Revista Integración
Escuela de Matemáticas
Universidad Industrial de Santander
Vol. 24, No. 1, 2006, pág. 17–23

Introducción al problema central de la geometría riemanniana en dimensión dos

Claudia Granados Pinzón*

Resumen. En este trabajo introducimos el problema central de la geometría de Riemann en el caso bidimensional, y usamos la inversa de la proyección estereográfica y la métrica extraída (*pullback* en inglés) para mostrar una métrica conforme a la usual en el plano euclidiano $(\mathbb{R}^2,\ \delta_{ij})$ y tal que la constante positiva $K = 1$ es su curvatura de Gauss.

Abstract. In this work we introduce the central problem of the Riemannian geometry in the bidimensional case, and use the inverse of the stereographic projection and the pullback of the metric to show a metric according to the usual one in the Euclidian plane $(\mathbb{R}^2,\ \delta_{ij})$ and such that the positive constant $K = 1$ is its curvature of Gauss.

1. Introducción

Históricamente la geometría está relacionada con problemas de mediciones de distancias, ángulos, áreas, volúmenes, etc. Cuando se consideran sobre una superficie (o variedad diferenciable) aparecen ciertas dificultades que son resueltas gracias a la teoría de variedades riemannianas (variedades diferenciables[1] con productos internos en sus espacios tangentes).

Palabras y frases claves: superficie riemanniana, espacio tangente, orientación de una superficie, curvatura, métricas conformes y métrica extraída (*pullback* of the metric).

MSC2000: Primaria: 53A30 Secundaria: 53A10.

* Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia, *e-mail*: `cigranad@uis.edu.co`.

[1] El concepto de variedad diferenciable generaliza el concepto de superficie a cualquier número arbitrario de dimensiones; lo introdujo Riemann por primera vez en su conferencia *Sobre las hipótesis en los fundamentos de la geometría*, en 1854, pero Weyl fue quien, en 1913, expuso la definición explícitamente.

Gauss fue el primero en desarrollar la noción de curvatura de una superficie. Con esta y la definición de geodésica (la curva con menor distancia entre dos puntos sobre una superficie, concepto totalmente análogo al de recta en el plano), demuestra que existen superficies en las que los ángulos internos de los triángulos formados por las geodésicas no suman necesariamente dos ángulos rectos. Es decir, contradijo el V postulado de Euclides[2]. Este descubrimiento dio origen a considerar geometrías no euclideanas, que fueron introducidas, de manera independiente, por Lobachevski (1829) y Bolyai (1831).

2. Preliminares

Consideremos una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$. Una misma "curva" en la superficie puede tener distinta longitud dependiendo de su posición, o una misma "curva cerrada" sobre la superficie puede encerrar distinta área, dependiendo de su ubicación en la superficie considerada. Estas variaciones mencionadas pueden entenderse con ayuda de la curvatura de una superficie. Para las superficies en el espacio las primeras curvaturas que surgieron fueron curvatura media y curvatura de Gauss.

Gauss definió una noción de curvatura para superficies, la cual mide la variación del plano tangente en el punto p de una superficie S, T_pS. Esta definición, conocida como aplicación de Gauss, proporciona un campo vectorial normal a lo largo de S. Es decir, se define una función $\eta : S \to S^2 \subset \mathbb{R}^3$, de la superficie S en la esfera unitaria S^2, asociando a todo punto $p \in S$ un vector unitario $\eta(p) \in S^2$ normal a T_pS.

Usando la definición de orientación[3] de una superficie (ver [1, pág 18]) se puede mostrar que si S es orientable entonces η está bien definida y es diferenciable. Así que es posible hablar de la diferencial $d\eta_p : T_pS \to T_{\eta(p)}S^2$ y hallar el determinante de la función lineal $d\eta_p$. Gauss definió su curvatura, en el punto p, por $K = K(p) = \det(d\eta_p)$ y demostró que ella coincide con el producto de las curvaturas principales introducidas por Euler (ver [1, pág. 131]).

