

Suavizamiento de los vértices de un polígono por medio de un *spline* cónico

VICTORIA HERNÁNDEZ MEDEROS*

Abstract

We prove that every irreducible conic can be parametrically represented by two rational quadratic functions. An algorithm for smoothing the vertices of a polygonal by a conic spline with continuous tangent is proposed. Finally, we give a global parametrization of the spline which includes a procedure to obtain a set of values of the parameter providing regularly distributed points on each conic section.

Keywords: [Numerical Analysis]: Spline Approximation; [Computer Graphics]: Methodology and Techniques.

1. Introducción

Desde la Antigüedad, las cónicas constituyen una de las familias de curvas más conocidas y estudiadas por la matemáticas. Esto se debe a que sus propiedades las hacen muy útiles en la solución de variados problemas teóricos y de la industria [13, 16]. Hoy en día las cónicas forman parte de casi todos los estándares gráficos internacionales [7, 8], así como de los sistemas de CAD/CAM de reconocido prestigio mundial. De hecho, el primer sistema CAD que se conoce [11] se basó en el uso de cónicas para diseñar los fuselajes de un avión. En relación con las cónicas y otras curvas de Bezier, existe además un gran número de trabajos publicados por diferentes autores entre los que se destacan Farin [2, 3, 4], Lee [9], Piegl [14, 15, 16], Pavlidis [12] y Pratt [17]. En estos trabajos se muestra la posibilidad de utilizar con éxito las cónicas en el ajuste de datos, en la aproximación de dibujos digitalizados (ya sea para su compactación o para el reconocimiento de patrones) y en el diseño y escalamiento de fuentes [8].

En los últimos tiempos la representación paramétrica de una cónica en la forma de Bernstein-Bezier se ha vuelto muy popular entre las personas que usan los sistemas

*Instituto de Cibernética, Matemática y Física, Calle E No.309 esquina a 15, Vedado, C. Habana, Cuba. Fax: (537)-333373. (matdis@cidet.icmf.inf.cu)

CAD/CAM. A diferencia de otras representaciones, la de Bezier es muy apropiada para resolver problemas de diseño gráfico, pues muchas propiedades geométricas de las cónicas (incluyendo su clasificación) se obtienen fácilmente a partir de esta representación.

En el presente trabajo se demuestra que, partiendo de su ecuación implícita, toda cónica irreducible se puede representar paramétricamente mediante dos funciones racionales cuadráticas. Más adelante se utiliza un cambio de base apropiado, para reescribir la cónica en términos de los polinomios de Bernstein cuadráticos. Finalmente, se muestra cómo usar las cónicas en la solución de un problema que requiere suavizar los vértices de un polígono, de manera que la curva suavizada conserve lo más posible la forma del polígono original.

2. Cónicas

2.1. Parametrización de una cónica

Clásicamente las cónicas se conocen por su ecuación implícita en coordenadas cartesianas:

$$F(x, y) = 0, \quad (1)$$

donde F es un polinomio cuadrático en x y y que escribiremos como

$$F(x, y) = a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + a_{10}x + a_{01}y + a_{00}.$$

Teorema 1 *Si $F(x, y)$ es una cónica irreducible entonces se puede parametrizar en la forma*

$$x(t) = q_x(t), \quad y(t) = q_y(t), \quad (2)$$

donde q_x y q_y son dos funciones racionales cuadráticas.

Demostración. Sea (x_0, y_0) un punto sobre la cónica, es decir, supongamos que

$$F(x_0, y_0) = 0.$$

Consideremos la familia de rectas que pasan por (x_0, y_0) con pendiente t :

$$y = y_0 + t(x - x_0). \quad (3)$$

Del teorema de Bezout [6] se sabe que una recta y una cónica irreducible se intersecan a lo sumo en dos puntos. Por lo tanto, todo punto sobre la cónica puede ser obtenido como el punto de intersección de alguna recta que pasa por (x_0, y_0) con la cónica. Esto significa que la cónica se puede parametrizar en términos de t . Hallemos entonces el otro punto de intersección de la cónica con la recta que pasa por (x_0, y_0) con pendiente t .

Sustituyendo (3) en (1) resulta que:

$$\begin{aligned} F(x, y) &= F(x, y_0 + t(x - x_0)) \\ &= a_{20}x^2 + a_{11}x(y_0 + t(x - x_0)) + a_{02}(y_0 + t(x - x_0))^2 \\ &\quad + a_{10}x + a_{01}(y_0 + t(x - x_0)) + a_{00} = 0. \end{aligned}$$

Si desarrollamos esta última expresión y agrupamos en potencias de x se obtiene que

$$F(x, y) = c_2(t)x^2 + c_1(t)x + c_0(t) = 0, \quad (4)$$

donde

$$\begin{aligned} c_0(t) &= a_{02}x_0^2t^2 + (-2a_{02}y_0x_0 - a_{01}x_0)t + a_{02}y_0^2 + a_{01}y_0 + a_{00}, \\ c_1(t) &= -2a_{02}x_0t^2 + (-a_{11}x_0 + 2a_{02}y_0 + a_{01})t + a_{11}y_0 + a_{10}, \\ c_2(t) &= a_{02}t^2 + a_{11}t + a_{20}. \end{aligned}$$

