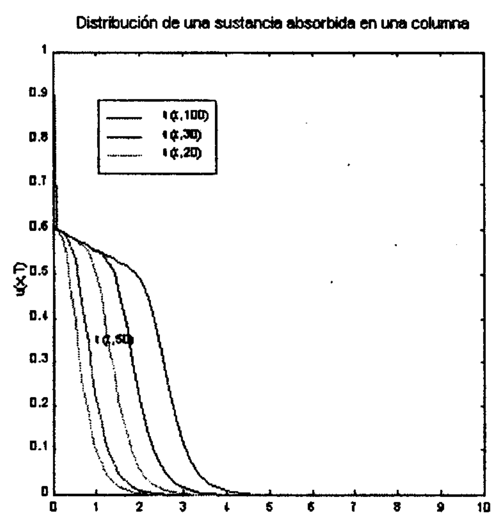

Figura 1. Perfiles de $u(x,t)$

Figura 1:
$f(s) = \frac{3s}{1+2s}$; $\mu(t) = 1$; $\beta(u) = \frac{u+1}{6}$;$\gamma(u) = 1$; $\nu = 1$; $l = 10$; $T = 1$.

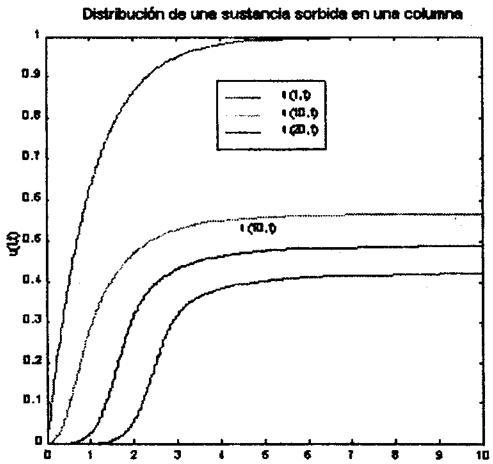

Figura 2. Concentraciones $u(x,t)$.

Figuras 2-3:
$f(s) = \frac{2s}{1+s}$; $\mu(t) = 1 - \exp(-t)$; $\beta(u) = 1; \gamma(u) = 1$; $\nu = 0.4$; $\lambda = 15$; $l = 10$; $T = 1$.

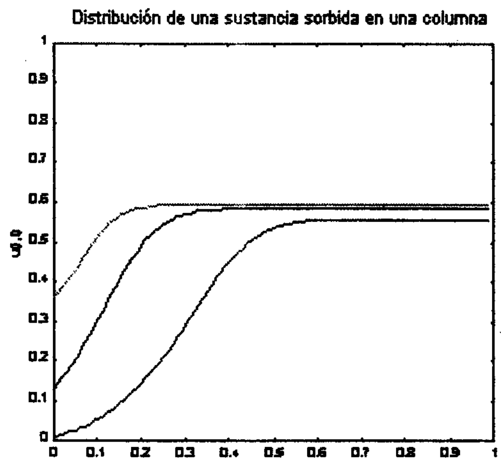

Figura 3. Perfiles de $u(x,t)$.

Referencias

[1] ANGER G. *Inverse Problems in Differential Equations.* Akademie-Verlag, Berlin, 1990, Plenum Press.

[2] CANNON J.R., DU CHATEAU P. "An inverse problem for an unknown source in a heat equation". *J. of Math. Anal. and App.* 1980, (75), 465–485.

[3] DENISOV. "The uniqueness of the solution of the problem of determining non-linear kinetic coefficients".*Comput. Maths. Math. Phys.* 1992, v.32, (4), 567-572.

[4] DENISOV A. M. "An inverse problem for a nonlinear mathematical model of sorption dynamics with mixed-diffusional kinetics". *J. Inv. ill-posed problems* (1996), V.4(3),191–202.

[5] LAGREGA, BUCKINGHAM, EVANS. *Gestión de Residuos Tóxicos. Tratamiento, Eliminación y Recuperación de Suelos.* McGraw Hill, Volumen 1, España, 1972.

[6] LORENZI. "An inverse problem for a semilinear parabolic equation." *Annali de Mat. Pura ed Applicata.* 1982, v. 31, 145–166.

[7] LUKSHIN A.V. "Sobre un modelo de sorción dinámica" (en ruso).*Dokl. A.N. URSS* , 1973, T. 213(3).

[8] ORELLANA Y. "Solución tipo onda viajera para un modelo matemático de sorción dinámica". *Tesis de Maestría,* UIS, 1998.

[9] ROSENBERG D.U. *Methods for the Numerical Solution of Partial Differential Equations.* Publishing Division. Tulsa, 1984.

[10] TIKHONOV A. N., ARSENIN V. Y. *Solutions of Ill-Posed Problems.* V.H. Winston Sons.Washington, 1977.