En 1760 Euler había definido las curvaturas principales κ_1 y κ_2 de una

[2]El hecho de que la suma de los ángulo interiores de un triángulo es igual a dos rectos es la afirmación de la Proposición 32 del Libro *I* de Euclides, que demuestra con base en la Proposición 29, para la cual utiliza el quinto postulado.

[3]Gauss (1777-1855) fue el primero en considerar la propiedad de orientación de superficies; esta noción sólo fue bien entendida hasta que Möbius presentó su famoso ejemplo, la banda de Möbius, en 1865.

superficie S así:

Primero definió la curvatura con signo κ_n de la siguiente forma: eligió el vector normal unitario N de la superficie S en el punto p, y tomó una curva γ como la intersección entre S y un plano Π que pasa por p y que contiene a N; le dio el signo negativo a la curvatura si γ es cóncava en dirección de N, y positivo si su concavidad está en dirección contraria.

Luego, repitiendo este proceso para todos los planos normales Π, llamó curvaturas principales de S en p, denotadas por κ_1 y κ_2, el mínimo y el máximo de las curvaturas con signo obtenidas.

Las curvaturas principales se pueden ver algebraicamente como valores propios de la diferencial de la aplicación de Gauss (ver [1, pág. 131]). La curvatura de Gauss es el producto de estos valores propios, y la curvatura media el promedio.

Curvatura de Gauss: $K = \kappa_1\kappa_2.$

Curvatura media: $H = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2).$

Ejemplo 2.1. Sean $C = \{p = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$ el cilindro circular recto en $\mathbb{R}^3$ y la función $N : C \to S^2$ definida por $N(p) = (x, y, 0)$. La matriz derivada en el punto p de la función N es

$$dN(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Los valores propios de $dN(p)$ son $\kappa_1 = 0$ y $\kappa_2 = 1$. Por lo tanto, la curvatura de Gauss es

$$K = \det dN(p) = \kappa_1\kappa_2 = 0,$$

y la curvatura media,

$$H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} = \frac{1}{2}.$$

☑

Este ejemplo muestra que la curvatura de Gauss del cilindro circular recto es nula, y la curvatura media es distinta de cero. Por otra parte, podemos ver que la curvatura de Gauss y la curvatura media del plano $(\mathbb{R}^2, \delta_{ij})$ son ambas cero[4]. Luego la curvatura de Gauss es nula en ambas superficies, y esto se esperaba ya que las dos superficies son localmente isométricas (Definición 2.2). Esto no se habría podido concluir comparando las curvaturas medias. Esta es la gran importancia de la curvatura de Gauss en superficies.

Definición 2.2. Sean M y N dos superficies riemannianas. Una función diferenciable $f : M \to N$ es localmente una isometría en $p \in M$ si existe una vecindad $U \subset M$ de p tal que $f : U \to f(U)$ es un difeomorfismo que satisface $\langle u, v\rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v)\rangle_{f(p)}$ para cualesquiera $p \in M$ y $u,\ v \in T_pM$. Si f existe se dice que M y N son localmente isométricas.

Ejemplo 2.3. El plano $\mathbb{R}^2$ y el cilindro circular recto $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$ son localmente isométricos.
Dado el abierto $U = (0, 2\pi)\times\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^2$, la función $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to f(U) \subset C$ definida por $f(x, y) = (\cos x, \operatorname{sen} x, y)$ es una biyección diferenciable con diferencial biyectivo dado por

$$df_{(x,y)}(u_1, u_2) = \begin{pmatrix} -\operatorname{sen} x & 0 \\ \cos x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = (-u_1 \operatorname{sen} x, u_1 \cos x, u_2),$$

donde $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$.
Es decir, f es un difeomorfismo y satisface la igualdad

$$\begin{aligned} \langle df_{(x,y)}(u_1, u_2), df_{(x,y)}(v_1, v_2)\rangle_{f(x,y)} &= u_1v_1 \operatorname{sen}^2 x + u_1v_1 \cos^2 x + u_2v_2 \\ &= \langle u, v\rangle_{(x,y)}, \end{aligned}$$

donde $u = (u_1, u_2),\ v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$. Por lo tanto, f es una isometría local. ☑

Al calcular las curvaturas principales se concluye que el problema de curvatura es un problema de métrica, ya que la curvatura depende sólo de la manera de medir en la superficie S. El problema inverso es el problema central de la geometría de Riemann.