Como $F(x, y)$ es una cónica, $c_2(t)$ no es el polinomio nulo. Por tanto, de (4) resulta que

$$x^2 + \frac{c_1(t)}{c_2(t)}x + \frac{c_0(t)}{c_2(t)} = 0. \quad (5)$$

Puesto que (x_0, y_0) es uno de los puntos de intersección de la recta con la cónica, x_0 es una de las raíces de la ecuación (5). Para cada recta con pendiente t sea $x_1(t)$ la abscisa del otro punto de intersección. Entonces

$$x_0 + x_1(t) = \frac{-c_1(t)}{c_2(t)},$$

es decir,

$$x_1(t) = -x_0 - \frac{c_1(t)}{c_2(t)}. \quad (6)$$

Para obtener la ordenada $y_1(t)$ del punto de intersección basta con sustituir $x_1(t)$ en (3):

$$y_1(t) = y_0 + t(-2x_0 - c_1(t)/c_2(t)). \quad (7)$$

Finalmente, sustituyendo en (6) y (7) las expresiones para $c_1(t)$ y $c_2(t)$ y agrupando en potencias de t , llegamos a

$$x_1(t) = \frac{d_2^x t^2 + d_1^x t + d_0^x}{a_{02}t^2 + a_{11}t + a_{20}}, \quad (8)$$

$$y_1(t) = \frac{d_2^y t^2 + d_1^y t + d_0^y}{a_{02}t^2 + a_{11}t + a_{20}}, \quad (9)$$

donde los coeficientes d_i^x y d_i^y $i = 0, 1, 2$, dependen del punto (x_0, y_0) y de los coeficientes de la cónica en (2). Específicamente:

$$\begin{aligned} d_2^x &= a_{02}x_0, \\ d_1^x &= -2a_{02}y_0 - a_{01}, \\ d_0^x &= -x_0a_{20} - a_{11}y_0 - a_{10}, \end{aligned}$$

mientras que

$$\begin{aligned}d_2^y &= -a_{20}y_0 - a_{01} - a_{11}x_0, \\d_1^y &= -2x_0a_{20} - a_{10}, \\d_0^y &= y_0a_{20}. \blacksquare\end{aligned}$$

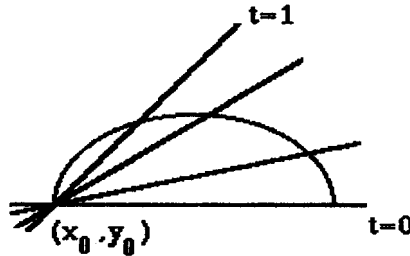


Figura 1. Parametrización de una cónica.

Las expresiones (8) y (9) muestran que efectivamente toda cónica irreducible se puede escribir como una curva racional cuadrática y paramétrica. En particular, si t se restringe al intervalo $[0, 1]$ entonces $(x_1(t), y_1(t))$ describe una sección de la cónica. Esta sección está definida por los puntos en que cortan la cónica las rectas que pasan por (x_0, y_0) con pendiente $t = 0$ y $t = 1$, respectivamente (vea la figura 1). En general, cualquier sección de la cónica se puede describir en términos de un parámetro u que tome valores en $[0, 1]$, pues si la sección deseada se obtiene en (8) y (9) para t en $[a, b]$, basta con hacer el cambio de parámetro $u = (t - a)/(b - a)$, con u en $[0, 1]$. Mediante esta transformación, (8) y (9) se pueden reescribir en términos de u , aunque con otros coeficientes. Por eso, en adelante vamos a suponer que t toma valores en $[0, 1]$.

2.2. Forma de Bezier de una sección cónica

Cada uno de los polinomios cuadráticos que aparecen en el numerador y denominador de $x_1(t)$ y $y_1(t)$ se pueden reescribir en términos de los polinomios de Bernstein de grado 2,

$$B_i^2(t) = \binom{2}{i} t^i (1-t)^{2-i}, \quad i = 0, 1, 2,$$

teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned}t^2 &= B_2^2(t), \\t &= 1/2 B_1^2(t) + B_2^2(t), \\1 &= B_0^2(t) + B_1^2(t) + B_2^2(t).\end{aligned}\tag{10}$$

Nótese que el denominador de $x_1(t)$ y $y_1(t)$ en (8) y (9) es $c_2(t)$, que en términos de (10) se expresa como

$$c_2(t) = w_0 B_0^2(t) + w_1 B_1^2(t) + w_2 B_2^2(t),$$

donde

$$\begin{aligned} w_0 &= a_{20}, \\ w_1 &= a_{20} + 1/2a_{11}, \\ w_2 &= a_{20} + a_{11} + a_{02}. \end{aligned}$$

De manera similar, si sustituimos (10) en el numerador de $x_1(t)$ y $y_1(t)$ y denotamos por $b_0, b_1, b_2 \in E_2$ los puntos

$$\begin{aligned} b_0 &= (d_0^x, d_0^y)^t / w_0, \\ b_1 &= (1/2d_1^x + d_0^x, 1/2d_1^y + d_0^y)^t / w_1, \\ b_2 &= (d_2^x + d_1^x + d_0^x, d_2^y + d_1^y + d_0^y)^t / w_2, \end{aligned}$$

entonces la cónica $c(t) = (x_1(t), y_1(t))^t$ se puede escribir como

$$c(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{bmatrix} = \frac{w_0 b_0 B_0^2(t) + w_1 b_1 B_1^2(t) + w_2 b_2 B_2^2(t)}{w_0 B_0^2(t) + w_1 B_1^2(t) + w_2 B_2^2(t)}. \quad (11)$$

Esta expresión de una cónica mediante los polinomios de Bernstein de grado 2 se conoce como la forma de Bernstein-Bezier de la cónica. Los puntos b_0, b_1 y b_2 forman el llamado polígono de control de la cónica, mientras que w_0, w_1 y w_2 son pesos asociados a los vértices del polígono de control.

La expresión racional cuadrática de una cónica también se obtiene al proyectar una curva de Bezier polinomial de grado 2. Por esta razón, en la actualidad algunos autores [2] [3] definen las cónicas a través de una proyección de las curvas de Bezier cuadráticas. Los puntos $b_i \in E^2, i = 0, 1, 2$, del polígono de control de la cónica son la proyección de los puntos $[w_i b_i, w_i], i = 0, 1, 2$, del polígono de control de la curva de Bezier de grado 2, de la cual proviene la cónica.

2.3. Propiedades de las cónicas

En esta sección presentamos algunas de las propiedades más importantes de las cónicas, con el propósito de mostrar, más adelante, lo apropiadas que resultan estas curvas para suavizar los vértices de un polígono.

Propiedades

1. Una cónica $c(t)$ pasa por los puntos extremos de su polígono de control, es decir:

$$c(0) = b_0, \quad c(1) = b_2.$$

Además, es tangente en los extremos a los vectores $\Delta b_0 = b_1 - b_0$ y $\Delta b_1 = b_2 - b_1$ definidos por el polígono de control, de modo que

$$\dot{c}(0) = \frac{2w_1}{w_0} \Delta b_0, \quad \dot{c}(1) = \frac{2w_1}{w_2} \Delta b_1.$$

2. Los pesos w_i influyen de manera importante en la forma de una cónica. Sin embargo, el conjunto de pesos w_i que describen una cónica no es único. Por ejemplo, si todos los pesos w_i se multiplican por factor no nulo, entonces ese factor aparece en el numerador y en el denominador de (11) y se cancela sin producir ningún efecto. Por tanto, los pesos w_i y \hat{w}_i , $i = 0, 1, 2$, con $\hat{w}_i = \alpha w_i$, $\alpha \neq 0$, describen la misma cónica.
3. Se puede demostrar [3] que también los pesos $\hat{w}_i = \rho^{2-i} w_i$, $i = 0, 1, 2$, con $\rho \neq 0$ describen la misma cónica. Si en particular se toma $\rho = \sqrt{w_2/w_0}$, entonces resulta que $\hat{w}_0 = \hat{w}_2 = w_2$. Luego, reescalando los pesos con el factor $\alpha = 1/w_2$, tenemos que toda cónica con $w_0, w_2 \neq 0$ puede reescribirse de modo que $\hat{w}_0 = \hat{w}_2 = 1$. De una cónica que satisface esta condición se dice que está en forma estándar.
4. Si $c(t)$ es una cónica escrita en forma estándar y denotamos por s el punto $c(1/2)$ (conocido como punto de apoyo de la cónica), se puede probar [4] que el punto medio del segmento $\overline{b_0 b_2}$, s y el vértice b_1 son colineales y la razón entre ellos es w_1 (vea la figura 2), o sea

$$\frac{|s - m|}{|b_1 - s|} = w_1.$$

Por lo tanto, cada polígono b_0, b_1, b_2 define una familia de cónicas que dependen del parámetro w_1 . En la medida en que w_1 crece, la cónica asociada a ese parámetro se aproxima al vértice b_1 del polígono de control.

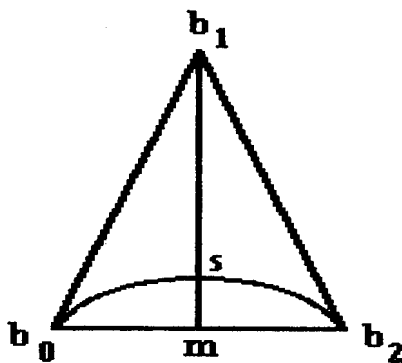


Figura 2. Relación entre m, s, b_1, w_1 .

5. Una de las grandes ventajas que tiene escribir una sección cónica en la forma racional cuadrática estándar es que su clasificación depende únicamente del peso w_1 , de modo que con $w_1 > 0$ se cumple que [9]: si $w_1 < 1$, la curva es una sección de elipse; si $w_1 = 1$, es una sección de parábola; y si $w_1 > 1$, estamos en presencia de una sección de hipérbola.

6. La expresión (11) de una cónica se puede reescribir como

$$c(t) = \sum_{i=0}^2 \alpha_i b_i, \quad (12)$$

donde

$$\alpha_i = \frac{w_i B_i^2(t)}{\sum_{j=0}^2 w_j B_j^2(t)}.$$

Como $\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = 1$, de (12) resulta que una cónica es una combinación baricéntrica de los puntos de su polígono de control. Por lo tanto, las cónicas son invariantes por transformaciones afines; es decir, si A es afín entonces

$$A(c(t)) = \sum_{i=0}^2 \alpha_i A(b_i).$$

Si adicionalmente todos los pesos w_i , $i = 0, 1, 2$, son positivos entonces la cónica es una combinación convexa de los puntos del polígono de control, y en consecuencia se encuentra en el triángulo definido por estos puntos.

7. Las cónicas son invariantes por transformaciones proyectivas [9], es decir, la imagen proyectiva de una cónica sigue siendo una cónica (aunque puede suceder por ejemplo que la proyección de una elipse sea una parábola).

3. Suavizamiento de los vértices de un polígono mediante cónicas

3.1. Algoritmo para generar un *spline* cónico

En términos generales el problema que necesitamos resolver consiste en suavizar, por medio de una curva, los vértices de un polígono dado, de manera que la región suavizada se parezca lo más posible al polígono original.