3. Problema central en geometría de Riemann

Este problema consiste en determinar la métrica a partir de la curvatura.

[4] Esto se tiene puesto que la matriz derivada en cualquier punto es la matriz nula, y por lo tanto sus valores propios son todos cero.

Formalmente consideramos una superficie riemanniana (S, g) y nos preguntamos por las funciones curvatura que dicha superficie admite. Más aún, restringimos las posibles funciones de curvatura a aquellas que resultan de las deformaciones conformes de la métrica g.

En la década 1970-1980 Kazdan y Warner reformularon este problema bidimensional (veáse [2]). Ellos interpretaron el problema geométrico como un problema de existencia de soluciones de una ecuación diferencial no lineal. Es decir, concluyeron que dada una función K, definida en la superficie riemanniana (S, g), el problema de la existencia de una métrica conforme ge^{2u} a la métrica g, con curvatura de Gauss K en (S, ge^{2u}), es equivalente a la existencia de una solución suave positiva u de la ecuación $\triangle u + Ke^{2u} - k = 0$, donde k es la curvatura de Gauss de (S, g).

La inversa de la proyección estereográfica es una de muchas transformaciones conformes del plano euclideano $(\mathbb{R}^2, \delta_{ij})$, en cuya métrica la curvatura de Gauss es la constante positiva $K = 1$. Veremos este resultado en el ejemplo 3.3 usando la definición de la métrica extraída (la expresión acuñada originalmente en inglés es *pullback of the metric*. En inglés el verbo *to pull back* se refiere a la acción de "retroceder", "extraer", "echar hacia atrás", "retirarse" [las tropas], etc.).

Definición 3.1. Sean M una superficie, (N, g) una superficie riemanniana de dimensión n y $\pi : M \to N$ un difeomorfismo. La métrica extraída de g asociada a π, $\pi^*(g)$ sobre M, es $\pi^*(g)(u, v) = g(d\pi_p(u), d\pi_p(v))$, donde $p \in M$ y $u, v \in T_pM$.

Definición 3.2. Sean (M, g) y $(N, \overline{g})$ superficies riemannianas diferenciables y $\phi : (M, g) \to (N, \overline{g})$ una función suave. ϕ es conforme si $\overline{g}(d\phi_p(v), d\phi_p(w)) = e^{2u}g(v, w)$ para cualesquiera $p \in M$ y $v, w \in T_pM$, donde $u : M \to \mathbb{R}$ es una función suave positiva.

Ejemplo 3.3. Tomemos un sistema de coordenadas en $\mathbb{R}^3$ tal que el polo sur de S^2, la esfera unitaria, sea el origen de coordenadas O y el centro de la esfera S^2 sea el punto $e_3 = (0, 0, 1)$. Denotaremos por $S^2(e_3)$ la esfera unitaria centrada en $e_3 = (0, 0, 1)$ (ver Figura 1).

Sean $\widetilde{g}$ la métrica estándar sobre $S^2(e_3)$ inducida por $(\mathbb{R}^3, \delta_{ij})$, y

$$\Pi : (\mathbb{R}^2, \delta_{ij}) \longrightarrow (S^2(e_3), \widetilde{g})$$

la inversa de la proyección estereográfica desde el polo norte. Por facilidad en los cálculos suponemos la inversa de la proyección del círculo en la recta $\alpha : (\mathbb{R}, \delta_{ij}) \to (S(e_2), \widetilde{g})$, donde $S(e_2)$ denota la circunferencia unitaria centrada en $e_2 = (0, 1)$.