Este problema surgió vinculado al de generación de mallas óptimas, que investiga el grupo dirigido por el Dr. Pablo Barrera de la Universidad Autónoma de México. Como es conocido, la generación de una malla sobre una región del plano es el primer paso para la solución numérica de una ecuación diferencial en derivadas parciales, utilizando métodos de elementos finitos.

Por otro lado, en la construcción de una malla con propiedades óptimas (celdas convexas y suaves) es importante que la frontera de la región sea una curva regular y suave.

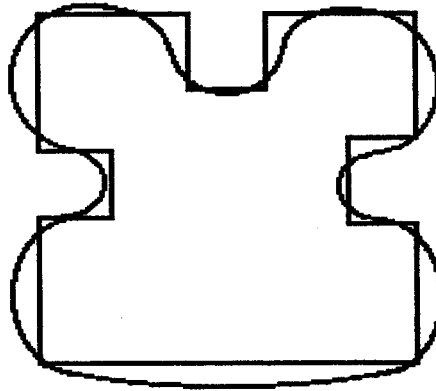


Figura 3. *Spline* cúbico que suaviza un polígono.

Cuando la frontera es muy irregular se puede suavizar por medio de un *spline*¹ cúbico paramétrico. Sin embargo, si la frontera de la región es un polígono no convexo, el uso de un spline de suavizamiento no da buenos resultados, pues si bien la nueva frontera es suave, no se parece muchas veces al polígono original. Vea la figura 3.

Por eso, una característica importante que debe tener la curva mediante la cual vamos a aproximar el polígono es que, siempre que sea posible, conserve las secciones rectas del mismo, suavizando únicamente sus vértices. Ya con anterioridad, Liao [10] y Pavlidis [12] consideraron en sus trabajos la conveniencia de utilizar cónicas para suavizar los vértices de un polígono.

El algoritmo que nosotros proponemos en este trabajo fue especialmente diseñado para suavizar los vértices de un polígono. Para comenzar veamos las ideas generales. Denotemos por $I_i = (x_i, y_i)$, $i = 0, \dots, m - 1$, los vértices del polígono a suavizar. La esencia del algoritmo consiste en sustituir cada vértice I_i por una sección cónica $c_i(t)$, si el ángulo θ_i que se forma en I_i no es “demasiado” llano, específicamente si $\theta_i < 172^\circ$. En caso contrario no tiene sentido suavizar ese vértice y el punto I_i se elimina, pues es casi colineal con sus vecinos.

Suponiendo que $c_i(t)$ se escribe en la forma estándar, tenemos que calcular entonces los puntos b_0^i , b_1^i y b_2^i de su polígono de control y el peso w_1^i . Un requisito importante que debe cumplir la curva que vamos a construir es que las secciones cónicas se unan suavemente con las secciones rectas. Por eso, vamos a tomar como tangentes a cada cónica $c_i(t)$ en los extremos, los lados que definen el vértice I_i . De acuerdo con las propiedades de las cónicas que vimos en la sección anterior, esto significa que b_1^i se tomará como el vértice I_i que debemos suavizar.

De este modo, el problema se reduce a determinar, sobre un lado dado, en qué posición se escogen el punto inicial b_0^i y el punto final b_2^i de la sección cónica $c_i(t)$, como se

¹El término inglés *spline* se traduce en castellano simplemente como **listón**, palabra que además de su significado como instrumento en carpintería y construcción tiene también el de “cinta de seda angosta”, por lo cual podría muy bien oficializarse así en español (Nota del Editor).

muestra en la figura 4.

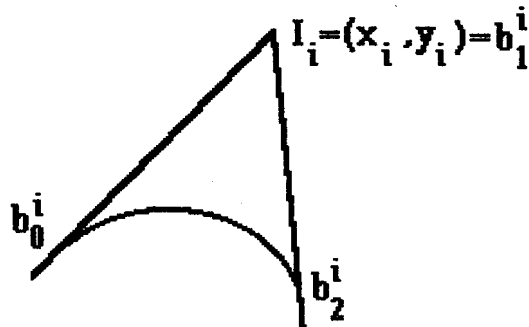


Figura 4. ¿Dónde van los puntos extremos que suaviza un vértice?

Para automatizar el proceso de selección de los vértices extremos de cada cónica, hay que tener en cuenta la longitud de los lados que constituyen el polígono. En ese sentido vamos a separar el caso de un polígono regular, o sea aquel cuyos lados tienen todos la misma longitud, del de un polígono irregular.

Si el polígono a suavizar tiene todos sus lados de tamaño l , entonces es muy fácil definir dónde comienza y termina cada sección cónica. Los puntos inicial y final de todas las cónicas se pueden tomar a una distancia $l/3$ del vértice a suavizar. Como consecuencia de esto, dos cónicas consecutivas se unirán en este caso por medio de una recta, como se aprecia en la figura 5 y en el cuadrado de la figura 11.

Si por el contrario, los lados del polígono tienen diferentes longitudes, entonces no todas las cónicas deben empezar y terminar a la misma distancia del vértice a suavizar. En este caso resulta natural que se conserven secciones rectas en aquellos lados de mayor tamaño. Por eso, en nuestro algoritmo se calcula la longitud mínima l_{min} de todos los lados y se va comparando en cada paso con la longitud l_i . La idea es que la curva suavizada incluya una sección recta sobre un lado, si su longitud l_i es mayor que $2l_{min}$. Esto se logra tomando los puntos extremos de las cónicas asociadas a los vértices l_{i-1} y l_i a una distancia $l_{min}/2$ de sus respectivos vértices, como muestra la figura 5.

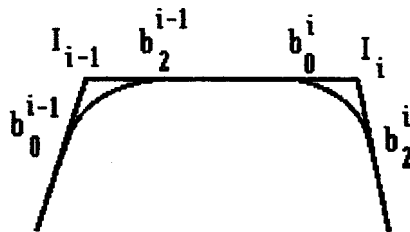


Figura 5. El lado l_i incluye una sección recta.

Si la longitud l_i de un lado es menor o igual que $2l_{min}$, entonces la curva suavizada no debe incluir una sección recta sobre ese lado. El punto final del polígono de control de la cónica $c_{i-1}(t)$ coincidiría con el inicial de $c_i(t)$, como se muestra en la figura 6, y ambos se tomarán como el punto medio de ese lado.

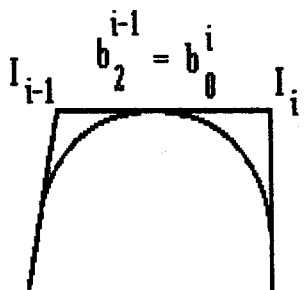


Figura 6. El lado l_i no incluye ninguna sección recta.

Además, debemos determinar el peso w_1^i de cada cónica $c_i(t)$. En otras palabras, tenemos que seleccionar una cónica de toda la familia que depende de ese parámetro. Como nuestro objetivo es suavizar cada vértice manteniéndonos lo más cerca posible del mismo, el valor w_1^i se va a escoger en términos del ángulo que se forma en el vértice I_i . Para lograr el efecto esperado, la curva debe estar más cerca del vértice I_i en la medida en que el ángulo se haga más agudo, es decir el valor de w_1^i debe aumentar en la medida en que el ángulo definido por el vértice I_i sea menor.

Por eso proponemos tomar:

$$w_1^i = \begin{cases} 4 + \cos(\theta_i), & \text{para } 0^\circ < \theta_i \leq 90^\circ, \\ 4(1 + \cos(\theta_i)), & \text{para } 90^\circ < \theta_i < 180^\circ. \end{cases} \quad (13)$$

Esto significa que si el ángulo $\theta_i \leq 90^\circ$, entonces

$$4 \leq w_1^i < 5,$$

mientras que si

$$90^\circ < \theta_i < 180^\circ,$$

entonces

$$0 < w_1^i < 4.$$

Esta selección del peso w_1^i garantiza que la curva está más próxima al vértice en la medida en que el ángulo es menor. Por otro lado, como $w_1^i > 1$ para $\theta < 138^\circ$, la mayor parte de las veces los vértices se aproximan por medio de una hipérbola.

En resumen, cada vértice I_i del polígono se suavizará por medio de una cónica $c_i(t)$ $i = 0, \dots, m - 1$. En algunos casos dos secciones cónicas consecutivas se unirán directamente, mientras que en otros los unirá una recta. Pero una recta se obtiene como

caso particular de una cónica cuando los tres puntos de su polígono de control son colineales. Por lo tanto, la curva que suaviza el polígono es un *spline* cónico, que además tiene tangente continua, inclusive en los puntos de unión, donde por construcción se garantiza esta condición.

Ahora ya estamos en condiciones de dar nuestro algoritmo para construir el *spline* cónico.

ALGORITMO

Dados los vértices

$$I_i = (x_i, y_i) \quad i = 0, \dots, m - 1$$

del polígono a suavizar:

1. Calcular el ángulo θ_i que se forma en cada vértice I_i , $i = 0, \dots, m - 1$, y eliminar el punto I_i si $\cos\theta_i < -0,99$. Actualizar el número m de vértices.
2. Calcular la longitud l_i , $i = 0, \dots, m - 1$, de cada lado del polígono. Sea l_{min} la longitud del menor lado y l_{max} la del mayor.
3. Si $l_{min} \neq l_{max}$, ir al paso 4. De lo contrario, calcular b_2^i y b_0^{i+1} , $i = 0, \dots, m - 1$ (con $b_0^0 = b_0^m$), a partir de las siguientes ecuaciones, e ir al paso 5:

$$|b_2^i - I_i| = l_{min}/3, \quad |b_0^{i+1} - I_{i+1}| = l_{min}/3.$$

4. Para $i = 0, \dots, m - 1$:

- (a) Si $l_i > 2l_{min}$, calcular b_2^i y b_0^{i+1} , $i = 0, \dots, m - 1$ (con $b_0^0 = b_0^m$), a partir de las ecuaciones

$$|b_2^i - I_i| = l_{min}/2, \quad |b_0^{i+1} - I_{i+1}| = l_{min}/2.$$

- (b) De lo contrario, $b_2^i = b_0^{i+1}$, y ambos resultan de las relaciones $|I_i - b_2^i| = |I_{i+1} - b_0^{i+1}| = l_i/2$.