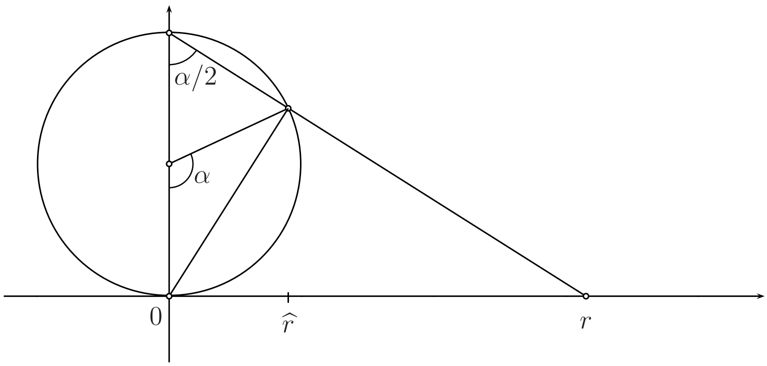

Figura 1. La proyección del círculo sobre la recta.

De la Figura 1 obtenemos la igualdad

$$\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{\sqrt{r^2+4}},$$

así que

$$\alpha = 2 \arcsin \frac{r}{\sqrt{r^2+4}}.$$

La solución suave positiva u del problema se obtiene al calcular la métrica extraída de la métrica estándar $\widetilde{g}$ de $S(e_2)$.

Luego, usando la Definición 3.1, tenemos que

$$\alpha^*(\widetilde{g})(\widehat{r},\widehat{r}) = \langle d\alpha_p(\widehat{r}), d\alpha_p(\widehat{r})\rangle.$$

Por otra parte,

$$d\alpha_p(\widehat{r}) = \frac{d\alpha}{dr} = \frac{2}{\sqrt{1-\dfrac{r^2}{r^2+4}}} D_r\left(\frac{r}{\sqrt{r^2+4}}\right) = \frac{4}{r^2+4}.$$

Así,

$$\alpha^*(\widetilde{g})(\widehat{r},\widehat{r}) = \left(\frac{4}{r^2+4}\right)^2 \delta_{ij}.$$

Además, puesto que las métricas $\alpha^*(\widetilde{g})$ y δ_{ij} son conformes, usando la Definición 3.2, existe una función suave positiva u tal que $\alpha^*(\widetilde{g}) = e^{2u}\delta_{ij}$. Por lo tanto,

$$\left(\frac{4}{r^2+4}\right)^2 \delta_{ij} = e^{2u}\delta_{ij}.$$

Entonces

$$u = \ln 4 - \ln(r^2 + 4).$$

Por consiguiente,

$$u_r = \frac{-2r}{r^2+4} \qquad \text{y} \qquad u_{rr} = \frac{2r^2-8}{(r^2+4)^2}.$$

Así,

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r = \frac{-16}{(r^2+4)^2} = -e^{2u},$$

luego

$$\Delta u + e^{2u} = 0 \quad \text{y} \quad K = 1.$$

De esta forma encontramos una métrica $e^{2u}\delta_{ij}$ conforme a la métrica usual en el plano euclidiano $(\mathbb{R}^2, \delta_{ij})$, donde la curvatura de Gauss es la constante positiva $K = 1$. ☑

Son numerosos los intentos y los resultados concluyentes encontrados en relación con el problema central en geometría riemanniana en el caso bidimensional, pero en la actualidad el problema sigue abierto sobre todo en dimensiones superiores.

Referencias

[1] M. P. do Carmo. *Riemannian geometry.* Birkhäuser, second printing, Boston, 1993.

[2] J. Kazdan & F. Warner. "Scalar curvature and conformal deformation of Riemannian structure". *J. of Diff. Geom.*, **10** (1975), 113–114.

[3] E. García Río. *Una introducción a la curvatura.* Universidade de Santiago de Compostela, 2002.

[4] C. Granados. *Sobre la existencia de una métrica conforme a la métrica euclideana en la n-esfera.* Tesis de Maestría, Universidad del Valle, 2005.

[5] C. Granados. "Un caso particular del problema de preescribir la curvatura escalar en S^n". *Matemáticas: Enseñanza universitaria*, Vol. XV No. 1, 2007, 119–123.

[6] L. Solanilla. "Sobre la formulación del problema de prescribir la curvatura de una variedad Riemanniana bidimensional". *Eureka* **13**, 1998, 45–52.

Claudia Granados
Escuela de Matemática
Universidad Industrial de Santander
Bucaramanga, Colombia
e-mail: cigranad@uis.edu.co, cigranad@hotmail.com