5. Para $i = 0, \dots, m - 1$, tomar

$$b_1^i = I_i.$$

6. Para $i = 0, \dots, m - 1$, calcular w_1^i como en (13).

FIN del algoritmo

3.2. Evaluación de una cónica

Para poder representar gráficamente el *spline* cónico es imprescindible evaluar cada cónica en valores prefijados del parámetro t . Supongamos que la j -ésima sección del *spline* cónico es la cónica $c_i(t)$ sobre cuya traza se necesitan $n + 1$ puntos. Si evaluamos $c_i(t)$ en $n + 1$ valores equidistantes de $[0, 1]$,

$$t_j = \frac{j}{n}, \quad j = 0, \dots, n,$$

entonces los puntos que se obtienen sobre la gráfica de la cónica pueden aparecer concentrados hacia el centro o hacia los extremos de la curva en dependencia de si w_1^i es mayor o menor que 1 (vea la figura 7). En [5] Farouki y Sakkalis hacen referencia a este “defecto” de las curvas racionales

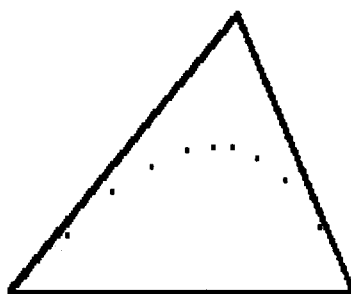


Figura 7. Sección cónica evaluada en valores equidistantes del parámetro.

Sin embargo, para lograr que las mallas que se construyan tengan propiedades óptimas, estos $n + 1$ puntos deben estar “regularmente” distribuidos sobre la gráfica, de modo que la longitud de cada arco de cónica entre dos puntos consecutivos sea aproximadamente constante. De manera exacta, este resultado sólo se puede obtener si parametrizamos la cónica en términos de su longitud de arco, lo cual resulta una tarea extremadamente costosa.

Para w_1^i mayor que 1, hemos podido comprobar experimentalmente que en la medida en que este peso crece, los puntos que se obtienen de evaluar la cónica en valores equidistantes del parámetro se concentran cada vez más hacia el centro de la gráfica. Como en nuestro algoritmo es frecuente que w_1^i sea mayor que 1 (pues esto equivale a $\theta_i < 138^\circ$), resulta importante enfrentar este problema.

Una forma de resolverlo aproximadamente (cuando la cónica está escrita en forma estándar) consiste en evaluar la cónica en valores paramétricos que se concentren alrededor de 0 y 1, y sean escasos en el centro del intervalo. Un efecto de este tipo se logra si tomamos

$$\begin{aligned} t_0 &= 0, \\ t_j &= g(u_j) := [\tanh(ku_j/2) + 1]/2, \quad j = 1, \dots, n-1, \\ t_n &= 1, \end{aligned} \tag{14}$$

donde los u_j son puntos equidistantes en un cierto intervalo $[-a, a]$:

$$u_j = -a + 2a(j - 1)/(n - 2), \quad j = 1, \dots, n - 1.$$

Los valores de a y de la pendiente k de $g(u)$ en $u = 0$ se escogen en términos del peso w_1^i de la cónica que se quiere evaluar. Específicamente nosotros proponemos tomar

$$a = 2(7 - w_1^i/2), \quad k = \sqrt{w_1^i}/5, 5.$$

Nótese que en la medida en que w_1^i crece el valor de k aumenta, y por lo tanto los t_i se concentran más hacia los extremos. Recíprocamente, cuando w_1^i crece, el valor de a disminuye, pues evaluando g en un intervalo más pequeño ya se logra que t_1 esté cerca de 0 y t_n cerca de 1.

Los resultados obtenidos con este tipo de distribución de los valores paramétricos son mucho mejores que los obtenidos con la distribución equidistante. Esto se hace más evidente en la medida en que w_1^i crece. En la figura 8 se muestra, como ejemplo, la misma sección cónica de la figura 7, pero evaluada en los t_j dados por (14) para $n = 10$.

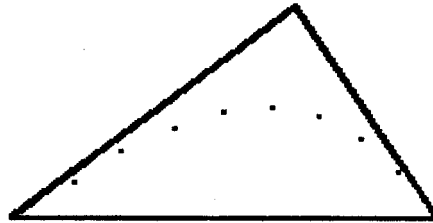


Figura 8. La misma sección cónica de la figura 7 evaluada en los t_i dados por (14).

3.3. Parametrización global del *spline* cónico

Un problema que se presenta una vez suavizada la frontera de la región es cómo escoger un conjunto de puntos sobre la misma que se mantendrán fijos como extremos de la malla. Inicialmente la frontera suavizada se subdivide en 4 subfronteras, de modo que las líneas “horizontales” de la malla irán de la subfrontera 1 a la 3 y las “verticales” unirán puntos de la subfrontera 2 con puntos de la 4.

Si la malla que se desea construir es de orden $n_i \times n_j$ entonces se deben seleccionar n_i puntos fijos en cada una de las subfronteras 1 y 3 y n_j en cada una de las dos restantes. Para obtener estos puntos es necesario evaluar el *spline* cónico en valores prefijados del parámetro. Como una subfrontera puede incluir varias cónicas y rectas (incluso puede suceder que cada extremo de la subfrontera sea un pedazo de una cónica o una recta), es necesario disponer de una parametrización global del *spline* cónico.

Sea u el parámetro global que describe el *spline* $s(u)$ formado por ls secciones. Entonces debemos calcular $ls + 1$ valores u_j tales que

$$s(u) = s_j(u) \quad \text{para } u \leq u \leq u_{j+1}, \quad j = 0, \dots, ls - 1,$$

donde $s_j(u)$ es una sección cónica o una recta.

Puesto que las secciones rectas y las cónicas se unen con tangente continua, es posible construir una parametrización de la curva tal que la misma sea de clase C^1 . En otras palabras, los u_j se pueden calcular exigiendo que se cumpla la siguiente condición:

$$\dot{s}_{j-1}(u_j) = \dot{s}_j(u_j), \quad j = 1, \dots, ls - 1. \quad (15)$$

Calculando las derivadas de s_{j-1} y s_j y simplificando varias veces se obtiene que (15) es equivalente a

$$w_1^{j-1} \Delta_j (b_2^{j-1} - b_1^{j-1}) = w_1^j \Delta_{j-1} (b_1^j - b_0^j), \quad (16)$$

donde $\Delta_j = u_{j+1} - u_j$, y los b_i^j , $i = 0, 1, 2$, son los puntos del polígono de control de la j -ésima cónica.

La ecuación (16) puede reescribirse como

$$\frac{w_1^j (u_j - u_{j-1})}{w_1^{j-1} (u_{j+1} - u_j)} = \frac{\|b_2^{j-1} - b_1^{j-1}\|}{\|b_1^j - b_0^j\|},$$

y de esta última expresión se puede despejar u_{j+1} :

$$u_{j+1} = u_j + \frac{w_1^j}{w_1^{j-1}} \frac{\|b_1^j - b_0^j\|}{\|b_2^{j-1} - b_1^{j-1}\|} (u_j - u_{j-1}) \quad (17)$$

para $j = 1, \dots, ls - 1$, mientras que u_0 y u_1 se pueden escoger de manera arbitraria, por ejemplo $u_0 = 0$ y $u_1 = 1$.

Nótese que en (17) el factor que multiplica a $(u_j - u_{j-1})$ se refiere a los pesos y puntos de control de s_j y s_{j-1} escritas como cónicas. Si por ejemplo s_j es la recta que está entre las cónicas $i - 1$ e i , entonces se puede escribir como una cónica tomando $b_0^j = b_2^{i-1}$, $b_2^j = b_0^i$, b_1^j como el punto medio de b_0^i y b_2^i y $w_1^j = 1$.

Puesto que el *spline* cónico que construimos tiene tangente continua en todos los puntos, la parametrización C^1 es natural desde el punto de vista matemático. Sin embargo, los puntos que se obtienen al evaluar el *spline* en valores prefijados del parámetro no siempre se distribuyen regularmente sobre la curva, aún cuando se usen los valores generados por (14).

Para ser más precisos, supongamos que sobre la subfrontera definida por los valores c y d del parámetro u , con $u_0 \leq c < d \leq u_{ls}$, se necesitan n_i puntos. Entonces se puede subdividir el intervalo $[c, d]$ en $n_i - 1$ partes iguales y evaluar el *spline* cónico en los puntos

$$v_i = c + i(d - c)/(n_i - 1), \quad i = 0, \dots, n_i - 1.$$

Para ello resulta imprescindible localizar en qué intervalo $[u_j, u_{j+1}]$, $j = 0, \dots, ls-1$, se encuentra cada v_i . Supongamos que $v_i \in [u_{jj}, u_{jj+1}]$ con $0 \leq jj \leq ls-1$. Para evaluar entonces la sección jj del spline en v_i debemos trasladar este punto a $[0, 1]$ mediante la transformación

$$t = \frac{u - u_{jj}}{u_{jj+1} - u_{jj}}.$$

Ahora bien, si la sección jj del *spline* es una recta o una cónica cuyo peso intermedio es menor que 1 (o sea una elipse), podemos evaluarla directamente en t . En otro caso, es decir, si la sección jj es una parábola o una hipérbola, resulta más conveniente, como vimos en la sección anterior, trasladar t al intervalo $[-a, a]$ y evaluar s_{jj} en la imagen por (14) del punto trasladado.



Figura 9. Mapa de México aproximado con un *spline* cónico con parametrización C^1 .

En la figura 9 se puede apreciar la distribución irregular que se obtiene para 200 puntos (malla de 50x50) sobre la frontera suavizada con el spline cónico del mapa de México. El fracaso de la parametrización C^1 se debe esencialmente a que la longitud de cada intervalo $[u_j, u_{j+1}]$ no está directamente vinculada a la longitud de la curva que corresponde a la j -ésima sección del spline. Una parametrización que tenga en cuenta la longitud de arco de cada pedazo del spline, ofrece mejores resultados. Por ejemplo, se puede tomar

$$u_0 = 0, \quad u_{j+1} = u_j + d_j, \quad j = 0, \dots, ls-1, \quad (18)$$

donde d_j es una aproximación de la longitud de arco de la j -ésima sección del spline. Si s_j es una sección de recta, d_j se puede calcular exactamente, mientras que si es una cónica, se puede evaluar ésta en un número finito de puntos y aproximar la longitud de arco por la suma de las longitudes de los segmentos definidos por cada pareja de puntos consecutivos.

La figura 10 se obtuvo utilizando esta última parametrización del spline cónico para evaluarlo en 200 puntos (malla de 50x50) de la frontera de México, generados por el mismo procedimiento que se empleó para la parametrización C^1 . Como se aprecia claramente, los puntos obtenidos con la nueva parametrización se distribuyen regularmente sobre la gráfica del *spline* cónico.

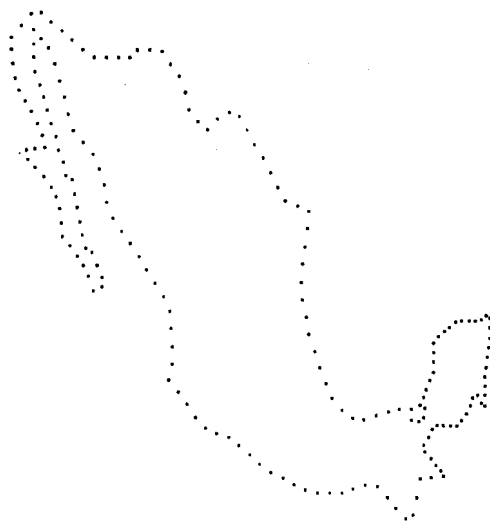


Figura 10. Mapa de México aproximado con un *spline* cónico con la parametrización (18).

3.4. Ejemplos

Los detalles del algoritmo que proponemos en este trabajo se ajustaron por medio de un programa en lenguaje C , que a partir de los vértices del polígono a suavizar construye la curva de la nueva frontera formada por secciones rectas y cónicas. El programa grafica además el polígono y el *spline* cónico, de modo que se pueden apreciar los resultados del suavizamiento.

El *spline* se parametrizó globalmente aproximando la longitud de arco de cada sección cónica. Para evaluar una sección cónica $c_i(t)$ se utilizan los valores equidistantes del parámetro si $w_i^i < 1$, y los valores dados por (14) si $w_i^i \geq 1$. De este modo el programa genera la cantidad de puntos que el usuario escoge para cada una de las 4 subfronteras en que se divide el *spline*. Los puntos obtenidos se distribuyen regularmente sobre la gráfica.

Algunos de los ejemplos probados se muestran en la figura 11, donde además se aprecia que las rectas y las cónicas se unen suavemente, pues las cónicas son tangentes en los extremos a los lados del polígono.

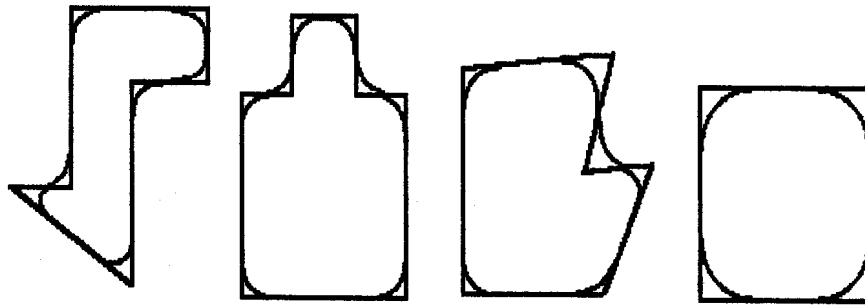


Figura 11. Algunos polígonos suavizados.

Los resultados del programa se validaron construyendo mallas sobre los polígonos suavizados mediante el *spline* cónico. Para ello se utilizó el sistema UNAMALLA [1]. En todos los ejemplos probados se obtuvo que las mallas construidas sobre los polígonos suavizados tienen mejores propiedades que las construidas sobre la región sin suavizar o suavizada por medio de un *spline* cúbico.

Referencias

- [1] BARRERA P., Castellanos L., Pérez A. UNAMALLA: *Un sistema para la generación de mallas en regiones planas irregulares*. Reporte Técnico, Facultad de Ciencias, UNAM, 1994.
- [2] FARIN G. "Algorithms for rational Bezier curves." *Computer-Aided Design*, Vol. 15, No. 2, feb 1983, pp 73-77.
- [3] FARIN G. *From conics to NURBS: A Tutorial and Survey*. IEEE Computer Graphics and Applications, Sept. 1992, pp. 78-86.
- [4] FARIN G. *Curves and Surfaces for Computer-Aided Geometric Design*. Academic Press, 1992.
- [5] FAROUKI R., SAKKALIS T. "Real Rational Curves Are Not Unit Speed." *Computer-Aided Geometric Design*, Vol. 8, No. 2, Mar. 1991, pp. 151-158.
- [6] FULTON W. *Algebraic Curves. An Introduction to Algebraic Geometry*. W. A. Benjamin Inc., New York, 1969.
- [7] *Initial Graphics Exchange Specification*, Doc. No. NB-SIR 86- 3359, NIST, Gaithersburg, Md., 1986.
- [8] KNUTS D.E. *Metafont, New Directions in Typesetting*. Digital Press and American Mathematical Society, Bedford, Mass. 1979.
- [9] LEE E. *The rational Bezier representation for conics. Geometric Modeling: Algorithms and New Trends*. G. Farin, ed. SIAM, Philadelphia, 1987, pp 3-19.
- [10] LIAO, Y.Z. "A two-stage method of fitting conic arcs and straight-line segments to digitized contours". *Proc. IEEE Pattern Recognition and Image Processing Conference*, Dallas, Texas, 1981, pp. 224-229.
- [11] LIMING R. *Practical Analytical Geometry with Applications to Aircraft*, Macmillan, New York, 1944.

- [12] PAVLIDIS T. "Curve Fitting with Conic Splines", *ACM Trans. on Graphics*, 2, 1, 1-31, Jan 1983.
- [13] PENNA M.A. and Patterson, R.R. *Projective Geometry and its Applications to Computer Graphics*. Prentice Hall, 1986.
- [14] PIEGL L. "Defining curves containing conic segments". *Computer and Graphics*, 8, 1984, pp. 177-182.
- [15] PIEGL L. "A Technique for Smoothing Scattered Data with Conic Sections". *Computers in Industry*, Vol. 9, No. 3, Nov. 1987, pp. 223-237.
- [16] PIEGL L. "On NURBS: A Survey". *IEEE Computer Graphics and Applications*, Vol. 11, No. 1, Jan 1991, pp 55-71.
- [17] PRATT V. "Techniques for Conic Splines". *Proceedings of SIGGRAPH 1985*, ACM, New York, 1985, pp. 151-159.
- [18] VAN DAM A., PHIGS . "Funtional Description Revision 3.0". *Computer Graphics*, Vol. 22., No. 3, July 1988, pp. 125-218.